Решения задач
Открытой межрегиональной олимпиады
по астрономии имени Ф.А. Бредихина
10-11 класс

№ 1. ***«Скорость изменения фазы Луны и ее либрации»***

Условие 1. На рис. 1 представлены Солнце, Земля и круговая орбита Луны (без сохранения масштаба) с указанием некоторых точек (обозначены заглавными буквами в квадратах) ее положений на орбите.

1. Расположите буквенные обозначения точек в порядке возрастания модуля скорости изменения линейной фазы Луны в этих точках. Для точек, в которых значения модуля скорости изменения фазы являются одинаковыми, сгруппируйте в круглые скобки, например: А, (Б,В,Г), Д, (Е,Ж,З), И,... Свой ответ обоснуйте строго математически. **(8 баллов)**

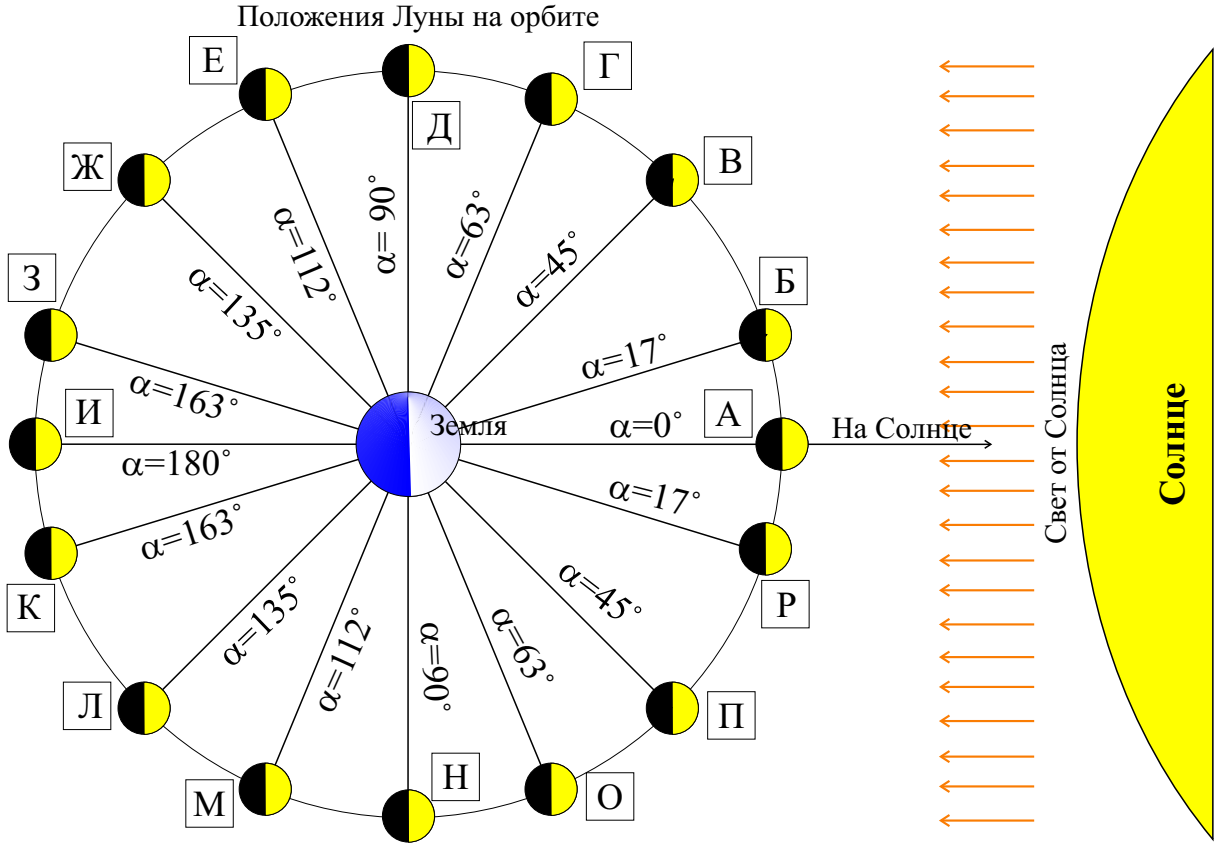

Рис. 1. К определению взаимного расположения Солнца, Земли и Луны (без сохранения масштаба), некоторых характерных точек орбиты последней и соответствующих значений угла элонгации Луны.

Условие 2. Луна испытывает регулярные покачивания (либрации) относительно некоторого среднего положения. Выделяют следующие виды либраций:

Либрация Луны			
1. По долготе	2. По широте	3. Суточная	4. Физическая
Амплитуда либрации			
$7°54'$	$6°50'$	3. $57'$	$2'$

Определите:

2. Установите соответствие между номером либрации и причиной ее появления. В вопросах 2 и 3 ответы на вопросы представьте парами: (цифра, буква). **(1 балл за 1 правильную пару)**

Причины возникновения либрации			
А) Приливное действие Земли и Солнца	Б) Параллакс наблюдателя, обусловленный осевым вращением Земли	В) Ненулевой угол наклона экватора Луны к плоскости ее орбиты относительно Земли	Г) Эллиптичность орбиты Луны и постоянство угловой скорости ее осевого движения

3. Установите соответствие между номером либрации и ее характерным периодом. **(1 балл за 1 правильную пару)**

Периоды либраций Луны			
А) ≈ 24 часа	Б) 27.55 сут	В) 74.6 лет	Г) 27.21 сут

4. Какую долю (в %, до десятых долей) поверхности Луны можно увидеть благодаря: а) либрации по широте, б) совместному проявлению суточной либрации и либрации по долготе. **(4 балла)**

Решение. **1.** Согласно определению, *линейной фазой шарообразного тела* называется отношение освещенной Солнцем части ($d_{\text{осв}}$) диаметра видимого диска этого тела к величине всего диаметра ($D_{\text{д}}$) этого диска:

$$\Phi = \frac{d_{\text{осв}}}{D_{\text{д}}}. \tag{1}$$

Можно строго показать, что фазу можно определить через фазовый угол φ (см. рис. 2), посредством формулы **(0.5 балла)**:

$$\Phi = \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi). \tag{2}$$

Фазовым углом небесного тела, называется угол между лучами, испущенными из центра данного тела на источник света (Солнце) и на его приемник (Землю). Согласно рис. 2, фазовый угол Луны можно выразить через угол α ее элонгации относительно Солнца **(0.5 балл)**:

$$\varphi = \pi - \alpha. \tag{3}$$

Орбита Луны есть окружность, тогда угол

$$\alpha = \omega_{☾}\, t, \tag{4}$$

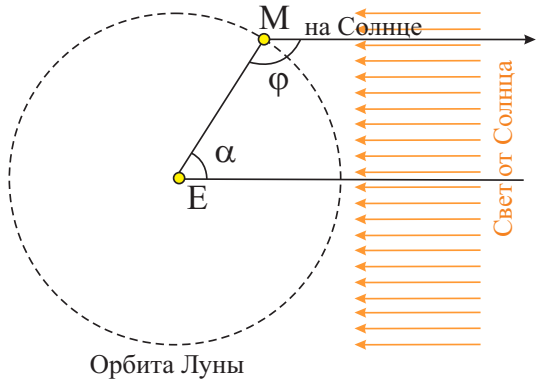

Рис. 2. К определению взаимного расположения Солнца, Земли и Луны.

где $\omega_{☾} = 2\pi/S_{☾}$ – угловая скорость Луны, определяемая относительно прямой "Солнце-Земля"($S_{☾}$ – синодический месяц Луны); t – время, прошедшее от новолуния. Следовательно, фазу можно записать так

$$\Phi = \frac{1}{2}(1 - \cos\omega_{☾}\, t). \tag{5}$$

Вычислим скорость изменения фазы Луны **(1 балл)**:

$$V_{\Phi} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2\Delta t}(\cos\omega_{☾}\, t - \cos\omega_{☾}\,(t+\Delta t)) =$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2\,\Delta t}(\cos\omega_{☾}\, t(1-\cos\omega_{☾}\,\Delta t) + \sin\omega_{☾}\, t\,\sin\omega_{☾}\,\Delta t) =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2\,\Delta t}\left(\left(\frac{\omega_{☾}\,\Delta t}{2}\right)^2\cos\omega_{☾}\, t + (\omega_{☾}\,\Delta t)\sin\omega_{☾}\, t\right) = \frac{\omega_{☾}}{2}\sin\omega_{☾}\, t = \frac{\omega_{☾}}{2}\sin\alpha. \tag{6}$$

Из последнего результата следует, что скорость изменения фазы Луны достигает максимального значения при угле элонгации $\alpha = 90^\circ$ (что соответствует фазам первой и последней четверти),

а минимального значения достигает при значениях $\alpha = 0°$ и $\alpha = 180°$, что соответствует фазе новолуния и полнолуния соответственно. Подведем итог: *чем ближе текущее положение Луны к положениям, соответствующим фазе 1-й или последней четверти, тем выше скорость изменения ее фазы.* Учитывая свойство функции синус: $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, приходим к заключению о равенстве скоростей в точках, симметричных относительно прямой ДН: $V_\Phi(180° - \alpha) = V_\Phi(\alpha)$. В итоге имеем следующий ответ: (А,И), (Б,З,К,Р), (В,Ж,Л,П), (Г,О), (Е,М), (Д,Н) **(1 балл за правильную позицию в последовательности и полный набор положений)**.

2-3. 1) Причиной возникновения *либрации по долготе* является эллиптичность орбиты Луны и постоянство ее периода осевого вращения. Действительно, согласно 2-му закону Кеплера, скорость движения Луны по орбите не постоянна, тогда как ее вращение вокруг своей оси происходит с почти постоянной скоростью. В результате, видимое земному наблюдателю вращение Луны неравномерно, и наблюдатель может немного «заглядывать» в отвернутое от Земли полушарие поочередно с восточного и с западного края. Период либрации по долготе определяется *аномалистическим месяцем*, равным 27.55 сут.

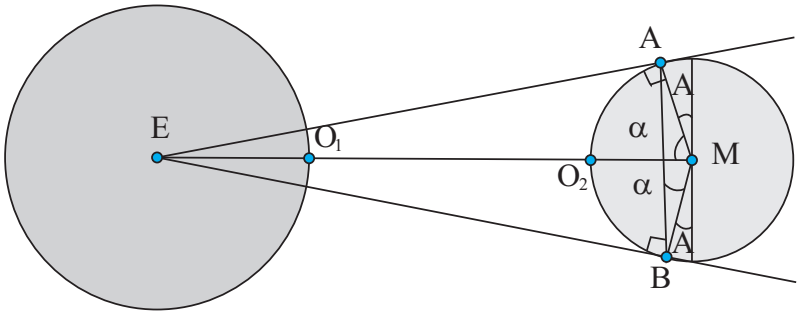

Рис. 3. К определению искомой величины η.

2) *Либрация по широте* происходит вследствие неравенства нулю угла наклона экватора Луны к плоскости ее орбиты относительно Земли. Именно поэтому при движении Луны вокруг Земли земной наблюдатель может обозревать то южный, то северный полюс Луны. Период либрации по широте определяется *драконическим месяцем* Луны, равным 27.21 сут.

3) *Суточная либрация* обусловлена относительной близостью Луны к Земле и параллаксом, порожденным суточным вращением Земли. В результате этого движения, наблюдателю становятся доступным сначала западные области Луны, затем восточные. Период данной либрации равен одним суткам (≈ 24 часа).

4) *Физическая либрация* обусловлена приливными силами со стороны Земли и в меньшей степени Солнца. Она проявляется в небольшом изменении периода вращения Луны вокруг своей оси. Физическая либрация происходит по сложному закону. Доминирующий вклад в этот вид либрации дает эллиптическое колебание лунного полюса с периодом 74.6 лет.

Таким образом, имеем следующие пары (цифра, буква) в ответах на вопросы 2 и 3. **(1 балл за 1 правильную пару)**

Вопрос №	Ответы
2	(1,Г); (2,В); (3,Б); (4,А)
3	(1,Б); (2,Г); (3,А); (4,В)

4. Для определения искомой доли η рассмотрим предварительно рис. 3 (вид со стороны северного полюса орбиты Луны на систему «Земля-Луна»). Определим долю η_0 поверхности Луны, которую можно обозревать в данный момент с среднего расстояния EM между телами. Поверхность, обозреваемая наблюдателем из точки E, есть шаровой сегмент AO_2B, площадь которого есть **(1 балл)**

$$S_{\text{шс}} = 2\pi\,\mathfrak{R}_☾^2\,(1 - \cos\alpha), \tag{7}$$

где α – угол между радиусом Луны $MA = \mathfrak{R}_☾$ и направлением на центр Земли (из центра Луны). Из прямоугольного треугольника $\Delta\,AEM$ следует

$$\cos\alpha = \frac{\mathfrak{R}_☾}{\triangle_☾}, \quad \alpha = \arccos\left(\frac{\mathfrak{R}_☾}{\triangle_☾}\right) = 89.741°, \tag{8}$$

здесь $EM = \triangle_☾$. Учитывая также, что площадь всей поверхности Луны есть

$$S_☾ = 4\,\pi\,\mathfrak{R}_☾^2\,,$$

тогда искомая доля есть **(1 балл)**

$$\eta_0 = \left(\frac{S_{\text{шс}}}{S_{☾}}\right) \cdot 100\% = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mathfrak{R}_{☾}}{\triangle_{☾}}\right) \cdot 100\% = 49.8\%. \tag{9}$$

Вычислим теперь долю поверхности Луны, которую можно видеть с учетом либрации по широте. За счет либрации открываются взору два сферических двуугольника с углом раствора $A_{\text{ш}} = 6°50'$ (см. рис. 3). Значит полную площадь можно записать так

$$S_{\text{tot}} = S_{\text{шс}} + 2\,S_{\text{д}} = S_{\text{шс}} + 4\,A_{\text{ш}}\,\mathfrak{R}_{☾}^2\,. \tag{10}$$

Здесь мы учли, что площадь двуугольника с углом раствора α есть

$$S = 2\,\alpha\,\mathfrak{R}_{☾}^2\,.$$

Тогда искомая доля всей видимой поверхности Луны есть **(1 балл)**

$$\eta_{\text{ш}} = \frac{S_{\text{tot}}}{4\pi\mathfrak{R}_{☾}^2} \cdot 100\% = \eta_0 + \Delta\eta_{\text{ш}} = 53.6\%, \text{ где } \Delta\eta_{\text{ш}} = \frac{A_{\text{ш}}}{180°} \cdot 100\% = 3.8\%. \tag{11}$$

В выражении (11) $A_{\text{ш}} = 6°50'$ – амплитуда либрации по широте, выраженная в градусах, а $\Delta\eta$ определяет долю той части поверхности спутника, которую способен увидеть земной наблюдатель лишь благодаря этому виду либрации.

Аналогично рассуждая в случае совместного проявления суточной либрации и либрации по долготе (в этом случае их амплитуды складываются, при условии сонаправленности их движений) **(1 балл)**:

$$\eta_{\text{д+с}} = \frac{S_{\text{tot}}}{4\pi\mathfrak{R}_{☾}^2} \cdot 100\% = \eta_0 + \Delta\eta_{\text{д+с}} = 54.7\%, \text{ где } \Delta\eta_{\text{д+с}} = \frac{A_{\text{д}} + A_{\text{с}}}{180°} \cdot 100\% = 4.9\%. \tag{12}$$

Критерии оценивания и баллы

№	Выполненная часть решения пункта задачи	Балл
К.1.	**Определение цепочки позиций Луны на орбите**	**8**
	Линейная фаза явно представлена как функция фазового угла	0.5
	Явно определена связь между фазовым углом и углом элонгации тела	0.5
	Выполнен расчет скорости изменения фазы Луны	1
	Определение правильной позиции в последовательности и представление полного набора положений Луны	1(6)
К.2.	**Определение причины либрации и ее периода**	**8**
	За каждую правильную пару вопросов 2 и 3	1(8)
К.3.	**Определение искомых долей поверхности Луны**	**4**
	Определена площадь шарового сегмента/телесного угла	1
	Вычислена доля поверхности Луны, видимая в данный момент	1
	Определена искомая доля с учетом либрации по широте	1
	Определена искомая доля с учетом либрации по долготе и суточной вибрации	1
	Максимальный балл за задачу	**20**

№ 2. ***«Известный астеризм и звездное скопление»***

Условие 1. Вашему вниманию на рис. 4 представлен очень известный астеризм из 7 ярких звезд ночного небосвода Самарской области.

Определите:

1. Какие из ниже представленных объектов космоса не могут находиться в созвездии, которому принадлежит эта семерка звезд? **(1 балл за объект)**

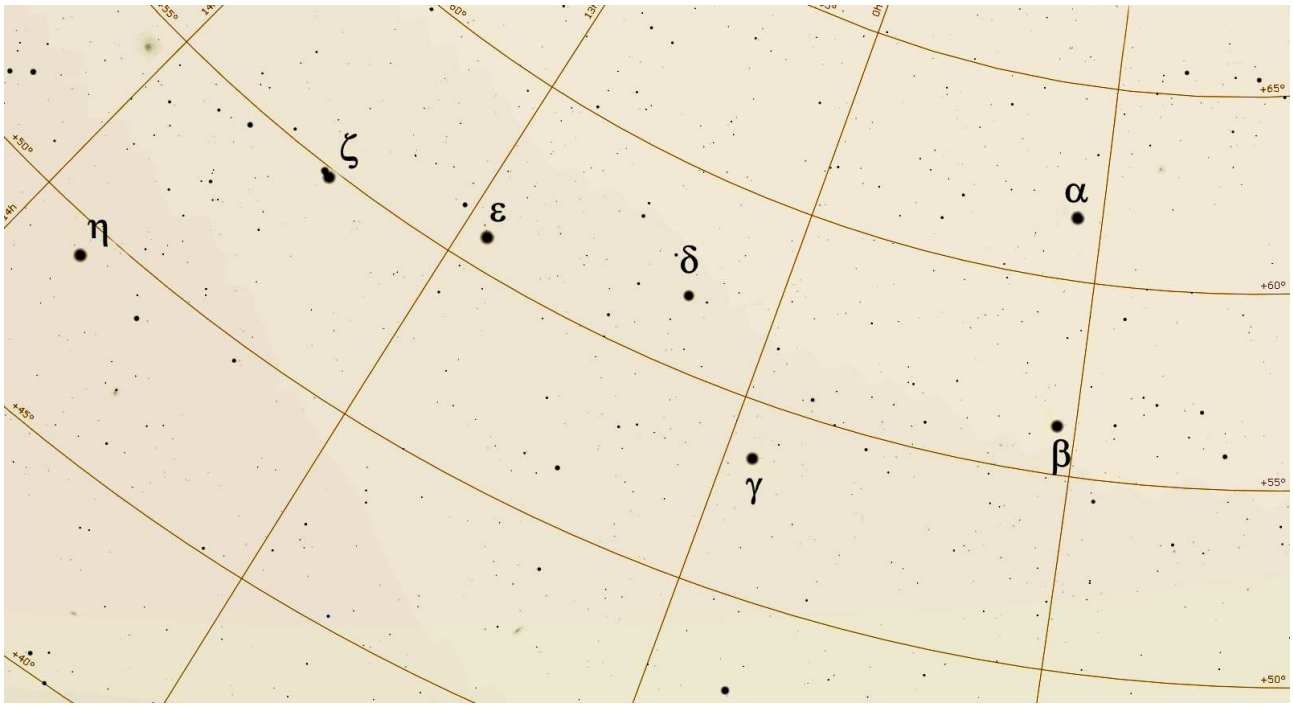

Рис. 4. К определению одного очень известного астеризма из 7 звезд

Обоз-ние звезды	α_*	δ_*	m_*, ^{m}	Сп. класс	μ_α, $\times 10^{-3''}$	μ_δ, $\times 10^{-3''}$	V_r, км/с
α	$11^{\mathrm{h}}03^{\mathrm{m}}44^{\mathrm{s}}$	$+61°45'03''$	1.81	K0III	-134.1	-35.0	-8.7
β	$11^{\mathrm{h}}01^{\mathrm{m}}50^{\mathrm{s}}$	$+56°22'57''$	2.34	A1IV	$+80.0$	$+32.4$	-13.1
γ	$11^{\mathrm{h}}53^{\mathrm{m}}50^{\mathrm{s}}$	$+53°41'41''$	2.41	A0V	107.8	11.7	-13.0
δ	$12^{\mathrm{h}}15^{\mathrm{m}}26^{\mathrm{s}}$	$+57°01'57''$	3.32	A2V	$+102.7$	$+9.2$	-15.3
ε	$12^{\mathrm{h}}54^{\mathrm{m}}02^{\mathrm{s}}$	$+55°57'35''$	1.76	A0V	$+97.9$	-2.4	-12.7
ζ	$13^{\mathrm{h}}23^{\mathrm{m}}56^{\mathrm{s}}$	$+54°55'31''$	2.23	A2V	$+121.2$	-22.0	-9
η	$13^{\mathrm{h}}47^{\mathrm{m}}32^{\mathrm{s}}$	$+49°18'48''$	1.86	B3V	-121.2	$+15.6$	-11.0

Примечание: α_* – прямое восхождение светила, δ_* – склонение светила, m_* – видимая звездная величина; μ_α, μ_δ – собственные движения по прямому восхождению и склонению; V_r – лучевая скорость звезды.

Таблица 1. Некоторые характеристики 7 ярчайших звезд данного кадра.

1. Комета	2. Планетарная туманность	3. Галактика	4. Сатурн
5. Ганимед (спутник)	6. Звездное скопление	7. Церера	8. Двойная звезда

2. Какие из представленных ниже созвездий имеют общую границу с созвездием, которому принадлежат звезды этого астеризма? **(1 балл за объект)**

1. Лира	2. Рысь	3. Пегас	4. Жираф
5. Дева	6. Телец	7. Волопас	8. Скорпион

Условие 2. Вашему вниманию в табл. 1 представлены некоторые характеристики 7 указанных звезд.

3. Известно, что пять из указанных звезд являются "остатком" распавшегося рассеянного звездного скопления. Определите, какие именно звезды этого астеризма входят в этот "остаток"? Свой ответ обоснуйте графически на рис. 4, с использованием метода векторных диаграмм. **(4 балла)**

4. С использованием диаграммы Герцшпрунга-Рассела (см. рис. 5), определите среднее расстояние (в пк, до десятых долей) до центра "остатка" скопления. **(5 баллов)**

5. Вычислите интегральную видимую звездную величину "остатка" скопления и его абсолютную звездную величину. **(5 баллов)**

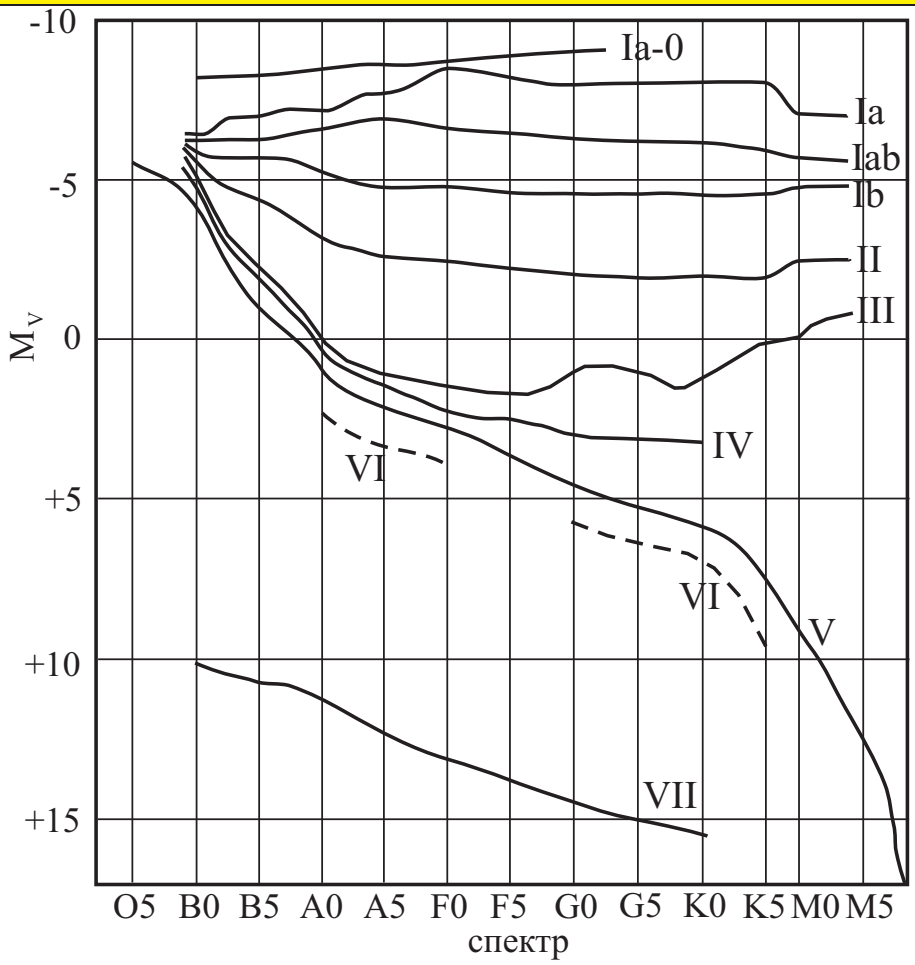

Рис. 5. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.

Решение.

1. Заметим, что 3 из 8 представленных объектов являются телами Солнечной системы и расположены вблизи эклиптики, а именно *Сатурн (4), Ганимед (5) и Церера (7)*. Последняя расположена вдали от созвездия Большая Медведица. Следовательно, указанные три объекта не могут находиться в данном созвездии. Важно отметить, что кометы также является телами Солнечной системы, большинство из которых, сближаясь с Солнцем, приходят из облака Оорта, имеющего сферически симметричную структуру относительно Солнца. Поэтому орбиты комет могут располагаться в околосолнечном пространстве произвольным образом, а значит кометы могут находиться в созвездии Большой Медведицы. **(1 балл за объект)**

2. Созвездие Большой Медведицы относится к северным околополярным созвездиям, по соседству с которым находятся созвездия *Рыси (2), Жирафа (4) и Волопаса (7)*. **(1 балл за объект)**

3. Наиболее надежным критерием, используемым для выделения возможных членов звездного скопления, является сходство их собственных движений и лучевых скоростей. Если скопление не относится к категории движущихся скоплений, векторы собственных движений его членов практически одинаковы и могут отличаться друг от друга только за счет ошибок измерений. Если же рассматриваемые звезды являются членами движущегося скопления, то их векторы собственных движений должны быть преимущественно ориентированы в одном направлении. **(1 балл)** Заметим, что величина собственного движения звезды может быть определена формулой:

$$\mu = \sqrt{\mu_\delta^2 + \mu_\alpha^2 \cos^2 \delta_*}, \tag{13}$$

здесь $\mu_\delta, \mu_\alpha \cos \delta_*$ – по сути можно рассматривать как проекции вектора $\vec{\mu}$, отсчитывамые воль круга склонения и суточной параллели **(1 балл)**. Построим векторы $\vec{\mu}$ для каждой из звезд в одном масштабе на рис 4. В итоге получаем векторную диаграмму (см. рис 6) собственных движений **(1 балл)**, построенную в масштабе для всех звезд астеризма, согласно данным табл. 2. Из рис 6 очевидно, что векторы $\vec{\mu}$ для 5 звезд астеризма (β, γ, δ, ε, ζ) ориентированы почти в одном направлении, а вот для звезд α и η эти векторы ориентированы почти в противоположном

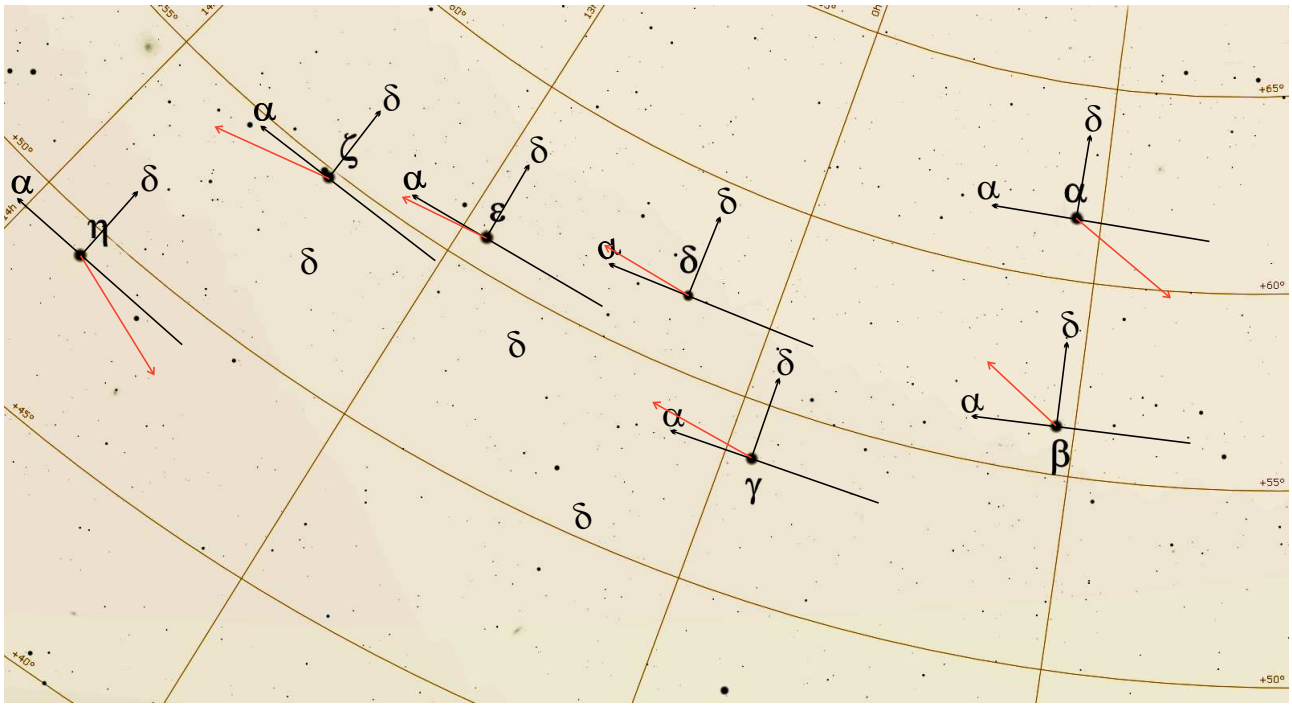

Рис. 6. К определению векторной диаграммы собственных движений (указаны красными стрелками) 7 звезд астеризма.

Звезда	α	β	γ	δ	ε	ζ	η
μ_δ, $10^{-3''}$	-35.0	32.0	11.7	9.2	-2.4	-22.0	-79.0
$\mu_\delta \cos\delta_*$, $10^{-3''}$	-63.5	44.3	63.8	55.9	54.8	69.6	15.6

Таблица 2. К определению проекций вектора собственного движения $\vec{\mu}$ для 7 звезд астеризма.

Звезда	β	γ	δ	ε	ζ
m_*, ^{m}	2.34	2.41	3.32	1.76	2.23
Сп. класс/класс светимости	A1IV	A0V	A2V	A0V	A2V
M_*, ^{m}	+0.61	+1.10	+1.59	1.10	+1.59
r_*, пк	22.2	18.3	22.2	13.6	13.4
$\bar{r}$, пк	17.9				

Таблица 3. К определению значений абсолютной звездной величины M_*, гелиоцентрического расстояния r звезд "остатка" и среднего расстояния до его центра.

направлении. Значит, пять звезд формирующих "остаток" рассеянного звездного скопления есть β, γ, δ, ε, ζ. **(1 балл)** На версию того же ответа указывают различия спектральных классов и классов светимости указанной пятерки звезд и звезд α и η: все звезды "остатка" относятся к спектральному классу A и классам светимости IV-V, что говорит о сходстве их физических свойств (таких как светимость и эффективная температура поверхности), как членов одного скопления. В то время как звезды α и η относятся к спектральным классом K и B, при этом звезда α является представителем III класса светимости (гиганты).

4. С использованием диаграммы Герцшпрунга-Рассела, а также значений спектральных классов и классов светимости звезд "остатка", определим их значения абсолютной звездной величины (см. 4-ю строчку табл. 3) **(1 балл)**. Далее с использованием формулы для абсолютной звездной величины звезды M_*, определим гелиоцентрическое расстояние до каждого компонента "остатка" **(1 балл)**:

$$M_* = m_* + 5 - 5\lg r, \quad \Rightarrow \quad r = 10^{1+0.2(m_* - M_*)}. \tag{14}$$

Численные значения для расстояний представлены в 5-й строке табл. 3 **(2 балла)**. Поскольку звезды "остатка" скопления расположены в относительно небольшом участке небосвода, то среднее гелиоцентрическое расстояние до "остатка" скопления может быть определено как среднее

арифметическое гелиоцентрических расстояний до его компонентов **(1+1 балл)**:

$$\bar{r} = \frac{1}{5} \sum_{i=\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta} r_i = 17.9 \text{ пк}. \tag{15}$$

5. Пусть освещенность, создаваемая звездой δ Большой Медведицы у поверхности Земли, есть $E_\delta = E_0$. Тогда освещенности, создаваемые оставшимися звездами пятерки, есть **(2 балла)**

$$E_\beta = E_0 \cdot 10^{-0.4(m_*^\beta - m_*^\delta)} = 2.47 \cdot E_0, \;\; E_\gamma = E_0 \cdot 10^{-0.4(m_*^\gamma - m_*^\delta)} = 2.31 \cdot E_0,$$

$$E_\varepsilon = E_0 \cdot 10^{-0.4(m_*^\varepsilon - m_*^\delta)} = 4.21 \cdot E_0, \;\; E_\zeta = E_0 \cdot 10^{-0.4(m_*^\zeta - m_*^\delta)} = 2.72 \cdot E_0.$$

Тогда освещенность, создаваемая всеми звездами "остатка", есть **(1 балл)**

$$E_{\text{int}} = E_\beta + E_\gamma + E_\delta + E_\varepsilon + E_\zeta = 12.71 \cdot E_0.$$

Используя формулу Погсона, можно определить искомую интегральную звездную величину "остатка" **(1 балл)**:

$$m_{\text{int}} = m_*^\delta - 2.5 \lg \left(\frac{E_{\text{int}}}{E_0} \right) = 0.56^{\text{m}}. \tag{16}$$

С использованием формулы (17), вычислим абсолютную звездную величину "остатка" **(1 балл)**:

$$M_{\text{int}} = m_{\text{int}} + 5 - 5 \lg \bar{r} = -0.70^{\text{m}}. \tag{17}$$

Критерии оценивания и баллы

№	Выполненная часть решения пункта задачи	Балл
К.1.	**Определение искомых объектов космоса**	**1(3)**
К.2.	**Определение созвездий-соседей**	**1(3)**
К.3.	**Определение компонентов "остатка" звездного скопления**	**4**
	Явно сформулирован критерий выделения возможных членов скопления по собственному движению	1
	Корректно определены проекции вектора μ для каждой звезды остатка	1
	Построена корректно векторная диаграмма собственных движений звезд астеризма	1
	Правильно определены звезды, входящие в "остаток" скопления	1
К.4.	**Определение среднего расстояния до "остатка" скопления**	**5**
	С использованием диаграммы Г-Р определены M_* для 5 звезд	1
	Записана формула для определения гелиоцентрического расстояния до звезды + выполнен его расчет для 5 звезд	1+2
	Вычислено среднее расстояние до "остатка" скопления как среднее арифметическое расстояний до его звезд	1
К.5.	**Расчет величин m_{int} и M_{int}**	**5**
	Представление освещенностей 5 звезд в терминах E_0	2
	Расчет интегральной освещенности E_{int}	1
	Расчет интегральной звездной величины m_{int}	1
	Расчет абсолютной звездной величины "остатка" M_{int}	1
	Максимальный балл за задачу	**20**

№ 3. ***«Свойства протопланетного облака в гипотезе Фая»***

В 1884 году французский астроном Э. Фай сформулировал небулярную гипотезу образования Солнечной системы. Согласно одному из положений гипотезы, все планеты, видимые сегодня невооруженным глазом, сформировались значительно раньше Солнца во вращающемся (как одно целое) плотном однородном облаке, имеющим форму шара, при этом молекулы облака обладали хаотичным движением. Данное облако имело радиус $\mathfrak{R}_c \approx 10$ а. е., сила притяжения в котором

была пропорциональна расстоянию до его центра. Сатурн, пребывая на внешней границе облака, двигался вокруг центра последнего по круговой орбите с периодом, в $\sqrt{2}$ раз меньшим настоящего значения. Само облако можно считать устойчивой гравитационно связанной системой. Определите:

1. Массу протопланетного облака (в массах Солнца, до сотых долей) и его среднюю массовую плотность (в кг/м^3, до миллиардных долей). (**2+2 балла**)

2. На каком минимальном расстоянии (в а. е., до сотых долей) от внешней границы облака, пребывая внутри него, уже нельзя было увидеть невооруженным глазом звезды, полагая, что облако состояло лишь из молекул водорода, сечение релеевского рассеяния для которых в видимом свете равно $\sigma_0 = 1.2 \cdot 10^{-27}$ см^2. Проницающую способность человеческого глаза принять равной $+6.5^{\mathrm{m}}$, молярную массу молекулярного водорода – $2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Звездный небосвод эпохи зарождения Солнечной системы следует считать идентичным настоящему. (**5 баллов**)

3. С использованием теоремы о вириале, определите температуру (в кельвинах, до целых) водорода в облаке Фая. (**6 баллов**)

4. Определите светимость облака (в светимостях Солнца) и скорость (в а. е./год) его гравитационного сжатия. За какое минимальное время (в годах) при данной скорости сжатия облако сжалось бы до размеров современного Солнца? Какой вывод Вы можете сделать о реалистичности гипотезы на основе полученных данных? (**5 баллов**)

Решение.

1. Поскольку Сатурн пребывал на внешней границе облака и двигался по круговой орбите, то для него и облака справедлив закон всемирного тяготения Ньютона в классической форме. Значит можно воспользоваться 2-м законом Ньютона для Сатурна в гравитационном поле облака (**2 балла**):

$$\mathfrak{M}_{\hbar} a_{\hbar} = \frac{G\,\mathfrak{M}_{\hbar}\,\mathfrak{M}_c}{\mathfrak{R}_c^2}, \;\; \Rightarrow \;\; \mathfrak{M}_c = \frac{a_{\hbar}\,\mathfrak{R}_c^2}{G} = \frac{4\pi^2\,\mathfrak{R}_c^3}{G\,T_{\hbar}^2} = 4.583 \cdot 10^{30} \text{ кг} = 2.30 \cdot \mathfrak{M}_{\odot}, \tag{18}$$

здесь $a_{\hbar} = 4\pi^2\,\mathfrak{R}_c/T_{\hbar}^2$ – центростремительное ускорение Сатурна, $T_{\hbar}, \mathfrak{M}_{\hbar}$ – его орбитальный период и масса, $\mathfrak{M}_c$, $\mathfrak{R}_c$ – масса и радиус облака. Средняя массовая плотность облака определяется выражением (**2 балла**):

$$\rho = \frac{\mathfrak{M}_c}{\frac{4}{3}\mathfrak{R}_c^3} = 3.27 \cdot 10^{-7} \text{ кг/м}^3. \tag{19}$$

2. Взаимодействие излучения с веществом определяется законом Бугера-Ламберта (**1 балл**):

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 e^{-\kappa\,\ell}, \;\; \text{где} \;\; \kappa = \sigma\,n, \tag{20}$$

здесь $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}$ – интенсивности электромагнитного излучения на внешней границе облака и на расстоянии ℓ от его поверхности соответственно; κ – бугеровский коэффициент поглощения, σ – сечение взаимодействия (главным образом, релеевского рассеяния – $\sigma = \sigma_0 = 1.2 \cdot 10^{-27}$ см^2) фотонов видимого диапазона с молекулами водорода облака; n – концентрация молекул водорода в облаке. Последняя величина определяется выражением вида (**1 балл**):

$$n = \frac{\rho}{m_0} = \frac{\rho\,N_A}{\mu_{\mathrm{H}_2}} = 9.85 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3},$$

здесь m_0 – масса молекулы водорода, $\mu_{\mathrm{H}_2} = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – его молярная масса; N_A – постоянная Авогадро.

Как известно, самой яркой звездой небосвода является Сириус, видимая звездная величина которого приблизительно равна $m_s = -1.5^{\mathrm{m}}$, чтобы из данной точки облака нельзя было увидеть ни одну звезду, необходимо, чтобы в ней видимая звездная величина Сириуса была больше $m_{\mathrm{г}} = +6.5^{\mathrm{m}}$ (**1 балл**). Рассмотрим предельный случай равенства. Тогда интенсивности света

$\mathcal{I}_0, \mathcal{I}$ можно связать посредством формулы Погсона (**1+1 балл**):

$$\frac{\mathcal{I}_0}{\mathcal{I}} = 10^{0.4(m_\text{г} - m_s)}, \text{ иначе } \frac{\mathcal{I}_0}{\mathcal{I}} = e^{\kappa\,\ell}, \;\Rightarrow\; e^{\kappa\,\ell} = 10^{0.4(m_\text{г} - m_s)}, \;\Rightarrow$$

$$\ell = \frac{0.4(m_\text{г} - m_s)}{\sigma_0\, n \lg e} = 6.234 \cdot 10^{11} \text{ м} = 4.17 \text{ а. е.} \tag{21}$$

3. Теорема о вириале устанавливает аналитическую связь между полной кинетической энергией $E_\text{tot}^{(k)}$ устойчивой физической системы и ее полной потенциальной энергией $E_\text{tot}^{(p)}$ (**1 балл**):

$$2\,E_\text{tot}^{(k)} + E_\text{tot}^{(p)} = 0. \tag{22}$$

Нейтральный водород взаимодействует между собой лишь посредством гравитационного поля. Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия однородного шара (водородного облака) представляется в виде (**1 балл**):

$$E_\text{tot}^{(p)} = -\frac{3}{5}\frac{G\,\mathfrak{M}_c^2}{\mathfrak{R}_c}. \tag{23}$$

Кинетическая энергия облака может быть представлена в виде:

$$E_\text{tot}^{(k)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_0\,V_i^2}{2}, \tag{24}$$

здесь суммирование проводится по всем молекулам водорода данного облака. Заметим, что вектор скорости произвольной молекулы водорода можно представить в виде: $\vec{V}_i = \vec{v}_i + \vec{u}_i$, здесь $\vec{v}_i$, $\vec{u}_i$ – векторы скоростей вращательного и хаотичного (теплового) движений i-й молекулы водорода относительно центра облака соответственно. При этом

$$V_i^2 = \vec{V}_i^2 = (\vec{v}_i + \vec{u}_i)^2 = \vec{v}_i^2 + \vec{u}_i^2 + 2v_i\,u_i\cos\theta_i, \;\Rightarrow\; V_i^2 = v_i^2 + u_i^2 + 2v_i\,u_i\cos\theta_i, \tag{25}$$

здесь θ_i – угол между векторами $\vec{v}_i$, $\vec{u}_i$. При этом скорости частиц и угол между ними могут изменяться в следующих пределах:

$$0 \le v_i \le v_\text{max} = \omega_c\,\mathfrak{R}_c, \;\; 0 \le u_i \le +u_0, \;\; -1 \le \cos\theta_i \le +1,$$

здесь ω_c – угловая скорость вращения туманности; u_0 – максимальная скорость хаотичного движения. Разобъем первый интервал допустимых значений (ИДЗ) для v_i на N_1 малых интервалов одинаковой ширины Δv, второй интервал на N_2 малых интервалов ширины Δu, третий интервал на N_3 малых интервалов ширины Δs. Выполним процедуру усреднения уравнения (25) по всем возможным значениям $\cos\theta_i$ всех N_3 интервалов:

$$\frac{1}{N_3}\sum_{k=1}^{N_3} V_i^2 = \frac{1}{N_3}\sum_{k=1}^{N_3} v_i^2 + \frac{1}{N_3}\sum_{k=1}^{N_3} u_i^2 + 2v_i\,u_i\frac{1}{N_3}\sum_{k=1}^{N_3}(\cos\theta_i)_k. \tag{26}$$

Поскольку в первых трех суммах квадраты скоростей явно не зависят от $\cos\theta_i$, то все эти суммы можно переписать так

$$\frac{1}{N_3}\sum_{k=1}^{N_3} V_i^2 = V_i^2\frac{1}{N_3}\sum_{k=1}^{N_3} 1 = V_i^2\frac{N_3}{N_3} = V_i^2, \;\; \frac{1}{N_3}\sum_{k=1}^{N_3} v_i^2 = v_i^2, \;\; \frac{1}{N_3}\sum_{k=1}^{N_3} u_i^2 = u_i^2.$$

Рассмотрим подробнее следующую сумму:

$$\sum_{k=1}^{N_3}(\cos\theta_i)_k = -1 + (-1+\Delta s) + (-1+2\Delta s) + \ldots + (1-2\Delta s) + (1-\Delta s) + 1 = \frac{(-1+1)}{2}N_3 = 0.$$

При записи последнего выражения использована формула суммы N_3 членов арифметической прогрессии. Т. о., после усреднения выражение (25) представляется в виде:

$$V_i^2 = v_i^2 + u_i^2. \tag{27}$$

Выполним процедуру усреднения по всем возможным значениям u_i всех N_2 интервалов:

$$\frac{1}{N_2}\sum_{j=1}^{N_2} V_i^2 = \frac{1}{N_2}\sum_{j=1}^{N_2} v_i^2 + \frac{1}{N_2}\sum_{k=1}^{N_2}(u_i^2)_j, \;\; \Rightarrow \;\; V_i^2 = v_i^2 + \overline{u^2}. \tag{28}$$

При записи последнего выражения учтено, что V_i^2 и v_i^2 явно не зависят от u_i, а также, что

$$\frac{1}{N_2}\sum_{k=1}^{N_2}(u_i^2)_j = \frac{1}{N_2}\left(0 + \Delta u^2 + (2\Delta u)^2 + (3\Delta u)^2 + ... + (N_2\Delta u)^2\right) = \overline{u^2} = u_{\text{кв}}^2,$$

где $u_{\text{кв}} = \left(\overline{u^2}\right)^{1/2}$ – среднеквадратичная скорость теплового движения молекул облака. Подставим результат (28) в выражение (24), в итоге получим (**1 балл**):

$$E_{\text{tot}}^{(k)} = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_0(v_i^2 + \overline{u^2})}{2} = \omega_c^2\sum_{i=1}^{N}\frac{m_0 r_i^2}{2} + N\frac{m_0\overline{u^2}}{2} = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega_c^2 + U_g = \frac{1}{5}\mathfrak{M}_c\mathfrak{R}_c^2\omega_c^2 + \frac{5}{2}\frac{\mathfrak{M}_c}{\mu_{\text{H}_2}}RT_c, \tag{29}$$

здесь $\mathcal{J}$ – момент инерции облака (однородного шара); U_g – внутренняя энергия идеального газа (водорода), которые представляются в виде:

$$\mathcal{J} = \sum_{i=1}^{N} m_0\, r_i^2 = \frac{2}{5}\mathfrak{M}_c\,\mathfrak{R}_c^2, \;\; U_g = N\frac{m_0\overline{u^2}}{2} = \frac{5}{2}\frac{\mathfrak{M}_c}{\mu_{\text{H}_2}}R\,T_c.$$

В итоге уравнение (22) может быть представлено в виде (**1 балл**):

$$\frac{2}{5}\mathfrak{M}_c\mathfrak{R}_c^2\omega_c^2 + 5\frac{\mathfrak{M}_c}{\mu_{\text{H}_2}}RT_c = \frac{3}{5}\frac{G\,\mathfrak{M}_c^2}{\mathfrak{R}_c}. \tag{30}$$

Учитывая, что для Сатурна на внешней границе облака

$$\omega_c^2 = \frac{G\,\mathfrak{M}_c}{\mathfrak{R}_c^3}.$$

В результате получаем (**1+1 балл**)

$$T_c = \frac{1}{25}\frac{G\,\mathfrak{M}_c\,\mu_{\text{H}_2}}{\mathfrak{R}_c\,R} = \frac{4\pi^2}{25}\frac{\mu_{\text{H}_2}}{R}\frac{\mathfrak{R}_c^2}{T_{\text{ħ}}^2} = 1968\ \text{K}. \tag{31}$$

5. Данное облако является высокотемпературной средой, излучение которой может быть описано моделью черного тела (**1 балл**):

$$L_c = 4\pi\,\mathfrak{R}_c^2\,\sigma\,T_c^4 = 2.39\cdot 10^{31}\ \text{Вт} = 62502\,L_\odot. \tag{32}$$

Т. о., светимость такого облака сравнима со светимостью ярчайших звезд Вселенной – ярких гигантов и сверхгигантов.

Полная механическая энергия облака может быть представлена в виде (**1 балл**):

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{tot}}^{(k)} + E_{\text{tot}}^{(p)} = \frac{1}{2}E_{\text{tot}}^{(p)} = -\frac{3}{10}\frac{G\,\mathfrak{M}_c^2}{\mathfrak{R}_c}.$$

Продифференцируем последнее уравнение по времени (**1 балл**):

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = \frac{3}{10}\frac{G\,\mathfrak{M}_c^2}{\mathfrak{R}_c^2}\frac{d\mathfrak{R}_c}{dt}, \;\; \Rightarrow \;\; \frac{d\mathfrak{R}_c}{dt} = \frac{10}{3}\frac{\mathfrak{R}_c^2}{G\,\mathfrak{M}_c^2}\frac{dE_{\text{tot}}}{dt}, \;\; \frac{d\mathfrak{R}_c}{dt} = \frac{10}{3}\frac{\mathfrak{R}_c^2}{G\,\mathfrak{M}_c^2}L_c = 26.95\ \text{а. е./год}.$$

При условии постоянства скорости сжатия облака, характерное время его коллапса до размеров Солнца составило бы величину (**1 балл**):

$$\mathfrak{R}_\odot = \mathfrak{R}_c - \frac{d\mathfrak{R}_c}{dt}\tau, \;\; \Rightarrow \;\; \tau = \frac{\mathfrak{R}_c - \mathfrak{R}_\odot}{\frac{d\mathfrak{R}_c}{dt}} \approx \frac{\mathfrak{R}_c}{\frac{d\mathfrak{R}_c}{dt}} = 0.371 \text{ года.} \tag{33}$$

Для формирования планет Солнечной системы (прежде всего, планет-гигантов) необходимо вещество этого облака. Если все вещество сколлапсирует на его центр, то для формирования планет условия станут невозможными. Значит, чтобы планеты успели сформироваться, их времена "конденсации" должны быть меньше указанного промежутка времени. Следовательно, характерные времена формирования планет Солнечной системы должны составлять $10^1 \div 10^2$ суток. Согласно современным представлениям, характерное время формирования планет составляет $10^7 \div 10^8$ лет. Таким образом, гипотеза Фая является нереалистичной (**1 балл**) и в настоящее время имеет статус исторической гипотезы.

Критерии оценивания и баллы

№	Выполненная часть решения пункта задачи	Балл
К.1.	**Расчет массы и плотности протопланетного облака**	**2+2**
К.2.	**Расчет минимального расстояния от границы облака**	**5**
	Записана корректно формула для закона Бугера-Ламберта	1
	Вычислена концентрация молекул водорода	1
	Явно сформулирован критерий невидимости звездного неба на примере Сириуса	1
	Получены для расстояния аналитическая формула + численный результат	1+1
К.3.	**Расчет температуры водорода облака Фая**	**6**
	Записана в явном виде теорема о вириале	1
	Представлена аналитическая формула для потенциальной энергии гравитационного поля однородного шара	1
	Получена формула для полной кинетической энергии молекул облака	1
	Записано итоговое уравнение относительно температуры водорода	1
	Получены для температуры водорода облака аналитическая формула + численный результат	1+1
К.4.	**Расчет светимости и скорости гравитационного сжатия облака Фая**	**5**
	С использованием модели абсолютно черного тела вычислена светимость облака	1
	Записана формула для полной механической энергии в терминах массы и радиуса облака	1
	Получена формула + численный результат для скорости гравитационного сжатия облака	1
	Получена численная оценка для времени сжатия облака до размеров Солнца	1
	Сделан корректный вывод о нереалистичности данной модели, в силу экстремально малых значений характерного времени формирования планеты в протопланетном облаке	1
	Максимальный балл за задачу	**20**

№4. ***«Большое лунное гало: его формирование и наблюдение»***

Условие. В нижних слоях атмосферы Земли (при определенных условиях) вокруг яркого светила небосвода (Солнца или Луны) возможно формирование светящегося круглого кольца – *гало*, центр которого для земного наблюдателя совпадает с центром этого светила. Выделяют большое и малое гало. Причина формирования большого гало – двухкратное преломление световых лучей от небесного светила на двух взаимно перпендикулярных гранях кристаллов водяного льда, парящих в атмосфере Земли, и последующее их отклонение на угол ψ относительно исходного направления распространения света. При этом световые лучи, непосредственно формирующие гало, имеют симметричный ход относительно преломляющих граней кристалла.

Докажите, что

1. Угловой радиус большого гало в желто-зеленых лучах с позиции земного наблюдателя равен $\rho_H = \psi_{\text{ж-з}} = 46.2°$. Значение абсолютного показателя преломления водяного льда для желто-зеленых лучей представлен в табл. 4. (**6 баллов**)

Абсолютный показатель n преломления для световых лучей			
Цвет луча	красный	желто-зеленый	фиолетовый
Значение n	1.307	1.312	1.317

Таблица 4. Значения абсолютного показателя преломления водяного льда для красных, желто-зеленых и фиолетовых лучей.

Определите:

2. Угловую ширину кольца гало с позиции земного наблюдателя, если его видимые границы формируют красные и фиолетовые лучи. Какой, преимущественно, цвет имеет его внутренняя и внешняя границы? Значения абсолютного показателя преломления водяного льда для красных и фиолетовых лучей представлены в табл. 4. (**3 балла**)

3. Возможные значения географической широты (с точностью до минуты) точек поверхности Земли, в которых в принципе невозможно наблюдать над горизонтом всю дугу (кольцо) большого лунного гало радиуса $\rho_H = 46.2°$, если известно, что Луна в своем видимом движении по небосводу может отклоняться от эклиптики в любую сторону на угол, не превышающий значения $5°9'$. Угловой шириной гало на данном этапе задачи следует пренебречь. (**8 баллов**)

4. Какое количество звезд, видимых невооруженным глазом и равномерно распределенных по небосводу, можно увидеть внутри большого лунного гало радиуса $\rho_H = 46.2°$? Общее количество звезд, видимых невооруженным глазом на всем небосводе принять равным 6000. (**3 балла**)

Решение.

1. Рассмотрим симметричный ход светового луча по пути ($E \to F \to G \to H$), прошедшего через кристалл водяного льда $ABCD$ с преломляющим углом $\Theta = 90°$ и показателем преломления n (см. рис. 7.а). Луч падает на грань AB кристалла под углом α к перпендикуляру (восстановленному в точку падения), преломившись на ней, он распространяться под углом β к нормали по прямой FG. На вторую грань данный луч падает под углом β и, преломившись, выйдет под углом α к перпендикуляру. В результате прохождения через кристалл световой луч отклоняется от первоначального направления на угол ψ, называемый *углом отклонения* светового луча. Из рис. рис. 7.а) очевидно, что $\psi = 180° - \angle FJG = \angle JFG + \angle JGF = 2(\alpha - \beta)$. (**1 балл**) Четырехугольник $FBGK$ является квадратом, поскольку он образован двумя взаимно перпендикулярными гранями кристалла, двумя перпендикулярами к граням, значит его угол $\gamma = 90°$. (**1 балл**) Из треугольника $\triangle FGK$ следует, что (**1 балл**)

$$180° = \gamma + 2\beta, \;\Rightarrow\; \beta = 45°. \tag{34}$$

Воспользуемся формулой Снеллиуса (законом преломления светового луча) на гранях кристалла (**1 балл**):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n, \;\Rightarrow\; \alpha = \arcsin\left(n \cdot \sin\beta\right). \tag{35}$$

В итоге искомый угол отклонения есть (**1 балл**)

$$\boxed{\psi(n) = 2(\arcsin\left(n \cdot \sin\beta\right) - \beta) = 2\arcsin\left(n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 90°, \;\text{при}\; n_{\text{ж-з}} = 1.312, \;\; \psi_{\text{ж-з}} = 46.2°}. \tag{36}$$

Рассмотрим подробнее формирование *явления большого гало*. Пучок параллельных световых лучей от яркого небесного светила (Солнца, Луны) падает на массив кристаллов из водяного льда, парящих на некоторой высоте (нескольких километров) над поверхностью Земли (см. рис. 7.б). После двухкратного преломления световых лучей на двух взаимно перпендикулярных гранях этих кристаллов, они отклоняются на угол ψ относительно первоначального направления распространения света и далее попадают в глаз наблюдателю. Для наблюдателя

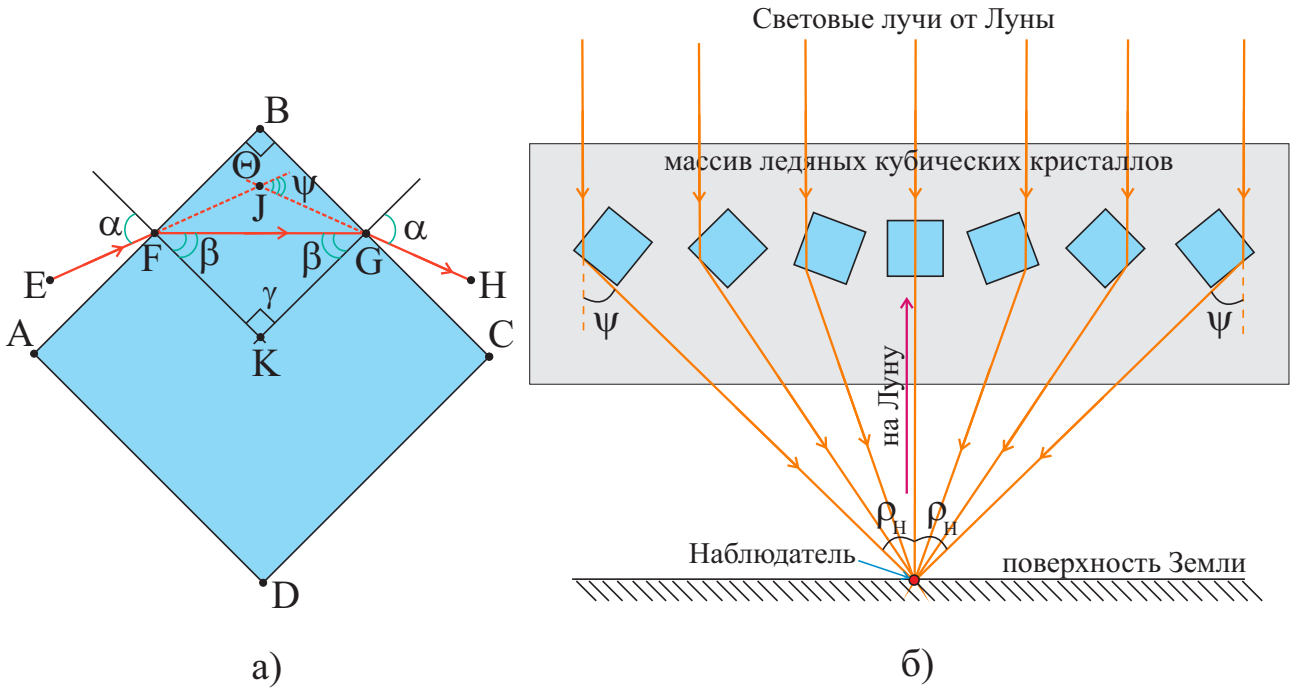

Рис. 7. К определению: а) симметричного хода светового луча в кристалле водяного льда; б) формирования явления большого гало в нижних слоях атмосферы Земли и ее углового радиуса ρ_H для земного наблюдателя.

эта совокупность лучей формирует образ замкнутого круглого кольца, угловой радиус которого $\rho_H = \psi_{\text{ж-з}} = 46.2^\circ$ (**1 балл**) (углы ρ_H и $\psi_{\text{ж-з}}$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых и секущей).

2. Вычислим угловые радиусы большого гало в красных и фиолетовых лучах, согласно (36):

$$\rho_{\text{к}} = \psi(n_{\text{к}}) = 45.1^\circ \ (\textbf{0.5 балла}), \quad \rho_{\text{ф}} = \psi(n_{\text{ф}}) = 47.3^\circ. \ (\textbf{0.5 балла}) \tag{37}$$

Т. о., внешняя граница кольца будет иметь, преимущественно, фиолетовый оттенок, а внутренняя – красный (поскольку $\rho_{\text{к}} < \rho_{\text{ж-з}} < \rho_{\text{ф}}$). (**1 балл**) При этом искомая ширина кольца гало будет $\Delta\rho = \rho_{\text{ф}} - \rho_{\text{к}} = 2.2^\circ$. (**1 балл**)

3. Чтобы дуга большого гало была видна не полностью, необходимо чтобы хотя бы его нижняя точка располагалась под горизонтом. (**1 балл**) Это возможно, если высота яркого светила небосвода, формирующего данное явление, была меньше углового радиуса гало. Максимального значения высота светила достигает в верхней кульминации. Следовательно, условие задачи выполняется в любой момент времени, если $h_{\max}^{(☾)} < \rho_H$ (**1 балл**), где $h_{\max}^{(☾)}$ – высота Луны в верхней кульминации. Воспользуемся формулой для высоты светила в верхней кульминации (**1 балл**):

$$h_{\max} = 90^\circ - |\varphi - \delta|, \tag{38}$$

здесь φ – географическая широта места наблюдения, δ – склонение яркого светила. Тогда данное неравенство можно представить в виде (**1 балл**):

$$90^\circ - |\varphi - \delta_☾| < \rho_H, \Rightarrow \boxed{-90^\circ \le \varphi < -(90^\circ - \rho_H) + \delta_☾} \cup \boxed{90^\circ - \rho_H + \delta_☾ < \varphi \le 90^\circ}, \tag{39}$$

где $\delta_☾$ – склонения Луны. При записи последнего результата учтено, что область допустимых значений для географической широты принадлежит интервалу: $-90^\circ \le \varphi \le 90^\circ$.

Как известно, угол наклона эклиптики к плоскости экватора составляет величину $\varepsilon = 23^\circ 26'$. Следовательно, склонение Солнца в течение года изменяется в пределах (**1 балл**):

$$-\varepsilon \le \delta_\odot \le \varepsilon, \ \text{ или } \ -23^\circ 26' \le \delta_\odot \le 23^\circ 26'. \tag{40}$$

Поскольку Луна в своем видимом движении по небосводу может отклоняется от эклиптики в любую сторону на угол, не превышающий значения $i_☾ = 5^\circ 9'$, то ее склонение в течение большого промежутка времени может принимать значения из диапазона (**1 балл**):

$$-(\varepsilon + i_☾) \le \delta_☾ \le \varepsilon + i_☾, \ \text{ или } \ -28^\circ 35' \le \delta_☾ \le 28^\circ 35'. \tag{41}$$

В итоге искомый диапазон значений географической широты точек поверхности Земли, в которых выполняются данное условие, согласно (39), представляются в виде (**1+1 балл**):

$$\boxed{-90^\circ \le \varphi_2 < -(90^\circ - \rho_H + \varepsilon + i_☾)} \cup \boxed{90^\circ - \rho_H + \varepsilon + i_☾ < \varphi_2 \le 90^\circ}, \text{ или} \tag{42}$$

$$\boxed{-90^\circ \le \varphi_2 < -72^\circ 23'} \cup \boxed{72^\circ 23' < \varphi_2 \le 90^\circ}. \tag{43}$$

3. Телесный угол, соответствующий шаровому сегменту (на поверхности небосвода), вложенному в большое гало, можно представить в виде (**1 балл**):

$$\Omega_H = 2\pi(1 - \cos\psi). \tag{44}$$

Учитывая, что телесный угол всего небосвода Земли – $\Omega_{\text{tot}} = 4\pi$ срад (**1 балл**) соответствует общему количеству ($N_{\text{tot}} = 6000$) звезд, видимых невооруженным глазом на всем небосводе, в результате получаем искомое количество звезд (**1 балл**):

$$\boxed{N_H = N_{\text{tot}}\frac{\Omega_H}{\Omega_{\text{tot}}} = \frac{N_{\text{tot}}}{2}(1 - \cos\psi) = 920 \text{ звезд}}. \tag{45}$$

Критерии оценивания и баллы

№	Выполненная часть решения задачи	Балл
К.1.	**Определение угла отклонения (ψ) и доказательство равенства $\rho = \psi$**	**6**
	Представлено выражение для ψ в терминах углов падения и преломления	1
	Определение углов $\gamma + \beta$ из геометрии	1+1
	Определение угла падения с использованием формулы Снеллиуса	1
	Представлено финальное выражение (36) и численный результат	1
	Обоснование равенства $\rho_H = \psi_{\text{ж-з}}$	1
К.2.	**Определение угловой ширины гало**	**3**
	Определены угловые радиусы гало для красных + фиолетовых лучей	0.5+0.5
	Вычислена угловая ширина кольца гало	1
	Корректно определены цветовые оттенки внутренней и внешней границ гало	1
К.3.	**Определение ОДЗ географической широты**	**8**
	Условие частичной видимости гало в терминах его нижней точки и горизонта	1
	Условие частичной видимости гало в терминах ρ_H и $h_{\max}$	1
	Использовано корректное выражение для $h_{\max}$	1
	Корректно записано ОДЗ (39) для широты	1
	Представлен явно диапазон возможных значений склонения Солнца	1
	Представлен явно диапазон возможных значений склонения Луны	1
	Представлена в аналитическом (42) + численном виде ОДЗ для широты	1+1
К.4.	**Расчет количества звезд внутри гало**	**3**
	Корректно определена формула для телесного угла шарового сегмента	1
	Явно представлен ответ для телесного угла всей сферы	1
	Получено корректное численное значение искомой величины	1
	Максимальный балл за задачу	**20**

№5. ***«Ночь наблюдений двойных звезд и маленькие рекорды»***

Условие. Осенние ночи известны непостоянством состояния земной атмосферы. Астроном-любитель в одну из таких ясных ночей в месте, где идеально темное небо, решил провести визуальные телескопические наблюдения исключительно физически двойных звезд с использованием 4 окуляров с разными фокусными расстояниями:

Окуляр №	1	2	3	4
Фокусное расстояние (f_i), мм	77	40	10	5

№	Двойная звезда	α	δ	$m_1^{(0)}$, m	$m_2^{(0)}$, m	$\mathcal{D}''$, ”	Окуляр №
I	γ Девы	$12^h41^m39^s$	$-01°26'57''$	2.74	3.53	3.2	2
II	o Орла	$19^h51^m02^s$	$10°24'57''$	5.11	13.68	21.5	4
III	μ Дракона	$17^h05^m20^s$	$54°28'12''$	5.66	5.69	2.0	1
IV	ζ Дракона	$14^h41^m09^s$	$13°43'42''$	4.46	4.55	0.6	3

Пояснения: α, δ – прямое восхождение и склонение звезды, $m_1^{(0)}$, $m_2^{(0)}$ – звездные величины компонентов двойной звезды (без учета атмосферного поглощения), $\mathcal{D}''$ – текущее угловое расстояние между компонентами (в угловых секундах).

Таблица 5. К определению некоторых характеристик двойных звезд-"рекордсменок" и окуляров, использованных для их наблюдений.

При наблюдении 4 двойных звезд (см. табл. 5) астроному удалось разрешить их в данный телескоп на пределе возможностей. При этом были достигнуты «маленькие рекорды»: при наблюдении одной из указанных звезд была достигнута дифракционная разрешающая способность телескопа, при наблюдении другой – максимально возможная проницающая способность телескопа, при этом было использовано максимальное предельное увеличение для данного телескопа. Здесь и далее следует считать, что в оптическом тракте последнего нет потерь света и оптические аберрации отсутствуют.

Определите:

1. Диаметр объектива (в мм, до целых) телескопа. (**5 баллов**)

2. Фокусное расстояние объектива (в мм, до целых) и относительное отверстие телескопа. (**3 балла**)

3. Увеличения (до десятых долей), на которых велись наблюдения этих звезд. (**1 балл за ответ**)

4. Широту места наблюдения (с точностью до $1'$) астронома, если потери света в наблюдениях были обусловлены лишь поглощением света в земной атмосфере. (**4 балла**) Поглощение света Δm в зависимости от зенитного расстояния z светила представлено в таблице:

z	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
Δm, m	0.26	0.27	0.28	0.30	0.34	0.40	0.52	0.76

5. Сопоставьте номеру каждой из звезд основную причину «предельности» ее разрешения (**1 балл за пару**):

Основная причина «предельности» разрешения звезды			
Достижение разрешающей дифракционной способности объектива телескопа	Достижение разрешающей способности глаза астронома	Достижение максимальной проницающей способности инструмента + глаза наблюдателя	Турбулентность в атмосфере
Номер звезды			

Следует полагать, что разрешающая способность глаза астронома равна $60''$, диаметр его зрачка в ночное время суток – 6 мм, а проницающая способность – $+6.0^m$.

Решение.

1. Предположим, что имеется визуальная физически двойная звезда с угловым расстоянием $\mathcal{D}''$ между компонентами, видимые звездные величины которых m_1, m_2 ($m_1 \le m_2$). Данная звезда считается разрешимой в телескоп, если выполняются следующие неравенства (**1 балл**):

$$\mathcal{D}'' \ge \beta_T, \quad m_1, m_2 \le m_T, \tag{46}$$

здесь β_T – разрешающая способность телескопа в данных условиях наблюдений; m_T – его проницающая способность. Разрешающую способность телескопа можно записать в наиболее общем виде так

$$\beta_T = \left\{ \begin{array}{ll} \max\{s, \beta_\Gamma\}, & \text{если } \Gamma \le \Gamma_c, \\ \max\{s, \beta_{\text{dif}}\}, & \text{если } \Gamma > \Gamma_c \end{array} \right\}, \tag{47}$$

здесь s – сиинг (диаметр кружка атмосферного дрожания) земной атмосферы; $\Gamma_c = \frac{\beta_{\text{гл}}}{\beta_{\text{dif}}}$ – критическое значение увеличения для телескопа, при котором изменяется причина, определяющая разрешающую способность телескопа (разрешающая способность человеческого глаза $\leftrightarrow$ дифракционная разрешающая способность телескопа). Дифракционную разрешающую способность телескопа в визуальных наблюдениях можно определить формулой вида (**1 балл**):

$$\beta_{\text{dif}} = 140'' \left(\frac{D_0}{D_T}\right), \text{ где } D_0 = 1 \text{ мм}. \tag{48}$$

Разрешающая способность телескопа, обусловленная разрешающей способностью человеческого глаза, представляется в виде (**1 балл**):

$$\beta_\Gamma = \frac{\beta_{\text{гл}}}{\Gamma}, \tag{49}$$

где Γ – текущее угловое увеличение телескопа, которое достигается с используемым окуляром; $\beta_{\text{гл}} = 60''$.

Проницающую способность (силу) телескопа в наиболее общем виде можно представить так

$$m_T = \left\{ \begin{array}{ll} \min\{\sigma - 2.5\lg\left(\frac{\pi\cdot\beta_T^2/4}{\Omega_0}\right), m_{\text{гл}} + 5\lg\Gamma\}, & \text{если } \Gamma \le \Gamma_0, \\ \min\{\sigma - 2.5\lg\left(\frac{\pi\cdot\beta_T^2/4}{\Omega_0}\right), 2.1^{\text{m}} + 5\lg D_T\}, & \text{если } \Gamma > \Gamma_0 \end{array} \right\}, \tag{50}$$

здесь $\Omega_0 = 1$ кв. угл. сек.; $\Gamma_0 = \frac{D_T}{d_{\text{гл}}}$ – равнозрачковое увеличение для данного телескопа и глаза наблюдателя; $d_{\text{гл}} = 6$ мм – диаметр зрачка глаза астронома в ночное время суток. Первое выражение в обеих ветках формулы (50) обусловлено поверхностной яркостью фона ночного небосвода, второе выражение в первой ветке определяется проницающей способностью человеческого глаза и частью светового потока, непосредственно попадающего в глаз астронома при увеличениях, меньших равнозрачкового значения; последнее выражение во второй ветке – это максимально возможное значение для проницающей силы данного телескопа, которое может быть достигнуто для точечного источника света.

Согласно условию задачи, при наблюдении одной из указанных звезд была достигнута дифракционная разрешающая способность, т. е. $\mathcal{D}'' = \beta_{\text{dif}}$. Нетрудно убедиться в том, что $\beta_\Gamma \ge \beta_{\text{dif}}$; кроме того, в момент ее наблюдения $s < \beta_{\text{dif}}$. Следовательно, среди этих звезд у данной звезды угловое расстояние должно быть минимальным, значит это звезда IV. (**1 балл**) С использованием формулы (48), легко вычислить диаметр объектива телескопа (**1 балл**):

$$D_T = D_0 \left(\frac{140''}{\mathcal{D}''_{\text{IV}}}\right) = 233 \text{ мм}, \text{ где } D_0 = 1 \text{ мм}. \tag{51}$$

2. В условии задачи сказано, что наблюдения велись под идеально темным небом. Для такого неба поверхностная яркость составляет $\sigma = (22 \div 23)^{\text{m}}/(''')^2$, что существенно больше $2.1^{\text{m}} + 5\lg D_T$ при данном диаметре. Поскольку β_T есть $\mathcal{O}(1'')$, то при $\Gamma > \Gamma_0$ максимально возможная проницающая способность данного телескопа, очевидно, определялась так (**1 балл**)

$$m_T = 2.1^{\text{m}} + 5\lg D_T = 13.94^{\text{m}}. \tag{52}$$

При этом было использовано максимальное предельное увеличение телескопа (**1 балл**):

$$\Gamma_{\max} = 2\left(\frac{D_T}{D_0}\right) = 466^\times, \text{ где } D_0 = 1 \text{ мм}. \tag{53}$$

С другой стороны, туже величину можно представить в виде (**1+1 балл**):

$$\Gamma_{\max} = \frac{F_T}{f_4}, \quad F_T = f_4 \cdot \Gamma_{\max} = 2330 \text{ мм}, \quad \Rightarrow \quad \chi_T = \frac{D_T}{F_T} = \frac{1}{10}, \tag{54}$$

здесь F_T, χ_T – фокусное расстояние объектива и относительное отверстие соответственно.

3. Зная фокусное расстояние объектива и фокусное расстояние окуляров, можно легко определить увеличения, на которых велись наблюдения с этими окулярами:

$$\Gamma_i = \frac{F_T}{f_i}, \text{ при этом } \Gamma_0 = \frac{D_T}{d_{\text{гл}}} = 38.8^{\times}. \tag{55}$$

Выполняя численный расчет искомых величин по данной формуле, получаем следующие значения (**1 балл за результат**):

Окуляр №	1	2	3	4
Γ_i, $^{\times}$	30.3	58.3	233	466
Γ_i/Γ_0	0.78	1.50	6.01	12.01

4. В таблице 5 представлены звездные величины $m_i^{(0)}$ двойных звезд без учета атмосферного поглощения света. Однако, видимая звездная величина m_i звезды, наблюдаемой в телескоп, представляется так

$$m_i = m_i^{(0)} + \Delta m_i, \tag{56}$$

здесь Δm_i – поправка за атмосферное поглощение света. Очевидно, максимально возможная проницающая способность (52) телескопа была достигнута в случае звезды II, поскольку ее вторая компонента является самой тусклой среди представленных, а значит имеет самую большую видимую звездную величину. Из (52) и (56) следует, что поправка Δm_2 для второй компоненты звезды II определяется значением (**1 балл**):

$$\Delta m_2 = m_2 - m_2^{(0)} = m_T - m_2^{(0)} = 13.94^{\text{m}} - 16.68^{\text{m}} = 0.26^{\text{m}}.$$

Последняя величина, согласно данным условия задачи, отвечает зенитному расстоянию звезды равным нулю. (**1 балл**) Следовательно звезда II наблюдалась в зените. Из курса сферической астрономии известно, что широта места наблюдения определяется склонением светила, расположенного в зените этого места. Значит, широта места наблюдения астронома $10°25'$. (**1 балл**)

5. Причины «предельности» разрешения звезд II и IV уже определены выше. Определим эти причины для звезд I и III. Заметим, что компоненты звезды I являются очень яркими и даже атмосферное поглощение не сможет их сделать большими проницающей способности телескопа. Значит «предельность» разрешения этой звезды была достигнута по угловому расстоянию между компонентами. Поскольку для 2-го окуляра $\Gamma_2 > \Gamma_0$, значит разрешающая способность телескопа в момент ее наблюдения определялась сиингом (турбулентностью потоков воздуха в атмосфере). Значит, в случае звезды III искомая причина есть достижение разрешающей способности глаза астронома. Действительно, при ее наблюдении использован окуляр 1, для которого $\Gamma < \Gamma_0$, при этом $\beta_\Gamma = \frac{\beta_{\text{гл}}}{\Gamma} \approx 2''$, что соответствует в точности $\mathcal{D}_2''$.

В результате получаем (**1 балл за пару**):

Основная причина «предельности» разрешения звезды			
А) Достижение разрешающей дифракционной способности объектива телескопа	Б) Достижение разрешающей способности глаза астронома	В) Достижение максимальной проницающей способности инструмента + глаза наблюдателя	Г) Турбулентность в атмосфере
Номер звезды			
IV	III	II	I

Критерии оценивания и баллы

№	Выполненная часть решения задачи	Балл
К.1.	**Определение диаметра объектива телескопа**	**5**
	Определен количественный критерий разрешимости компонентов двойной звезды	1
	Представлена аналитическая формула для дифракционной разрешающей способности телескопа	1
	Представлена аналитическая формула для разрешающей способности телескопа, обусловленного разрешающей способностью человеческого глаза	1

Критерии оценивания и баллы (продолжение)

№	Выполненная часть решения задачи	Балл
	Явное указание на равенство $\mathcal{D}_4'' = \beta_{\text{dif}}$	1
	Вычислен линейный диаметр объектива телескопа	1
К.2.	**Определение F_T и χ_T телескопа**	**3**
	Вычислено максимальное предельное увеличение телескопа	1
	Выполнен расчет фокусного расстояния + относительного отверстия	1+1
К.3.	**Расчет угловых увеличений для 4-х окуляров телескопа**	**1(4)**
К.4.	**Расчет широты места наблюдений**	**4**
	Вычислена максимально возможная проницающая способность телескопа	1
	Вычислена поправка за атмосферное поглощение для 2-го компонента звезды II	1
	Определение зенитного расстояния двойной звезды II	1
	Определение географической широты с учетом явного равенства широты и склонения звезды II	1
К.5.	**Определена причина «предельности» разрешения**	**1(4)**
	Максимальный балл за задачу	**20**

№6. ***«Двухэтапные "подъемы" орбиты МКС и свойства термосферы»***

Условие 1. На рис. 8 представлена зависимость высоты (h) орбиты Международной космической станции (МКС) над поверхностью Земли в период 17.06.2015 по 17.06.2016 гг. *Вертикальные* «скачки» высоты орбиты здесь отвечают моментам коррекции ("подъема") орбиты станции с помощью пристыкованных космических аппаратов (КА). С использованием данного графика, определите:

1. Даты "подъема" орбиты станции, когда высота последней претерпела: а) минимальное, б) максимальное изменение. Операции маневра M_1 и M_2 не учитывать. **(2 балла)**

2. Среднее арифметическое значение (в течение указанного периода) скорости падения высоты орбиты МКС (в метрах в сутки, до сотых долей), обусловленного действием силы аэродинамического сопротивления (САДС) на корпус станции со стороны верхней атмосферы Земли – термосферы. **(3 балла)**

Условие 2. "Подъем" орбиты МКС осуществляется в два этапа: 1) переход с круговой орбиты на эллиптическую, посредством ускорения с помощью КА, 2) переход на круговую орбиту в апогее эллиптической орбиты, в результате повторного ускорения станции с помощью КА. Определите:

3. Приращения скорости МКС (в м/с, до тысячных) на каждом этапе, сообщенные ей КА "Прогресс" в даты, определенные в пункте 1. **(5 баллов)**

4. Среднее значение САДС (в ньютонах, до сотых), действующей на МКС со стороны термосферы в указанный период и являющейся основной причиной падения станции на Землю. Масса МКС равна 440 тонн. Орбиту МКС вне "подъемов" на каждом обороте следует считать круговой. **(4 балла)**

5. Силу аэродинамического сопротивления можно в общем случае представить в виде:

$$F_c = \frac{1}{2} C_d \, \rho \, S \, V^2, \tag{57}$$

где $C_d = 2$ – безразмерный коэффициент аэродинамического сопротивления для ультраразреженного газа, ρ – его средняя массовая плотность, $S = 120$ м^2 – площадь поперечного сечения МКС, V – скорость, с которой станция движется относительно атмосферы Земли. Оцените по этим данным среднюю массовую плотность (в кг/м^3, до 10^{-13} долей) термосферы Земли на высоте орбиты МКС, полагая что земной шар и его атмосфера вращаются как одно целое. **(2 балла)**

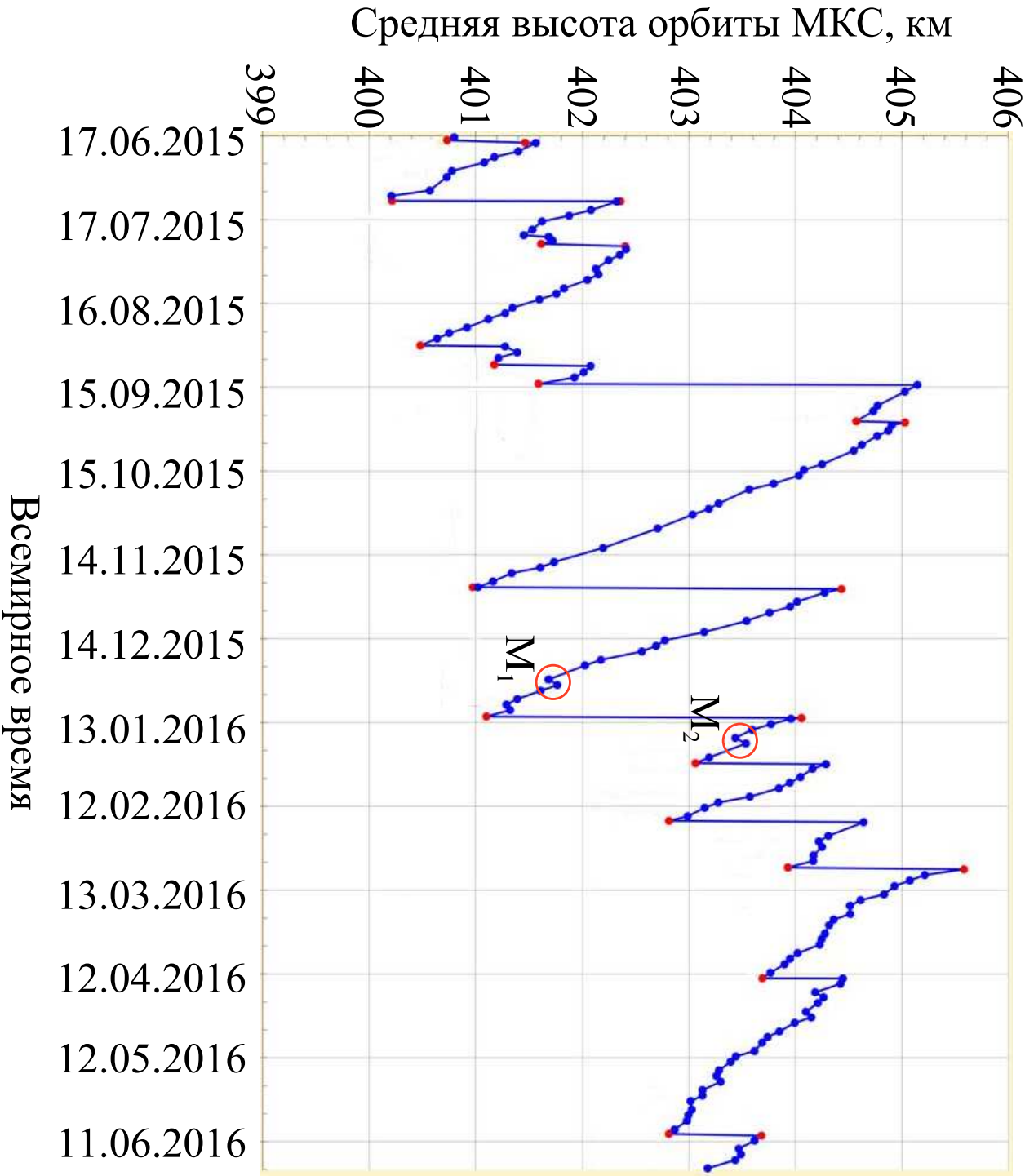

Рис. 8. Изменение средней высоты орбиты МКС в период с 17.06.2015 по 17.06.2016 гг.

6. Силу тяги (в ньютонах, до сотых) КА "Прогресс" и его полезную работу (в МДж, до сотых) во время исполнения операций M_1 и M_2 маневрирования (отмечены кружками на кривой рис. 8) и уклонения от космического мусора. Масса КА равна 7.0 тонн. Следует считать, что сила тяги сонаправлена орбитальной скорости МКС. **(4 балла)**

Решение.

1. Согласно рис. 8, высота орбиты МКС претерпела: а) минимальное изменение 22.07.2015 года **(1 балл)**; максимальное изменение 15.09.2015 года **(1 балл)**.

2. Для определения среднего арифметического значения (в течение указанного периода) скорости падения высоты орбиты МКС заметим, что на графике 8 можно условно выделить 12 почти линейных наклонных участков, где $h(t)$ является убывающей (см. рис. 9). Определим на каждом таком участке начальную высоту орбиты МКС $h^{(i)}$, конечную высоту $h^{(f)}$, промежуток времени δt, соответствующий данному участку. Тогда скорость падения высоты v_h на j-м интервале

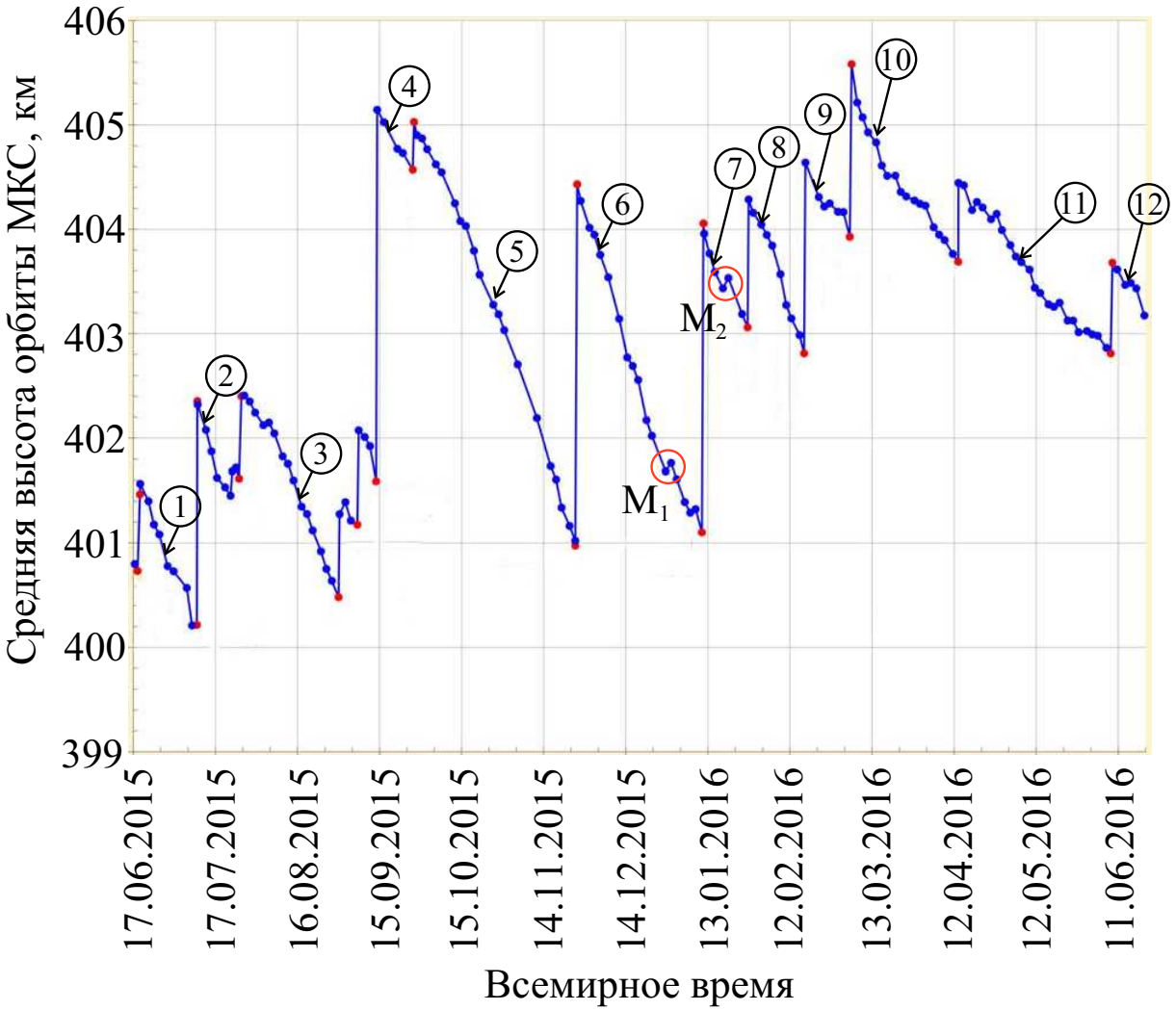

Рис. 9. К определению 12 почти линейных участков падения высоты МКС, обусловленных действием САДС термосферы Земли.

запишется так

$$v_{h\,j} = \frac{h_j^{(f)} - h_j^{(i)}}{\delta t_j}. \tag{58}$$

Численные значения скорости падения высоты для 12 интервалов представлены в табл. 6. **(2 балла)** Тогда среднее арифметическое значение (в течение указанного периода) скорости падения высоты орбиты МКС есть **(1 балл)**

$$\bar{v}_h = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^{N} v_{h\,j} = -57.5 \text{ м/сут}, \quad N = 12. \tag{59}$$

3. На исходной и конечной круговых орбитах скорость МКС определяется формулами **(0.5+0.5 балла)**:

$$V_i = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{(\mathfrak{R}_\oplus + h)}} = V_{\rm I}\sqrt{\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus + h}}, \; V_f = V_{\rm I}\sqrt{\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus + h + \Delta h}}, \text{ где } V_{\rm I} = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus}} = 7.91 \text{ км/с}. \tag{60}$$

При переходе МКС на эллиптическую орбиту в точке исходной круговой орбиты (которая становится перигеем новой орбиты) и в апогее эллиптической орбиты (точке конечной круговой орбиты) скорости МКС должны быть **(0.5+0.5 балла)**:

$$V_q = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{a}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{q}(1+\varepsilon)}, \; V_Q = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{a}\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{Q}(1-\varepsilon)}. \tag{61}$$

Учитывая, что расстояния до перигеия и апогея эллиптической орбиты есть **(1 балл)**:

$$q = a(1-\varepsilon) = \mathfrak{R}_\oplus + h, \; Q = a(1+\varepsilon) = \mathfrak{R}_\oplus + h + \Delta h, \; \Rightarrow \; \frac{Q}{q} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{\mathfrak{R}_\oplus + h + \Delta h}{\mathfrak{R}_\oplus + h},$$

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 1 + \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \approx 1 + 2\varepsilon, \; \frac{\mathfrak{R}_\oplus + h + \Delta h}{\mathfrak{R}_\oplus + h} \approx 1 + \frac{\Delta h}{\mathfrak{R}_\oplus + h}, \; \Rightarrow \; \varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\Delta h}{\mathfrak{R}_\oplus + h} \ll 1. \tag{62}$$

№ интервала	$h^{(i)}$, км	$h^{(f)}$, км	Δ, сут	v_h, км/сут
1	401.6	400.2	19.4	-72.2
2	402.4	401.4	12.6	-79.4
3	402.4	400.5	34.6	-54.9
4	405.15	404.56	13.5	-43.7
5	405.03	400.95	59.	-69.2
6	404.44	401.1	46.5	-71.8
7	404.05	403.05	16.5	-60.6
8	404.28	402.79	20.8	-71.6
9	404.64	403.9	16.5	-44.8
10	405.56	403.67	39.7	-47.6
11	404.44	402.79	55.2	-29.9
12	403.69	403.18	11.6	-44.0
Среднее арифметическое, $\bar{v}_h$				$\mathbf{-57.5}$

Таблица 6. Численные значения параметров $h^{(i)}$, $h^{(f)}$, δt, v_h, а также среднее арифметическое значение скорости падения высоты орбиты МКС.

При записи последних выражений мы учли малость эксцентриситета эллиптической переходной орбиты. Тогда приращения скорости в перигеее и апогее эллиптической орбиты представляются в виде **(0.5+0.5 балла)**:

$$\Delta V_q = V_q - V_i = \sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus + h}(1+\varepsilon)} - \sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_\oplus}{(\mathfrak{R}_\oplus + h)}} = V_{\rm I}\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus + h}} = \frac{V_{\rm I}}{4}\frac{\Delta h}{\mathfrak{R}_\oplus + h}\sqrt{\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus + h}} =$$

$$= \frac{V_{\rm I}}{4}\frac{\Delta h\sqrt{\mathfrak{R}_\oplus}}{(\mathfrak{R}_\oplus + h)^{3/2}}, \tag{63}$$

$$\Delta V_Q = V_f - V_Q = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{(\mathfrak{R}_\oplus + h + \Delta h)}} - \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus + h + \Delta h}(1-\varepsilon)} \approx V_{\rm I}\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus + h + \Delta h}} \approx$$

$$\approx \frac{V_{\rm I}}{4}\frac{\Delta h\sqrt{\mathfrak{R}_\oplus}}{(\mathfrak{R}_\oplus + h)^{3/2}} = \Delta V_q. \tag{64}$$

Согласно рис. 8, 22.07.2015 года изменение высоты орбиты составило $\Delta h_{\min} = 250$ м, при этом начальная высота была $h_{\min} = 401.4$ км; 15.09.2015 те же параметры составили значения: $\Delta h_{\max} = 3550$ м и $h_{\max} = 401.6$ км. В итоге получаем **(0.5+0.5 балла)**:

$$\Delta V_q^{(\min)} = \Delta V_Q^{(\min)} = 0.071 \text{ м/с}, \;\; \Delta V_q^{(\max)} = \Delta V_Q^{(\max)} = 1.005 \text{ м/с}. \tag{65}$$

4. Сила сопротивления атмосферы, присутствующая в замкнутой системе "Земля-ее атмосфера-МКС", является диссипативной силой. Значит, здесь будет выполняться закон изменения полной механической энергии: *работа силы сопротивления равна изменению полной механической энергии системы*, т. е.:

$$A = \frac{mV_f^2}{2} - \frac{Gm\,\mathfrak{M}_\oplus}{(\mathfrak{R}_\oplus + h + \Delta h)} - \left(\frac{mV_i^2}{2} - \frac{Gm\,\mathfrak{M}_\oplus}{(\mathfrak{R}_\oplus + h)}\right), \tag{66}$$

здесь и далее $\Delta h < 0$. С учетом (60), выражение (66) можно переписать в виде **(1 балл)**:

$$A = \frac{Gm\,\mathfrak{M}_\oplus}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{R}_\oplus + h} - \frac{1}{\mathfrak{R}_\oplus + h + \Delta h}\right) \approx -\frac{Gm\,\mathfrak{M}_\oplus}{2(\mathfrak{R}_\oplus + h)^2}\,|\Delta h|. \tag{67}$$

С другой стороны, согласно определению, данную работу можно записать так **(1 балл)**:

$$A = -F_c\,\Delta s = -F_c\,V_i\,\Delta t. \tag{68}$$

Следовательно из (67) и (68) получаем уравнение вида **(1 балл)**:

$$-F_c\,V_i\,\Delta t = -\frac{Gm\,\mathfrak{M}_\oplus}{2(\mathfrak{R}_\oplus + h)^2}|\Delta h|, \Rightarrow F_c = \frac{1}{2}\frac{Gm\,\mathfrak{M}_\oplus}{(\mathfrak{R}_\oplus + h)^2}\left|\frac{\Delta h}{\Delta t}\right|\frac{1}{V_i} = \frac{Gm\,\mathfrak{M}_\oplus}{2\mathfrak{R}_\oplus^2}\left(\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus + h}\right)^2\frac{|\bar{v}_h|}{V_i} =$$

$$\frac{m_{\rm МКС}g_0}{2}\frac{|\bar{v}_h|}{V_{\rm I}}\left(\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus + h}\right)^{3/2}, \quad \text{где } g_0 = \frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus^2} = 9.823 \text{ м/с}^2, \tag{69}$$

Операция	h_M, км	Δh_{M_1}, м	Δt_M, сут	A_M, МДж	$F_т$, Н
M_1	401.8	100	2	194.27	0.15
M_2	403.4	100	2	194.17	0.15

Таблица 7. К определению основных параметров расчета полезной работы и силы тяги КА "Прогресс"в операциях M_1 и M_2.

здесь g_0 – ускорение свободного падения у поверхности невращающейся Земли. Численный расчет искомой величины дает значение $F_c = 0.33$ Н **(1 балл)**, при средней высоте $\bar{h} = 402.9$ км.

5. Приравняем правые части (57) и (69) **(1+1 балл)**:

$$\frac{1}{2}C_d\,\rho\,S\,V_i^2 = \frac{m g_0}{2}\frac{|\bar{v}_h|}{V_I}\left(\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus + h}\right)^{3/2}, \Rightarrow \rho = \frac{m_{МКС} g_0}{C_d\,S}\frac{|\bar{v}_h|}{V_I^3}\left(\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus + h}\right)^{1/2} = 2.35\cdot 10^{-11}\ кг/м^3. \qquad (70)$$

6. Поскольку сила тяги КА "Прогресс" сонаправлена с орбитальной скоростью МКС, то ее работа также определяется изменением механической энергии МКС+КА. Значит, для исполнения операций маневрирования M_1 и M_2 работу можно вычислить по формуле (67), с заменой массы МКС на массу МКС+КА **(1 балл)**:

$$A_M = \frac{G(m_{МКС} + m_{КА})\,\mathfrak{M}_\oplus}{2(\mathfrak{R}_\oplus + h_M)^2}\,|\Delta h| = \frac{(m_{МКС} + m_{КА})g_0}{2}\left(\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus + h_M}\right)^2 |\Delta h|. \qquad (71)$$

Силу тяги КА "Прогресс" можно вычислить по формуле (69) с той же заменой масс **(1 балл)**:

$$F_т = \frac{(m_{МКС} + m_{КА})g_0}{2}\,\frac{\bar{v}_M}{V_I}\left(\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus + h}\right)^{3/2}, \quad где\ \bar{v}_M = \frac{\Delta h_M}{\Delta t_M}. \qquad (72)$$

Численные результаты расчетов представлены в табл. 7. **(2 балла)**

Критерии оценивания и баллы

№	Выполненная часть решения задачи	Балл
К.1.	**Определение дат "подъема" орбиты МКС**	**2**
К.2.	**Расчет среднего значения скорости падения орбиты МКС**	**3**
	Определение по графику граничных высот, времени падения + расчет скоростей падения на каждом интервале	1+1
	Расчет среднего арифметического значения скорости падения	1
К.3.	**Расчет приращений скорости МКС**	**5**
	Определены скорости МКС на круговых орбитах	0.5+0.5
	Определены скорости МКС в апогее и перигее переходной орбиты	0.5+0.5
	Приближенное выражение для эксцентриситета	1
	Получены аналитические формулы для приращений скорости	0.5+0.5
	Получены численные результаты для искомых приращений	0.5+0.5
К.4.	**Расчет среднего значения САДС**	**4**
	Определение работы силы F_c через изменение механической энергии	1
	Определение работы силы F_c через скорость и время	1
	Получены для силы сопротивления: аналитическая формула + численный результат	1+1
К.5.	**Оценка средней массовой плотности термосферы**	**2**
	Получена аналитическая формула + численный результат	1+1
К.6.	**Расчет силы тяги и полезной работы КА "Прогресс"**	**4**
	Получена аналитическая формула для работы КА "Прогресс"	1
	Получена аналитическая формула для силы тяги КА "Прогресс"	1
	Определение вспомогательных параметров по графику + численные расчет искомых величин	1+1
	Максимальный балл за задачу	**20**

На решение задач данного этапа Олимпиады участникам отводится 4 часа.

Основные справочные данные

§1. Основные физические и астрономические постоянные

- *Гравитационная постоянная* – $G = 6.674 \cdot 10^{-11}$ м^3· кг$^{-1} \cdot c^{-2}$
- *Скорость света в вакууме* – $c = 2.998 \cdot 10^8$ м/с
- *Универсальная газовая постоянная* – $R = 8.31$ кг·м^2· с$^{-2}$·К$^{-1}$· моль$^{-1}$
- *Постоянная Стефана-Больцмана* – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ кг·с$^{-3}$·К$^{-4}$
- *Масса протона* – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг
- *Масса электрона* – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ кг
- *Астрономическая единица* – 1 а.е. $= 1.496 \cdot 10^{11}$ м
- *Парсек* – 1 пк = 206265 а.е. $= 3.086 \cdot 10^{16}$ м
- *Свеотовой год* – 1 св. г. $= 9.461 \cdot 10^{15}$ м
- *Постоянная Хаббла* – $H = 70.0$ км·с$^{-1}$·Мпк$^{-1}$

§2. Данные о Солнце

- *Радиус* – $6.955 \cdot 10^5$ км
- *Масса* – $1.989 \cdot 10^{30}$ кг
- *Светимость* – $3.827 \cdot 10^{26}$ Вт
- *Спектральный класс* – G2
- *Видимая визуальная звездная величина* – -26.74^m
- *Видимая болометрическая звездная величина* – -26.80^m
- *Абсолютная болометрическая звездная величина* – $+4.83^m$
- *Показатель цвета (B-V)* – $+0.67^m$
- *Эффективная температура* – 5778 К
- *Средний горизонтальный параллакс* – $8.794''$
- *Интегральный поток энергии на расстоянии Земли* – 1360 Вт/м^2
- *Поток энергии в видимых лучах на расстоянии Земли* – 600 Вт/м^2

§3. Данные о Земле

- *Эксцентриситет орбиты* – 0.017
- *Тропический год* – 365.24219 сут
- *Средняя орбитальная скорость* – 29.8 км/с
- *Период вращения* – 23 часа 56 минут 04 секунды
- *Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0* – $23^\circ\, 26'\, 21.45''$
- *Экваториальный радиус* – 6378.14 км
- *Полярный радиус* – 6356.77 км
- *Средний (по объему) радиус* – 6371.01 км
- *Масса* – $5.974 \cdot 10^{24}$ кг
- *Средняя плотность* – 5.52 г·см$^{-3}$
- *Объемный состав атмосферы* – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

§4. Данные о Луне

- *Среднее расстояние от Земли* – 384400 км
- *Минимальное расстояние от Земли* – 363300 км
- *Максимальное расстояние от Земли* – 405500 км
- *Эксцентриситет орбиты* – 0.055

- *Наклон плоскости орбиты к эклиптике* – $5°09'$
- *Сидерический (звездный) период обращения* – 27.321662 сут
- *Синодический период обращения* – 29.530589 сут
- *Радиус* – 1738 км
- *Масса* – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или 1/81.3 массы Земли
- *Средняя плотность* – 3.34 г·см$^{-3}$
- *Визуальное геометрическое альбедо* – 0.12
- *Видимая звездная величина в полнолуние* -12.7^m

§5. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли	г·см$^{-3}$		градусы		
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут†	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час†	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;
† – обратное вращение.

§6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.		градусы		сут
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

§7. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см$^{-3}$	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	−12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685†	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;
† – обратное вращение.

§8. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin\alpha \pm x\,\cos\alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos\alpha \mp x\,\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg}\alpha \pm \frac{x}{\cos^2\alpha};$$

$$(1+x)^n \approx 1 + n\,x;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.