САМАРСКИЙ РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ДЛЯ ОДАРЕННЫХ ДЕТЕЙ

САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ОТКРЫТОЙ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ им. Ф.А. БРЕДИХИНА

СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 7-9 КЛАССОВ.

СЕЗОН: 2024-2025, ТУР № 2

Самара, 2025 г.

Дорогие Друзья!

Вашему вниманию в данном релизе представлены 10 оригинальных задач двух уровней сложности – «Новичок» (уровень А), «Знаток» (уровень В). Задачи составлены в соответствии с ***Перечнем*** *вопросов, рекомендуемых Центральной предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады школьников по астрономии для подготовки обучающихся 7-9 классов к решению задач ее различных этапов.*

При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!

Ссылка: **«Условия и решения конкурсных задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2025 среди обучающихся 7-9 классов. Тур № 2». – https://codsamara.ru/olimpiady-i-konkursy/olimpiada-imeni-f-a-bredihina/**

Составитель: – ***Филиппов Юрий Петрович***, научный руководитель школы, учитель астрономии и методист СРЦОД, к.ф.-м.н.

Верстка в системе LaTeX – Филиппов Ю.П., Белозерская Л.Н.

Памятка участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2025

1. ***Официальный сайт Астрошколы***:
https://codsamara.ru/olimpiady-i-konkursy/olimpiada-imeni-f-a-bredihina/

2. ***Официальная группа в VK***:
vk.com/bredikhinolimp

3. ***Сроки подачи решений задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2025 тура № 2 на проверку***:
15.02.2025-31.03.2025!!!

4. ***Электронный ящик ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2025:***
samrasolimp@mail.ru

5. ***Руководство зарегистрированного участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2025***:

https://codsamara.ru/olimpiady-i-konkursy/olimpiada-imeni-f-a-bredihina/
или
https://vk.com/bredikhinolimp

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Дорогие Друзья!
Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2025, внимательно ознакомьтесь с «Руководством зарегистрированного участника ОМОА им Ф.А. Бредихина-2025»! Электронный адрес последнего указан в Памятке участника.

Уровень «Новичок» (уровень А)

№1. ***«Сокровища весеннего небосвода»***

На рис. 1 представлен фрагмент звездной карты с указанием положений некоторых созвездий, звезд и планет.

Рис. 1. Фрагмент карты звездного неба с указанием некоторых созвездий, звезд, планет. Стрелками указаны направления увеличения экваториальных координат (склонения и прямого восхождения). Внизу фрагмента представлена шкала времени с указанием характерных дат пребывания светил (с определенным значением прямого восхождения) в верхней кульминации (в меридиане) в местную полночь.

1. Созвездиям с какими номерами принадлежат яркие звезды (указанные на рисунке), которые образуют астеризм «Весенний треугольник»? Ответ представьте парами (звезда → номер созвездия). (1 балл за каждую пару)

2. В созвездии с каким номером располагается планета, представленная на рис. 2? (1 балл)

3. Установите соответствие между пронумерованными созвездиями и их названиями. Ответ представьте парами (цифра, буква). (1 балл за пару)

А. Северная корона	Б. Секстант	В. Малый Лев	Г. Дева
Д. Волосы Вероники	Е. Лев	Ж. Гончие Псы	З. Волопас

4. *Метеорным потоком* называется совокупность метеоров, порожденных вторжением в атмосферу Земли роя метеорных тел (метеороидов). Поскольку метеорные рои занимают четко определенные орбиты в космическом пространстве, то, метеорные потоки наблюдаются в строго определенное время года, когда Земля проходит точку пересечения орбит Земли и роя; радианты потоков при этом оказываются в строго определенных точках небосвода. Свои названия метеорные потоки получают, как правило, по названию того созвездия (на латинском языке), в котором расположен его радиант или ближайшая к нему звезда этого созвездия. Ниже приведены названия некоторых созвездий на русском (латинском) языке.

Рис. 2. К определению образа планеты.

А. Северная корона (Corona Borealis)	Б. Лев (Leo)	В. Дева (Virgo)	Г. Гончие Псы (Canes Venatici)
Д. Малый Лев (Leo Minor)	Е. Секстант (Sextans)	Ж. Волосы Вероники (Coma Berenices)	З. Волопас (Bootes)

Определите номер созвездия, в котором располагается радиант метеорного потока Кома Береницидыы? (1 балл)

№2. *«Экваториальные координаты и время кульминаций»*

На рис. 1 представлен фрагмент звездной карты с указанием положений некоторых созвездий, звезд и планет.

1. Созвездия с каким номером располагаются в меридиане в местную полночь дня Победы? (1 балл за созвездие)

2. Точки созвездия с каким номером обладают самыми большими значениями прямого восхождения? (2 балла)

3. Точки созвездия с каким номером обладают минимальными значениями склонения? (2 балла)

4. Какая важная точка эклиптики (не указанная на рисунке) располагается в одном из пронумерованных созвездий? (1 балл)

Важные точки эклиптики			
А. Точка весеннего равноденствия	Б. Точка летнего солнцестояния	В. Точка осеннего равноденствия	Г. Точка зимнего солнцестояния

Укажите номер этого созвездия. (1 балл)

Рис. 3. Луна над Исаакиевским собором и церковью Святой Великомученицы Екатерины, г. Санкт-Петербург (автор фото – Руслан Кондратенко, источник: https://vk.com/wall-59516873_247855).

5. Подберите для выбранной точки эклиптики характерные значения склонения и прямого восхождения. (2 балла за координату)

Склонения некоторых точек эклиптики			
А. 23°26′	Б. −23°26′	В. 00°00′	Г. 10°00′
Прямые восхождения некоторых точек эклиптики			
1. $00^{ч}00^{м}$	2. $06^{ч}00^{м}$	3. $12^{ч}00^{м}$	4. $18^{ч}00^{м}$

№3. *«Луна над Санкт-Петербургом»*

На рис. 3 представлен коллаж фотографий Луны, полученных над Исаакиевским собором и церковью Святой Великомученицы Екатерины (г. Санкт-Петербург). Хронология получения образов Луны во время съемки отвечает росту их порядковых номеров от 1 до 7.

1. Какое явление изображено на данной фотографии? (1 балл)

1. Восход Луны	**2.** Закат Луны	**3.** Невозможно определить

2. В какой стороне горизонта, вероятнее всего, располагалась точка пересечения видимого горизонта и прямой, вдоль которой перемещалась Луна? (1 балл)

1. Север	**2.** Юг	**3.** Запад	**4.** Восток

3. В какой фазе находилась Луна в момент съемки? (1 балл)

1. Новолуние	**2.** Молодой растущий месяц	**3.** Первая четверть	**4.** Растущая выпуклая луна
5. Полнолуние	**6.** Убывающая выпуклая луна	**7.** Последняя четверть	**8.** Убывающий старый месяц

4. Во сколько раз видимое расстояние, которое прошел диск Луны (от положения 1 до положения 7) за время съемки по небосводу, больше его видимого диаметра? Ответ представьте числом, округлив до десятых. (3 балла)

№4. ***«Секреты фотосессии в Санкт-Петербурге»***

На рис. 3 представлен коллаж фотографий Луны, полученных над Исаакиевским собором и церковью Святой Великомученицы Екатерины (г. Санкт-Петербург).

1. Определите угол $\mathcal{D}_2''$, под которым был виден диаметр основания главного купола Исаакиевского собора (указан на рисунке буквой D_2) с позиции автора фотографии в момент съемки. Максимальный угловой диаметр Луны в момент съемки был равен $\mathcal{D}_☾'' = 30.0'$. Ответ представьте в угловых минутах, округлив до десятых. (4 балла)

2. Оцените расстояние r от места съемки до центра купола собора в момент получения фотографии, если диаметр его основания равен $D_2 = 26$ м. Ответ представьте в километрах, округлив до сотых. (3 балла)

3. Оцените промежуток времени между моментами получения 1-го и 7-го образов Луны? Ответ представьте в минутах, округлив до десятых. (3 балла)

Уровень «Знаток» (уровень В)

№5. ***«Внезапный выход из Солнечной системы»***

Как известно, Земля движется вокруг Солнца по почти круговой орбите радиусом 1 а. е., с периодом 365.2564 суток. Предположим, что в некоторый момент у Земли "выключили" гравитационное взаимодействие с другими телами Солнечной системы (что в действительности, конечно, невозможно).

1. Каковы будут характер и траектория движения нашей планеты в этом случае? (2 балла)

2. Чему будет равна скорость планеты в момент "выключения"? (1 балл)

3. Сколько времени (от момента "выключения") потребуется Земле, чтобы пересечь орбиту а) Марса? б) Юпитера? в) Сатурна? г) Урана? д) Нептуна? е) покинуть Солнечную систему, если ее гравитационная граница располагается от Солнца на расстоянии 120 тыс. а. е.? (8 баллов)

Орбиты планет считать круговыми, расположенными в одной плоскости; границу Солнечной системы следует представить сферой с центром, совпадающим с центром Солнца.

№6. ***«Экстремумы скорости изменения фазы Луны»***

Определите в какие фазы Луны величина скорости изменения ее линейной фазы принимает: 1) минимальное 2) максимальное значения? Спустя какое время (в сутках) после последнего новолуния наступают соответствующие моменты? Орбиту Луны считайте круговой. (12 баллов)

№7. ***«Самые быстрые и самые медленные метеоры»***

Как известно, метеороиды, входящие в плотные слои атмосферы, порождают явление метеора (или даже болида). Вычислите минимальное и максимальное значения скорости вхождения метеороида в атмосферу классической планеты (7 баллов), в предположении, что последний приходит с окраин Солнечной системы и всевозможные ориентации его орбиты равновероятны. Определите:

1. С поверхности какой классической планеты можно наблюдать самые быстрые метеоры в Солнечной системе? (1 балл)

2. В какое время суток лучше всего "охотиться" с поверхности этой планеты за быстрыми метеорами? (1 балл)

3. С поверхности какой классической планеты можно наблюдать самые медленные метеоры в Солнечной системе? (1 балл)

4. В какое время суток лучше всего "охотиться" с поверхности этой планеты за медленными метеорами? (1 балл)

5. В какое время года на Самарскую область падает наибольшее количество метеоров? Какой цвет будут преимущественно иметь "быстрые" и "медленные" метеоры? (3 балла)

№8. ***«Взгляд на Венеру с Меркурия»***

Определите интервал допустимых значений для видимой звездной величины Венеры в противостоянии, для будущего покорителя Меркурия. Каковы будут при этом угловые размеры Венеры? Сможет ли покоритель (с нормальным зрением) ее увидеть как неточечный объект? Орбиту Венеры и Земли считать круговыми. Разрешающую способность и проницающую силу человеческого глаза принять равными $1'$ и $+6^{\mathrm{m}}$ соответственно. (14 баллов)

№9. ***«О классической планете замолвлено слово...»***

В архивных записях XIX столетия одного известного астронома были обнаружены следующие строки: «...уже более чем 5 последних лет регулярно провожу наблюдения этой планеты в моменты, когда последняя располагается на прямой "Солнце-Земля". Отношение угловых скоростей видимого движения этой планеты относительно звезд в этих положениях регулярно оказывается равным 1.735...» Полагая, что орбиты всех классических планет являются круговыми и лежащими в одной плоскости, определите:

1. О какой именно классической планете идет речь? (7 баллов)

2. Как часто такая планета располагается на прямой "Солнце-Земля"? Какое максимальное количество таких конфигураций этой планеты мог наблюдать астроном за прошедшие 5 лет? (2 балла)

3. Чему равно отношение (большее 1) относительных линейных скоростей этой планеты в этих конфигурациях? (2 балла)

4. Чему равно отношение (большее 1) относительных ускорений той же

планеты в этих конфигурациях? (2 балла)

5. Чему был равен планетный индекс для этой планеты в законе Тициуса-Боде? (1 балл)

№10. ***«Гипотеза Planet Nine и ее видимая звездная величина»***

В январе 2016 года американскими астрофизиками Брауном М.Е. и Ботыгиным К. была сформулирована гипотеза о существовании на окраинах Солнечной системы еще одной планеты, получившей название Planet Nine (Планета 9). Согласно последним оценкам специалистов, масса этой планеты заключена в интервале $(4.8 \div 8.6) \cdot \mathfrak{M}_\oplus$ (здесь и далее $\mathfrak{M}_\oplus, \mathfrak{R}_\oplus$ – масса и радиус Земли соответственно). Радиус планеты должен удовлетворять уравнению вида:

$$\mathfrak{R}_{P9} = \mathfrak{R}_\oplus \left(\frac{\mathfrak{M}_{P9}}{3\mathfrak{M}_\oplus} \right), \tag{1}$$

где $\mathfrak{M}_{P9}, \mathfrak{R}_{P9}$ – масса и радиус гипотетической планеты. Сферическое альбедо (A_{P9}) планеты, ее гелиоцентрическое расстояние (r_{P9}) должны удовлетворять системе неравенств вида:

$$0.2 \leq A_{P9} \leq 0.75, \;\; 340^{+80}_{-70} \text{ а.е.} \leq r_{P9} \leq 560^{+260}_{-140} \text{ а.е.}. \tag{2}$$

Опираясь на данные результаты, оцените интервал возможных значений для видимой звездной величины планеты. (12 баллов) Определите минимальный диаметр зеркала телескопа, необходимого для визуального поиска и обнаружения гипотетической планеты. (3 балла)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Уровень «Новичок» (уровень А)

№1. *«Сокровища весеннего небосвода»*

1. Астеризм "Весенний треугольник" образуют следующие звезды: Арктур (α Волопаса), Спика (α Девы), Денебола (β Льва). С использованием рис. 1, получаем следующие пары: (Арктур, $\boxed{1}$), (Денебола, $\boxed{5}$), (Спика, $\boxed{6}$). (3 балла)

2. На рис. 2 представлена планета Юпитер. Согласно рис. 1, эта планета расположена в созвездии $\boxed{5}$. (1 балл)

3. Созвездием под номером $\boxed{1}$ является Волопас, на это указывает его характерный астеризм по форме, напоминающий «парашют» или «богатырскую палицу». Под номером $\boxed{2}$ представлено созвездие Гончих Псов, бедное на яркие звезды. Под номером $\boxed{3}$ представлено созвездие Малого Льва, его выдает астеризм в виде почти равнобедренного треугольника с тупым углом. К западу от Волопаса, под номером $\boxed{4}$ представлено созвездие Волосы Вероники. Под номером $\boxed{5}$ представлено зодиакальное созвездие Льва. Его выдает характерный астеризм в виде шестиугольника, напоминающий в чем-то «электрический утюг». Под номером $\boxed{6}$ представлено зодиакальное созвездие Девы. На это указывает характерный астеризм в виде тела человека с разбросанными руками и ногами. Наконец, к западу от Девы расположено созвездие Секстанта $\boxed{7}$, не имеющее ярких звезд и запоминающихся астеризмов. Таким образом, имеем следующие пары (1, З), (2,Ж), (3,В), (4,Д), (5,Е), (6,Г), (7,Б). (7 баллов)

4. Очевидно, название метеорного потока Кома Беренициды, происходит от названия созвездия Волосы Вероники на латинском языке – Coma Berenices. Значит, радиант метеорного потока должен быть расположен в пределах границ указанного созвездия. Последнее на рис. 1 представлено под номером $\boxed{4}$. (1 балл)

№2. *«Экваториальные координаты и время кульминаций»*

1. Как известно, день Победы наша страна отмечает 09.05. Если через данную дату на шкале дат провести прямую, параллельную вертикальным границам рисунка, то она будет приблизительно имитировать положение небесного меридиана. Нетрудно видеть, что меридиан в эти сутки в полночь пересекает созвездия $\boxed{1}$ и $\boxed{6}$. (2 балла)

2. На рис. 1 стрелкой указано направление возрастания прямого восхождения светила. Значит, самыми большими значениями прямого восхождения светила обладают точки созвездия, наиболее близкие по положению к левой границе рисунка, т. е. созвездия $\boxed{1}$. (2 балла)

3. На рис. 1 стрелкой указано направление возрастания склонения светила. Значит, самыми малыми значениями склонения светила обладают точки

созвездия, наиболее близкие по положению к нижней границе рисунка, т. е. точки созвездия $\boxed{6}$. (2 балла)

4. На данном рисунке представлены два зодиакальных созвездия: Лев и Дева. В последнем (под номером $\boxed{6}$), как известно, располагается *точка осеннего равноденствия*. (1+1 балл)

5. Точка осеннего равноденствия обладает следующими координатами: склонение – $-23°26'$; прямое восхождение – $18^{\text{Ч}}00^{\text{М}}$. Т. о., имеем пару (б,4). (4 балла)

№ 3. *«Луна над Санкт-Петербургом»*

1. Из рис. 3 очевидно, что с течением времени (при переходе от кадра 1 к кадру 7) высота Луны возрастает, значит здесь запечатлен восход Луны. (1 балл)

2. Точка пересечения видимого горизонта и прямой, вдоль которой перемещалась Луна, расположена, очевидно, на востоке, поскольку все естественные небесные тела на земном небосводе восходят на восточной стороне горизонта. (1 балл)

3. На представленной картинке видимый диск Луны полностью освещен Солнцем, значит Луна видна в фазе полнолуния (5). (1 балл)

4. С использованием линейки, определяем линейное расстояние ($L_{1-7} = 227$ мм, здесь и далее Ваши значения могут отличаться от авторских, при использовании фотографии с иными размерами) между центрами дисков Луны 1 и 7. Измеряем также максимальный (горизонтальный) диаметр Луны $D_☾ = 34.5$ мм. Искомое отношение равно

$$\eta = \frac{L_{1-7}}{D_☾} = 6.6.$$

В качестве ответа к задаче принимается значение из интервала: $[6.2, 7.0]$. (3 балла)

№4. *«Секреты фотосессии в Санкт-Петербурге»*

1. Определим с помощью линейки диаметры Луны ($D_☾ = 34.5$ мм, здесь и далее Ваши значения могут отличаться от авторских, при использовании фотографии с иными размерами) и основания купола ($D_k = 27$ мм) на фотографии. Поскольку угловой масштаб фотографии одинаков, по крайней мере, в центральной части ее поля, то отношение линейных размеров объектов кадра должно быть равно отношению их угловых размеров:

$$\frac{\mathcal{D}''_k}{\mathcal{D}''_☾} = \frac{D_k}{D_☾}, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}''_k = \mathcal{D}''_☾ \frac{D_k}{D_☾} = 23.5'.$$

В качестве ответа на данный вопрос задачи принимаются значения из интервала – $[20.5', 26.5']$. (4 балла)

2. Поскольку угловой диаметр купола является малым углом, то искомую величину можно вычислить по формуле:

$$r = \frac{D \cdot 3438'}{\mathcal{D}''_k} = 3.80 \text{ км},$$

здесь множитель $3438'$ – коэффициент перевода радианной меры угла в минутную. В качестве ответа на данный вопрос задачи принимаются значения из интервала – $[3.30, 4.40]$ км. (3 балла)

3. Согласно пункту 4 задачи №3 угловое расстояние, пройденное Луной между положениями 1 и 7 равно $\ell = 6.6 \cdot \mathcal{D}_☾ = 198' = 3.3°$. Перемещение Луны между положениями 1-7, главным образом, обусловлено суточным вращением Земли, угловая скорость которого равна $\omega_\oplus = 15''/\text{с}$. С учетом склонения Луны, данную скорость можно определить в виде: $\omega_{\text{vis}} = \omega_\oplus \cdot \cos\delta_☾$. (1 балл) Поскольку склонение Луны принадлежит интервалу:

$$-28°35' \le \delta_☾ \le +28°35'.$$

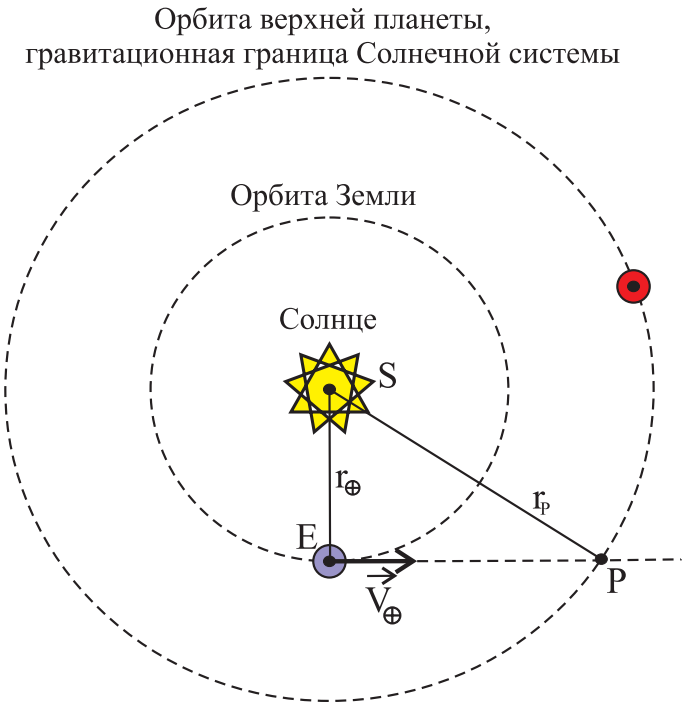


Рис. 4. К определению траектории движения Земли.

Значит искомый промежуток времени должен быть заключен в интервале:

$$\frac{\ell}{\omega_\oplus} \le \tau_☾ \le +\frac{\ell}{\omega_\oplus \cos\delta_☾^{(\max)}}, \quad \text{или} \quad 13.2 \text{ мин} \le \tau_☾ \le 15.0 \text{ мин}.$$

В качестве ответа принимаются значения из интервалов: нижняя граница интервала: $[12.4, 14.0]$ мин, верхняя граница интервала: $[14.1, 15.9]$ мин. (2 балла)

Уровень «Знаток» (уровень В)

№5. «Внезапный выход из Солнечной системы»

1. Если в некоторый момент у Земли "выключили" гравитационное взаимодействие с другими телами Солнечной системы, следовательно результирующая сила, действующая на Землю, будет равна нулю. Согласно первому закону Ньютона, такое тело должно двигаться равномерно и прямолинейно. Т. о., *характер движения* – равномерное движение. *Траектория движения* – прямая линия. (1+1 балл)

Параметр	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Граница Сол. системы
a_P, а.е.	1.52	5.20	9.54	19.19	30.06	120000
Δt, лет	0.182	0.812	1.520	3.050	4.782	19099

Таблица 1. Радиусы орбит внешних планет, радиус гравитационной границы Солнечной системы и искомые времена движения Земли.

2. Направление движения планеты будет определяться направлением вектора скорости в момент "выключения" взаимодействия. Вектор скорости планеты, движущейся прежде по окружности, будет направлен по касательной к этой окружности в момент "выключения"(см. рис. 4). При этом ее величина равна (1 балл)

$$V_\oplus = \frac{2\,\pi\,r_\oplus}{T_\oplus} = 29.79\,\text{км/с}. \tag{3}$$

3. Чтобы Земля пересекла орбиту верхней планеты (или гравитационную границу Солнечной системы) необходимо, чтобы Земля прошла по прямой отрезок EP (см. рис. 4). Его величину можно определить с использованием теоремы Пифагора (1 балл):

$$\Delta = EP = \sqrt{r_P^2 - r_\oplus^2}.$$

Тогда время (от момента "выключения"), которое потребуется Земле, чтобы пересечь орбиту верхней планеты (или гравитационную границу Солнечной системы) есть (1 балл)

$$t = \frac{\Delta}{V_\oplus} = T_\oplus \left(\frac{\sqrt{r_P^2 - r_\oplus^2}}{2\,\pi\,r_\oplus} \right). \tag{4}$$

Выполним численный расчет искомой величины в случае а)-е). Численные результаты расчетов представлены в табл. 1. (6 баллов)

№6. «Экстремумы скорости изменения фазы Луны»

1. Согласно определению, *линейной фазой шарообразного тела* называется отношение освещенной Солнцем части ($d_{\text{осв}}$) диаметра видимого диска этого тела к величине всего диаметра ($D_{\text{д}}$) этого диска (1 балл):

$$\Phi = \frac{d_{\text{осв}}}{D_{\text{д}}}. \tag{5}$$

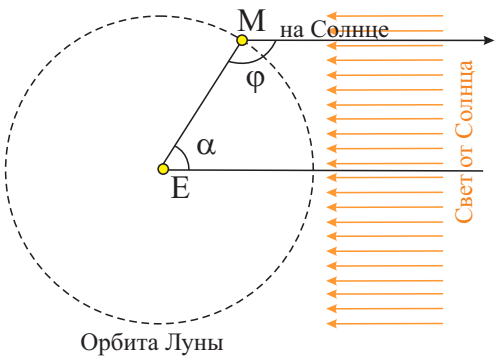


Рис. 5. К определению взаимного расположения Солнца, Земли и Луны.

Можно строго показать, что фазу можно определить через фазовый угол φ (см. рис. 5), посредством формулы (1 балл):

$$\Phi = \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi). \tag{6}$$

2. ***Фазовым углом*** небесного тела, называется угол между лучами, испущенными из центра данного тела на источник света (Солнце) и на его приемник (Землю). Согласно рис. 5, фазовый угол Луны можно выразить через угол α ее элонгации относительно Солнца: $\varphi = \pi - \alpha$ (1 балл). Орбита Луны есть окружность, тогда угол $\alpha = \omega_☾\, t$, где $\omega_☾ = 2\pi/S_☾$ – угловая скорость Луны, определяемая относительно прямой "Солнце-Земля"($S_☾$ – синодический месяц Луны); t – время, прошедшее от новолуния. Следовательно, фазу можно записать так (1 балл)

$$\Phi = \frac{1}{2}(1 - \cos\,\omega_☾\, t).$$

3. Вычислим скорость изменения фазы Луны (2 балла):

$$V_\Phi = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Phi(t+\Delta\, t)-\Phi(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2\Delta t}(\cos\omega_☾\, t - \cos\omega_☾\,(t +$$

$$+\Delta t)) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2\,\Delta t}(\cos\,\omega_☾\, t(1-\cos\,\omega_☾\,\Delta\, t) + \sin\omega_☾\, t\,\sin\,\omega_☾\,\Delta t) =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2\,\Delta t}\left(\left(\frac{\omega_☾\,\Delta\, t}{2}\right)^2\cos\,\omega_☾\, t + (\omega_☾\,\Delta t)\sin\omega_☾\, t\right) = \frac{\omega_☾}{2}\sin\omega_☾\, t = \frac{\omega_☾}{2}\sin\alpha.$$

В итоге, модуль скорости изменения фазы представляется в виде (2 балла):

$$|V_\Phi| = \frac{\omega_☾}{2}|\sin\alpha|. \tag{7}$$

Из последнего результата следует, что

- величина скорости изменения фазы Луны достигает максимального значения при угле элонгации $\alpha_1 = 90°$ и $\alpha_2 = 270°$, что соответствует фазам первой и последней четверти. Данные фазы наступают в моменты $t_1 = S_☾/4 = 7.4$ сут и $t_2 = 3\,S_☾/4 = 22.1$ сут после новолуния (1+1 балл);
- величина скорости изменения фазы Луны достигает минимального значения при значениях $\alpha = 0°$ и $\alpha_4 = 180°$, что соответствует фазе новолуния и полнолуния соответственно. Данные фазы наступают в моменты $t_3 = 0.0$ сут и $t_4 = S_☾/2 = 14.8$ сут после новолуния. (1+1 балл)

№7. «Самые быстрые и самые медленные метеоры»

1. Если метеороид приходит с окраин Солнечной системы, где находится его афелий, то его скорость относительно Солнца в данной точке близка к нулю. При этом, в силу большой удаленности данного тела от Солнца и классической планеты (КП), их потенциальные энергии гравитационного взаимодействия пренебрежимо малы. Следовательно, полная механическая энергия метеороида в афелии была равна нулю. (1 балл) Запишем закон сохранения

полной механической энергии для метеороида в точках афелия и перигелия (у поверхности планеты) его орбиты, в гравитационном поле Солнца и КП (1 балл):

$$\frac{m\,V_m^2}{2} - \frac{G\,m\,\mathfrak{M}_\odot}{r_p} - \frac{G\,m\,\mathfrak{M}_p}{\mathfrak{R}_p} = 0, \;\Rightarrow\; V_m = \sqrt{2\,G\left(\frac{\mathfrak{M}_\odot}{r_p} + \frac{\mathfrak{M}_p}{\mathfrak{R}_p}\right)}, \qquad (8)$$

здесь $\mathfrak{M}_\odot, \mathfrak{M}_p, m$ – массы Солнца, КП и метеороида соответственно; $G = 6.674 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – универсальная гравитационная постоянная; r_p – текущее гелиоцентрическое расстояние КП; $\mathfrak{R}_p$ – средний радиус КП; V_m – гелиоцентрическая скорость метеороида у поверхности КП. По сути, это его вторая космическая скорость относительно двух центров гравитационного притяжения – Солнца и КП. Скорость метеороида относительно КП будет определяться выражением (1 балл):

$$\vec{V}_{\text{отн}} = \vec{V}_m - \vec{V}_p, \;\Rightarrow\; V_{\text{отн}} = \sqrt{V_m^2 + V_p^2 - 2V_mV_p\cos\alpha}, \qquad (9)$$

здесь α – угол между векторами $\vec{V}_m$ и $\vec{V}_p$; $\vec{V}_p$ – вектор гелицентрической скорости КП, модуль которой определяется следующим интервалом возможных значений (2 балла):

$$V_p^{(\min)} \le V_p \le V_p^{(\max)}, \;\text{ где} \qquad (10)$$

$$V_p^{(\min)} = \sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{a_p}\frac{1-\varepsilon_p}{1+\varepsilon_p}}, \;\; V_p^{(\max)} = \sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{a_p}\frac{1+\varepsilon_p}{1-\varepsilon_p}},$$

здесь $V_p^{(\min)}, V_p^{(\max)}$ – гелиоцентрические скорости КП в афелии и перигелии своей орбиты; ε_p – эксцентриситет эллиптической орбиты КП.

2.а) Из (9) следует, что $\vec{V}_{\text{отн}}$ будет принимать максимальное значение в случае, когда векторы $\vec{V}_m$ и $\vec{V}_p$ противоположно направлены ($\alpha = \pi$), т. е. КП и метеороид движутся навстречу друг другу, при этом сама планета располагается в своем перигелии (1 балл):

$$V_{\text{отн}}^{(\max)} = V_m^{(\max)} + V_p^{(\max)} = \sqrt{2\,G\left(\frac{\mathfrak{M}_\odot}{a_p(1-\varepsilon_p)} + \frac{\mathfrak{M}_p}{\mathfrak{R}_p}\right)} + \sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{a_p}\frac{1+\varepsilon_p}{1-\varepsilon_p}}. \qquad (11)$$

2.б) $\vec{V}_{\text{отн}}$ будет принимать минимальное значение в случае, когда векторы $\vec{V}_m$ и $\vec{V}_p$ сонаправлены ($\alpha = 0$), т. е. метеороид догоняет КП, при этом последняя вновь находится в своем перигелии (1 балл):

$$V_{\text{отн}}^{(\min)} = V_m^{(max)} - V_p^{(\max)} = \sqrt{2\,G\left(\frac{\mathfrak{M}_\odot}{a_p(1-\varepsilon_p)} + \frac{\mathfrak{M}_p}{\mathfrak{R}_p}\right)} - \sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{a_p}\frac{1+\varepsilon_p}{1-\varepsilon_p}}. \qquad (12)$$

№	Планета	$\bar{R}_p$, км	$V_m^{(\min)}$, км/с	$V_m^{(\max)}$, км/с	$V_p^{(\min)}$, км/с	$V_p^{(\max)}$, км/с	$V_{\text{отн}}^{(\min)}$, км/с	$V_{\text{отн}}^{(\max)}$, км/с
1	Меркурий	2439.7	61.813	76.087	38.865	58.982	17.105	135.069
2	Венера	6051.8	50.441	50.771	34.788	35.264	15.507	**86.035**
3	Земля	6371.0	43.252	43.932	29.295	30.290	13.642	74.222
4	Марс	3389.5	33.023	36.194	21.975	26.502	**9.692**	62.697
5	Юпитер	69911	62.858	63.120	12.443	13.706	49.414	76.827
6	Сатурн	58232	38.462	38.733	9.119	10.201	28.531	48.934
7	Уран	25362	23.354	23.534	6.493	7.121	16.415	30.657
8	Нептун	24622	24.771	24.794	5.381	5.486	19.308	30.280

Примечание: $\bar{R}_p$ – средний (по объему) радиус классической планеты.

Таблица 2. Численные значения искомых параметров задачи.

3. Выполним численный анализ результатов (11) и (12) для 8 классических планет Солнечной системы, представленных в табл. 2. Из таблицы видно, что наибольшего значения относительная скорость достигает в случае Меркурия. Однако у последнего отсутствует атмосфера, и потому в окрестности этой планеты невозможно наблюдать в принципе явления метеора (по этой причине эта планета-исключение выделена серым цветом). Поэтому "пальма первенства" автоматически переходит *Венере*. (1 балл) Здесь максимальная скорость вхождения в атмосферу составляет чуть более 86 км/с. Из той же таблицы следует, что с поверхности *Марса* можно наблюдать самые медленные метеоры в Солнечной системе. (1 балл) Здесь скорость вхождения метеороидов в атмосферу планеты опускается до значения чуть менее 9.7 км/с.

4. С поверхности Венеры лучше всего "охотиться" за быстрыми метеорами в то время суток, в которые отвесная линия наблюдателя составляет наименьший угол с вектором гелиоцентрической скорости метеороида, т. е. в режиме "движение встречными курсами". Такое возможно, когда планета ориентирована своим полушарием (на котором находится наблюдатель) по ходу движения вокруг Солнца, т. е. *вечером* (после заката Солнца и до полуночи), поскольку эта планета имеет обратное осевое вращение в сравнение с другими планетами. (1 балл) Единственное, что заставляет сомневаться, так это сама атмосфера Венеры: из-за ее высокой плотности и, как следствие, сильного рассеяния света, свет от неяркой вспышки может просто не достичь гипотетического наблюдателя на ее поверхности.

5. С поверхности Марса лучше всего "охотиться" за медленными метеорами *вечером* (после заката Солнца и до полуночи), наблюдая преимущественно западную часть небосвода. (1 балл)

6. Метеороиды при входе в атмосферу Земли испытывают ее интенсивное сопротивление, что сопровождается его нагревом до высоких температур, процессами плавления и горения. Тепловой поток, передаваемый метеороиду, пропорционален $V_{\text{отн}}^3$. Следовательно, метеороиды при высоких температурах должны излучать как абсолютно черные тела. При этом, чем выше скорость $V_{\text{отн}}$, тем ближе его цвет к сине-фиолетовой части диапазона световых волн. И наоборот, чем меньше скорость – тем цвет метеора ближе к оранжево-красной

части диапазона. Поэтому самые "быстрые" метеоры должны иметь преимущественно бело-голубые, синеватые оттенки (1 балл), а самые медленные – оранжево-красные оттенки. (1 балл)

7. Поток метеороидов, падающих на территорию Самарской области можно записать так:

$$\Phi = (\vec{j}\,\vec{k})\,S_S = j_n\,S_S = n_m\,(V_{\text{отн}})_k\,S_S, \tag{13}$$

здесь $\vec{k}$ – единичная нормаль к поверхности Земли в данном месте, n_m – объемная концентрация метеороидов в окрестности Земли, $(V_{\text{отн}})_k$ – проекция вектора $\vec{V}_{\text{отн}}$ на нормаль $\vec{k}$; S_S – площадь Самарской области. Очевидно, полный поток максимален, когда

1) $V_{\text{отн}}$ достигает максимального значения, что реализуется в случае, когда $\vec{V}_m$ и $\vec{V}_p$ противоположно направлены, т. е. в случае метеороидов, движущихся навстречу Земле.

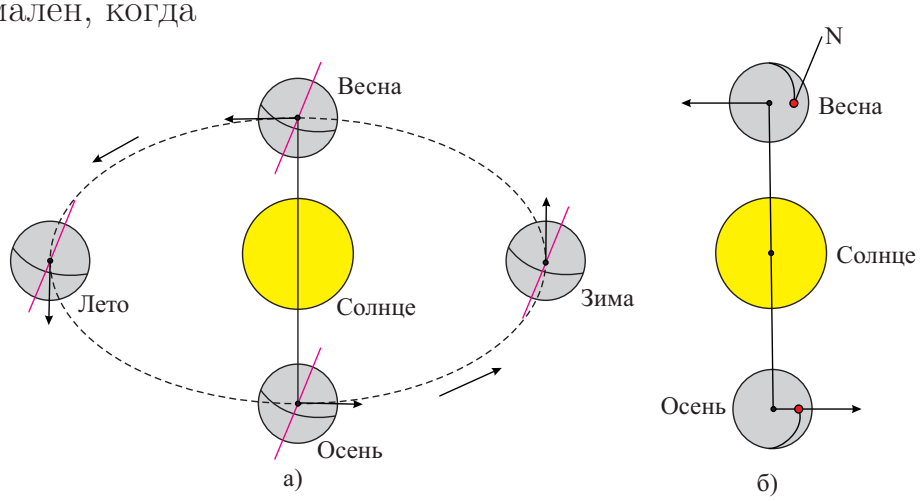


Рис. 6. К определению движения Земли и положения ее северного полюса.

2) проекция $(v_{\text{rel}})_k$ максимальна. Это достигается в случае, когда Самарская область будет ориентирована по направлению орбитального движения Земли, т. е. *утром* (см. рис. 6.а). В этом случае угол α между векторами $\vec{v}_{\text{rel}}$ и $\vec{k}$ будет минимальным, а его косинус будет максимальным.

Заметим, что минимальный угол $\alpha_{\min}$ между $\vec{k}$ и $\vec{v}_{\text{rel}}$ в течение года не постоянен: он будет минимален, когда Земля ориентирована северным географическим полюсом на направление движения (см. рис. 6.б), что достигается осенью, вблизи осеннего равноденствия. (1 балл)

№8. «Взгляд на Венеру с Меркурия»

1. Освещенность ($E_\odot$), создаваемая Солнцем у поверхности Венеры (1 балл):

$$E_\odot = \frac{L_\odot}{4\,\pi\,r_V^2},$$

здесь $L_\odot$ – светимость Солнца, r_V – гелиоцентрическое расстояние Венеры. Поток солнечного излучения, падающего на Венеру (радиус которой равен $\mathfrak{R}_V$), равен (1 балл)

$$\Phi_0 = E_\odot\,\pi\,\mathfrak{R}_V^2 = \frac{1}{4}L_\odot\left(\frac{\mathfrak{R}_V}{r_V}\right)^2.$$

Доля $p_V \cdot F_V$ (здесь p_V – геометрическое альбедо Венеры, $F_V = 1$ – фаза Венеры в противостоянии для будущего покорителя Меркурия) от потока Φ_0 отражается от поверхности планеты и рассеивается в направлении "к Солнцу".

При этом освещенность (E_V), создаваемая Венерой у поверхности Меркурия, есть (2 балла)

$$E_V^{(M)} = \frac{\Phi_0}{4\pi\,\Delta_{V-M}^2} p_V\, F_V = \frac{p_V}{16\,\pi}\frac{L_\odot}{\Delta_{V-M}^2}\left(\frac{\mathfrak{R}_V}{r_V}\right)^2, \tag{14}$$

здесь $\Delta_{V-M} = a_V - r_M$ – расстояние между Венерой и Меркурием, a_V – радиус орбиты Венеры, r_M – гелиоцентрическое расстояние Меркурия; учтено также, что Венера есть шар, который высвечивает свет изотропно в сферу с телесным углом 4π. По аналогии запишем освещенность, создаваемую Венерой у поверхности Земли, в наибольшей элонгации (1 балл):

$$E_V^{(E)} = \frac{\Phi_0}{4\pi\,\Delta_{V-E}^2} p_V\, F_V^{(E)} = \frac{p_V}{32\pi}\frac{L_\odot}{\Delta_{V-E}^2}\left(\frac{\mathfrak{R}_V}{r_V}\right)^2, \tag{15}$$

при записи последнего выражения мы учли, что в наибольшей элонгации фазовый угол Венеры равен $\varphi_V = 90°$, следовательно, фаза планеты для земного наблюдателя, согласно известной формуле $F_V^{(E)} = (1+\cos\varphi_V)/2 = 0.5$. Расстояние между Землей и Венерой, в случае их круговых орбит, при этом определяется теоремой Пифагора (1 балл):

$$\Delta_{V-E} = \sqrt{a_\oplus^2 - a_V^2},$$

здесь $a_\oplus$ – радиус земной орбиты. Найдем отношение освещенностей $E_V^{(M)}/E_V^{(M)}$ (1 балл):

$$\frac{E_V^{(M)}}{E_V^{(E)}} = 2\frac{a_\oplus^2 - a_V^2}{(a_V - r_M)^2}.$$

2. Определим далее минимальное и максимальное значения отношения освещенностей (1+1 балл):

$$\left(\frac{E_V^{(M)}}{E_V^{(E)}}\right)_{\min} = 2\frac{a_\oplus^2 - a_V^2}{(a_V - a_M(1-\varepsilon_M))^2}, \quad \left(\frac{E_V^{(M)}}{E_V^{(E)}}\right)_{\max} = 2\frac{a_\oplus^2 - a_V^2}{(a_V - a_M(1+\varepsilon_M))^2},$$

где мы учли, что

$$r_M^{(\min)} = a_M(1-\varepsilon_M), \quad r_M^{(\max)} = a_M(1+\varepsilon_M).$$

Здесь a_M, ε_M – большая полуось и эксцентриситет Меркурия. Далее воспользуемся формулой Погсона и учтем, что звездная величина Венеры в наибольшей элонгации равна $m_V^{(E)} = -4.4^{\mathrm{m}}$ (смотри справочные данные).

$$m_V^{(M)}\Big|_{\min} = m_V^{(E)} - 2.5\lg\left(\frac{E_V^{(M)}}{E_V^{(E)}}\right)_{\min} = -6.3^{\mathrm{m}}, \tag{16}$$

$$m_V^{(M)}\Big|_{\max} = m_V^{(E)} - 2.5\lg\left(\frac{E_V^{(M)}}{E_V^{(E)}}\right)_{\max} = -7.3^{\mathrm{m}}. \tag{17}$$

Т. о., видимая звездная величина Венеры для будущего покорителя Меркурия представляется интервалом $(-7.3^{\mathrm{m}}, -6.3^{\mathrm{m}})$. (1+1 балл)

3. Угловой диаметр Венеры для соответствующих положений Меркурия на орбите можно представить в виде (1+1 балл):

$$D''_{\min} \approx 2\left(\frac{\mathfrak{R}_V}{\Delta^{(\max)}_{V-M}}\right)\cdot 206265'' = \left(\frac{2\,\mathfrak{R}_V}{(a_V - a_M(1-\varepsilon_M))}\right)\cdot 206265'' = 40'', \quad (18)$$

$$D''_{\max} \approx 2\left(\frac{\mathfrak{R}_V}{\Delta^{(\min)}_{V-M}}\right)\cdot 206265'' = \left(\frac{2\,\mathfrak{R}_V}{(a_V - a_M(1+\varepsilon_M))}\right)\cdot 206265'' = 65''. \quad (19)$$

Т. о., покоритель (с нормальным зрением) сможет увидеть Венеру в противостоянии как неточечный объект, лишь те моменты, когда Меркурий пребывает в малой окрестности афелия своей орбиты. (1 балл)

№9. «О классической планете замолвлено слово...»

1. Очевидно, астроном наблюдал явление сизигии, с участием Солнца, Земли и искомой планеты. При этом, если планета была нижняя, то он наблюдал ее, очевидно, в нижнем и верхнем соединениях. Если же планета была верхняя, то он наблюдал планету в соединениях и противостояниях.

Далее рассмотрим подробнее случай нижней планеты. Линейная скорость планеты относительно Земли есть $\vec{V}_{\text{отн}} = \vec{V}_p - \vec{V}_\oplus$. Если планета находилась в нижнем соединении, то планета и Земля двигались сонаправлено, значит модуль относительной скорости будет $V_{\text{отн}} = V_p - V_\oplus$. При этом, в случае сизигии, планета движется относительно Земли перпендикулярно лучу зрения. Значит, движение данной планеты относительно Земли в данной конфигурации можно рассматривать как движение по окружности, радиус которой равен $a_\oplus - a_p$. Тогда угловую скорость видимого движения планеты относительно звезд можно представить в виде (1 балл):

$$\omega_{\text{н.с.}} = \frac{V_p - V_\oplus}{a_\oplus - a_p} = \frac{\sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{a_p}} - \sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{a_\oplus}}}{a_\oplus - a_p} = \frac{\sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{a_\oplus}}}{a_\oplus}\left(\frac{\sqrt{\frac{a_\oplus}{a_p}} - 1}{1 - \frac{a_p}{a_\oplus}}\right) = \omega_\oplus \frac{\sqrt{x} - 1}{1 - \frac{1}{x}}, \Rightarrow$$

$$\omega_{\text{н.с.}} = \omega_\oplus \frac{x}{\sqrt{x} + 1}, \quad \text{где} \quad \omega_\oplus = \sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{a_\oplus^3}}, \quad x = \frac{a_\oplus}{a_p} > 1, \quad (20)$$

здесь $\omega_\oplus$ – гелиоцентрическая угловая скорость орбитального движения Земли.

2. Рассуждая в случае верхнего соединения планеты (здесь векторы гелиоцентрических скоростей планет противоположны друг другу, а расстояние между планетами равно сумме радиусов их орбит) аналогичным образом, в результате получаем формулу (1 балл):

$$\omega_{\text{в.с.}} = \frac{V_p + V_\oplus}{a_p + a_\oplus} = \frac{\sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{a_p}} + \sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{a_\oplus}}}{a_\oplus + a_p} = \omega_\oplus\left(\frac{\sqrt{\frac{a_\oplus}{a_p}} + 1}{1 + \frac{a_p}{a_\oplus}}\right) = \omega_\oplus \frac{\sqrt{x} + 1}{1 + \frac{1}{x}}, \Rightarrow$$

$$\omega_{\text{в.с.}} = \omega_{\oplus}\frac{x(\sqrt{x}+1)}{x+1}. \tag{21}$$

3. Ситуация для верхней планеты в случае противостояния, аналогична ситуации для нижней планеты в случае нижнего соединения, а в конфигурации соединения – аналогична ситуации в случае верхнего соединения нижней планеты. Запишем по аналогии угловые скорости видимого движения верхней планеты в противостоянии и соединении с Солнцем (1 балл):

$$\omega_{\text{п}} = \omega_{\oplus}\frac{x}{\sqrt{x}+1}, \quad \omega_{\text{с.}} = \omega_{\oplus}\frac{x(\sqrt{x}+1)}{x+1}, \quad \text{здесь } x < 1. \tag{22}$$

Определим величину η (1 балл):

$$\eta = \frac{\omega_{\text{в.с.}}}{\omega_{\text{н.с.}}} = \frac{\omega_{\text{с.}}}{\omega_{\text{п.}}} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x+1} > 1, \tag{23}$$

значит, согласно условию задачи, именно эта величина равна 1.735. В итоге имеем квадратное уравнение по переменной $\sqrt{x}$ вида:

$$(\eta-1)x - 2\sqrt{x} + (\eta-1) = 0. \tag{24}$$

Данное уравнение имеет следующее аналитическое и численное решение (1 балл):

$$x = \left(\frac{1 \pm \sqrt{\eta(2-\eta)}}{\eta-1}\right)^2, \quad x^{(+)} = 5.212, \quad x^{(-)} = 0.192. \tag{25}$$

Откуда следует два значения радиуса орбиты искомой планеты (1 балл):

$$a_p^{(+)} = \frac{a_{\oplus}}{x^{(+)}} = 0.192 \text{ а. е.}, \quad a_p^{(-)} = \frac{a_{\oplus}}{x^{(-)}} = 5.212 \text{ а. е.} \tag{26}$$

Первый корень $a_p^{(+)}$ не соответствует ни одной из классических планет, а вот второй корень $a_p^{(-)}$ соответствует Юпитеру. Т. о., искомой планетой является *Юпитер*. (1 балл)

4. Одна и та же конфигурация (например, противостояние) планеты повторяется через синодический период. Значит, промежуток времени между двумя последовательными противостоянием и соединением (одной из конфигураций в сизигии) равен половине синонического периода. В случае Юпитера эта величина составляет 199.5 суток (см. справочные данные, А.6). (1 балл) Продолжительность 5 лет в сутках составляет 1826-1827 суток. Значит, максимальное количество таких конфигураций, которые мог наблюдать астроном, равно (1 балл)

$$N_{\max} = \left[\frac{1826}{199.5}\right] + 1 = 10. \tag{27}$$

5. Относительные значения скорости Юпитера в противостоянии и соединении (как было показано выше) представляются в виде (1+1 балл):

$$V_{\text{п.}} = V_{\oplus} - V_p, \quad V_{\text{с.}} = V_p + V_{\oplus}, \quad \Rightarrow$$

$$\xi = \frac{V_{\text{с.}}}{V_{\text{п.}}} = \frac{V_{\oplus} + V_p}{V_{\oplus} - V_p} = \frac{\sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_{\odot}}{a_{\oplus}}} + \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_{\odot}}{a_p}}}{\sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_{\odot}}{a_{\oplus}}} - \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_{\odot}}{a_p}}} = \left.\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right|_{x=x^{(-)}} = 2.56. \qquad (28)$$

6. При движении по круговым орбитам Земля и Юпитер обладают лишь центростремительными ускорениями, которые всегда направлены на Солнце. В противостоянии Юпитера центростремительное ускорение данной планеты и Земли сонаправлены, а значит относительное ускорение будет равно разности модулей ускорений этих планет:

$$a_{\text{п.}} = a_{\oplus} - a_p = \frac{G\mathfrak{M}_{\odot}}{a_{\oplus}^2} - \frac{G\mathfrak{M}_{\odot}}{a_p^2}.$$

В соединении, наоборот, центростремительные ускорения планет будут направлены противоположно друг другу, а значит модуль их разности будет по факту равен сумме модулей этих ускорений:

$$a_{\text{с.}} = a_{\oplus} + a_p = \frac{G\mathfrak{M}_{\odot}}{a_{\oplus}^2} + \frac{G\mathfrak{M}_{\odot}}{a_p^2}.$$

Определим искомую величину χ (1+1 балл):

$$\chi = \frac{a_{\text{с.}}}{a_{\text{п.}}} = \frac{\frac{G\mathfrak{M}_{\odot}}{a_{\oplus}^2} + \frac{G\mathfrak{M}_{\odot}}{a_p^2}}{\frac{G\mathfrak{M}_{\odot}}{a_{\oplus}^2} - \frac{G\mathfrak{M}_{\odot}}{a_p^2}} = \left.\frac{1+x^2}{1-x^2}\right|_{x=x^{(-)}} = 1.077. \qquad (29)$$

7. В законе планетных гелиоцентрических расстояний Тициуса-Боде планетный индекс для Юпитера принимает значение $n = 4$ (1 балл). Легко убедиться прямой подстановкой, что именно при данном значении параметра получаем значение гелиоцентрического расстояния планеты, соответствующее выше полученному значению:

$$r_n = 0.1 \cdot (4 + 3 \cdot 2^n)\Big|_{n=4} = 5.2 \text{ а. е.} \qquad (30)$$

№10. «Гипотеза Planet Nine и ее видимая звездная величина»

1. Определим интервалы допустимых значений (ИДЗ) для радиуса и гелиоцентрического расстояния Planet Nine. Согласно условию задачи, масса планеты должна быть заключена в интервале $(4.8 \div 8.6)\mathfrak{M}_{\oplus}$. Тогда радиус планеты должен принадлежать интервалу (2 балла):

$$1.60\,\mathfrak{R}_{\oplus} \leq \mathfrak{R}_{P9} \leq 2.87\,\mathfrak{R}_{\oplus}. \qquad (31)$$

Максимально возможный ИДЗ для гелиоцентрических расстояний (r_{P9}) планеты, с учетом имеющейся погрешности, определяется интервалом (2 балла):

$$270\,\text{а. е.} \le r_{P9} \le 820\,\text{а. е.} \tag{32}$$

2. Освещенность ($E_\odot$), создаваемая Солнцем у поверхности Planet Nine есть (1 балл)

$$E_\odot = \frac{L_\odot}{4\,\pi\, r_{P9}^2},$$

здесь $L_\odot$ – светимость Солнца в видимом диапазоне. Поток солнечного излучения, падающего на планету, равен (1 балл)

$$\Phi_0 = E_\odot\,\pi\,\mathfrak{R}_{P9}^2 = \frac{1}{4} L_\odot \left(\frac{\mathfrak{R}_{P9}}{r_{P9}}\right)^2.$$

Доля A_{P9} от потока Φ_0 отражается от поверхности планеты и рассеивается по всем направлениям (изотропно). При этом освещенность (E_{P9}), создаваемая Planet Nine у поверхности Земли (без учета поглощения атмосферой), есть (1 балл)

$$E_{P9} = \frac{A_{P9}\Phi_0}{4\pi\,\Delta_{P9}^2} = \frac{A_{P9}}{16\,\pi}\frac{L_\odot}{\Delta_{P9}^2}\left(\frac{\mathfrak{R}_{P9}}{r_{P9}}\right)^2, \tag{33}$$

здесь Δ_{P9} – геоцентрическое расстояние Planet Nine. Поскольку $a_\oplus = 1$ а.е. $\ll r_{P9}, \Delta_{P9}$, тогда $r_{P9} \approx \Delta_{P9}$, в результате освещенность (33) можно представить в виде (1 балл):

$$E_{P9} \approx L_\odot \frac{A_{P9}}{16\,\pi}\left(\frac{\mathfrak{R}_{P9}}{r_{P9}^2}\right)^2 = \frac{1}{4} f_\odot A_{P9}\left(\frac{a_\oplus}{r_{P9}}\right)^2\left(\frac{\mathfrak{R}_{P9}}{r_{P9}}\right)^2, \quad \text{где} \quad f_\odot = \frac{L_\odot}{4\,\pi\,a_\oplus^2}, \tag{34}$$

здесь $f_\odot = 600$ Вт/м^2 – солнечная постоянная для видимого света.

3. Определим далее минимальную и максимальную освещенности, создаваемые планетой у поверхности Земли (1+1 балл):

$$E_{P9}^{(\min)} = \frac{1}{4} f_\odot A_{P9}^{(\min)}\left(\frac{a_\oplus}{r_{P9}^{(\max)}}\right)^2\left(\frac{\mathfrak{R}_{P9}^{(\min)}}{r_{P9}^{(\max)}}\right)^2, \quad E_{P9}^{(\max)} = \frac{1}{4} f_\odot A_{P9}^{(\max)}\left(\frac{a_\oplus}{r_{P9}^{(\min)}}\right)^2\left(\frac{\mathfrak{R}_{P9}^{(\max)}}{r_{P9}^{(\min)}}\right)^2.$$

С использованием формулы Погсона для звездных величин Planet Nine (m_{P9}) и Солнца ($m_\odot = -26.74^{\text{m}}$, согласно справочным данным)

$$m_{P9} - m_\odot = -2.5\lg\left(\frac{E_{P9}}{f_\odot}\right), \quad \Rightarrow \quad m_{P9} = m_\odot + 2.5\lg\left(\frac{f_\odot}{E_{P9}}\right).$$

Определим минимальное и максимальное значения m_{P9} (1+1 балл):

$$m_{P9}^{(\min)} = m_\odot + 2.5\lg\left(\frac{f_\odot}{E_{P9}^{(\max)}}\right) = 18.96^{\text{m}}, \tag{35}$$

$$m_{P9}^{(\max)} = m_\odot + 2.5\lg\left(\frac{f_\odot}{E_{P9}^{(\min)}}\right) = 26.48^{\text{m}}. \tag{36}$$

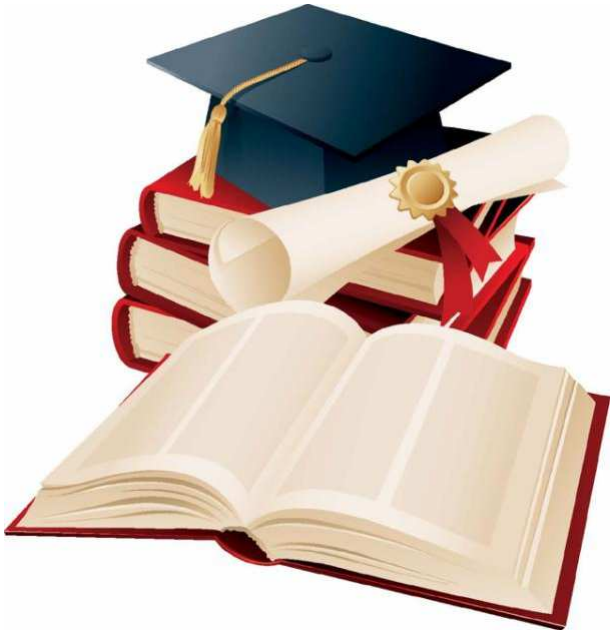
Т. о., интервал возможных значений для видимой звездной величины планеты есть $(18.96^{\mathrm{m}}, 26.48^{\mathrm{m}})$.

4. Чтобы данную планету можно было обнаружить визуально в любой точке ее орбиты, необходимо чтобы проницающая сила телескопа (m_T) была не меньше $m_{P9}^{(\max)}$ (1+1+1 балл), т. е.

$$m_{P9}^{(\max)} \leq m_T, \text{ или } m_{P9}^{(\max)} \leq 2.1^{\mathrm{m}} + 5^{\mathrm{m}} \lg D, \Rightarrow$$

$$D_{\min} = 10^{0.2(m_{P9}^{(\max)} - 2.1^{\mathrm{m}})} (\text{мм}) = 75.2\,\text{м}. \tag{37}$$

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ



А.1. Основные физические и астрономические постоянные

- *Гравитационная постоянная* – $G = 6.674 \cdot 10^{-11}$ м^3· кг$^{-1} \cdot c^{-2}$
- *Скорость света в вакууме* – $c = 2.998 \cdot 10^8$ м/с
- *Универсальная газовая постоянная* – $R = 8.31$ кг·м^2· с$^{-2}$·К$^{-1}$· моль$^{-1}$
- *Постоянная Стефана-Больцмана* – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ кг·с$^{-3}$·К$^{-4}$
- *Постоянная Авогадро* – $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
- *Масса протона* – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг
- *Масса электрона* – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ кг
- *Астрономическая единица* – 1 а.е. $= 1.496 \cdot 10^{11}$ м
- *Парсек* – 1 пк = 206265 а.е. $= 3.086 \cdot 10^{16}$ м
- *Постоянная Хаббла* – $H = 72$ км·с$^{-1}$·Мпк$^{-1}$

А.2. Данные о Солнце

- *Радиус* – $6.955 \cdot 10^5$ км
- *Масса* – $1.989 \cdot 10^{30}$ кг
- *Светимость* – $3.827 \cdot 10^{26}$ Вт
- *Спектральный класс* – G2
- *Видимая звездная величина* – -26.74^m
- *Абсолютная болометрическая звездная величина* – $+4.83^m$
- *Показатель цвета (B-V)* – $+0.67^m$
- *Эффективная температура* – 5778 К
- *Средний горизонтальный параллакс* – $8.794''$
- *Солнечная постоянная (во всем спектре) на расстоянии Земли* – 1361 Вт/м^2
- *Солнечная постоянная (в видимом свете) на расстоянии Земли* – 600 Вт/м^2

А.3. Данные о Земле

- *Эксцентриситет орбиты* – 0.017
- *Тропический год* – 365.24219 сут
- *Средняя орбитальная скорость* – 29.8 км/с
- *Период вращения* – 23 часа 56 минут 04 секунды
- *Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0* – $23^\circ\, 26'\, 21.45''$

- *Средний по объему радиус* – 6371.0 км
- *Средний экваториальный радиус* – 6378.14 км
- *Длина земного меридиана* – 20004.276 км
- *Полярный радиус* – 6356.77 км
- *Масса* – $5.974 \cdot 10^{24}$ кг
- *Средняя плотность* – 5.52 г·см$^{-3}$
- *Объемный состав атмосферы* – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim$ 1%)

А.4. Данные о Луне

- *Среднее расстояние от Земли* – 384400 км
- *Минимальное расстояние от Земли* – 356410 км
- *Максимальное расстояние от Земли* – 406700 км
- *Эксцентриситет орбиты* – 0.055
- *Наклон плоскости орбиты к эклиптике* – $5°09'$
- *Сидерический (звездный) период обращения* – 27.321662 сут
- *Синодический период обращения* – 29.530589 сут
- *Радиус* – 1738 км
- *Масса* – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или 1/81.3 массы Земли
- *Средняя плотность* – 3.34 г·см$^{-3}$
- *Визуальное геометрическое альбедо* – 0.12
- *Видимая звездная величина в полнолуние* -12.7^m

А.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin\alpha \pm x\,\cos\alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos\alpha \mp x\,\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg}\alpha \pm \frac{x}{\cos^2\alpha};$$

$$(1+x)^n \approx 1 + n\,x;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.

А.6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.		градусы		сут
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

А.7. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли	г·см$^{-3}$		градусы		
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут†	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час†	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;
† – обратное вращение.

А.8. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см$^{-3}$	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	−12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685†	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.9. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике и график для уравнения времени

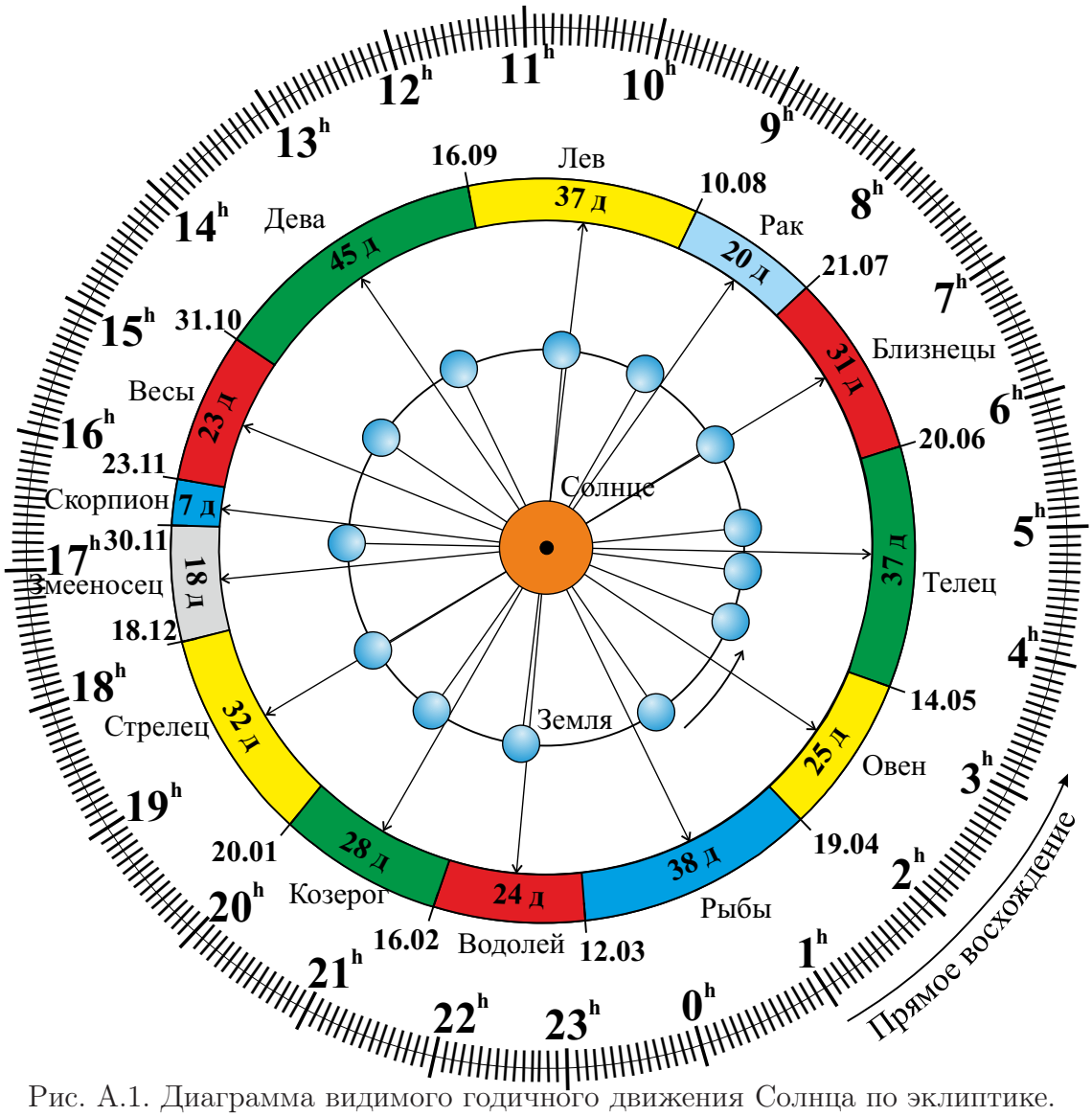


Рис. А.1. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике.

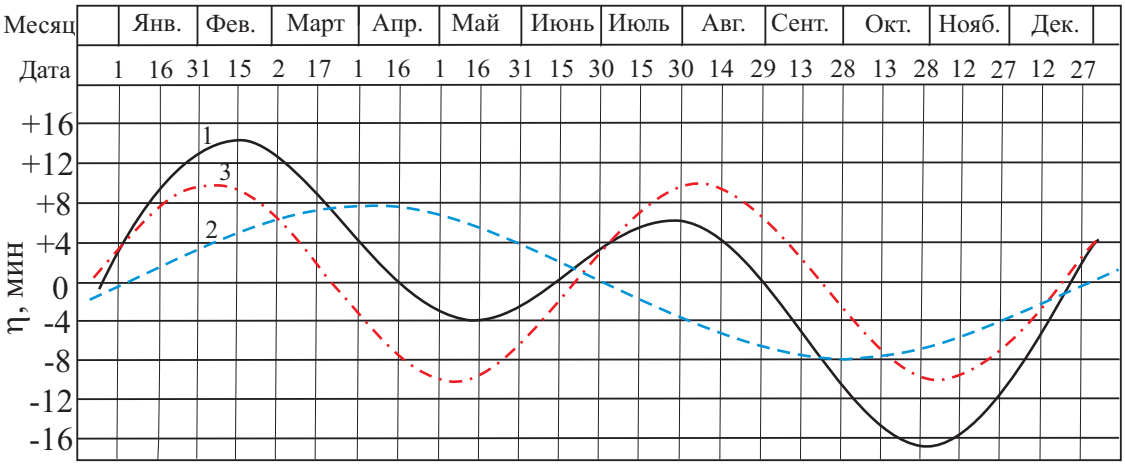


Рис. А.2. График уравнения времени: 1 – уравнение времени, 2 – уравнение центра, 3 – уравнение от наклона эклиптики.

А.10. Яркие звезды ночного небосвода

Топ-25 ярчайших звезд ночного небосвода

№	Название	α	δ	r, св.л.	m, ^{m}	M, ^{m}	Сп. кл.	Полушарие и № в нем
1	Сириус (α Большого Пса)	$06^{\mathrm{h}}45^{\mathrm{m}}9^{\mathrm{s}}$	$-16°42'58''$	8.6	-1.46	1.4	A1Vm	Южное (01)
2	Канопус (α Киля)	$06^{\mathrm{h}}23^{\mathrm{m}}57^{\mathrm{s}}$	$-52°41'45''$	310	-0.72	-5.53	A9II	Южное (02)
3	Ригил(A)/Толиман(B) (α Центавра AB)	$14^{\mathrm{h}}39^{\mathrm{m}}35^{\mathrm{s}}$	$-60°50'15''$	4.3	-0.27	4.06	G2V + K1V	Южное (03)
4	Арктур (α Волопаса)	$14^{\mathrm{h}}15^{\mathrm{m}}40^{\mathrm{s}}$	$19°10'57''$	36.7	-0.05	-0.3	K1.5IIIp	Северное (01)
5	Вега (α Лиры)	$18^{\mathrm{h}}36^{\mathrm{m}}56^{\mathrm{s}}$	$38°47'01''$	25	0.03^{v}	0.6	A0Va	Северное (02)
6	Капелла (α Возничего)	$05^{\mathrm{h}}16^{\mathrm{m}}41^{\mathrm{s}}$	$45°59'53''$	42.2	0,08	-0.5	G6III + G2III	Северное (03)
7	Ригель (β Ориона)	$05^{\mathrm{h}}14^{\mathrm{m}}32^{\mathrm{s}}$	$-08°12'06''$	870	0.12^{v}	-7.84	B8Iae	Южное (04)
8	Процион (α Малого Пса)	$07^{\mathrm{h}}39^{\mathrm{m}}18^{\mathrm{s}}$	$+05°13'30''$	11.4	0.38	2.6	F5IV-V	Северное (04)
9	Ахернар (α Эридана)	$01^{\mathrm{h}}37^{\mathrm{m}}43^{\mathrm{s}}$	$-57°14'12''$	139	0.46	-1.3	B3Vnp	Южное (05)
10	Бетельгейзе (α Ориона)	$05^{\mathrm{h}}55^{\mathrm{m}}10^{\mathrm{s}}$	$07°24'25''$	530	0.50^{v}	-5.14	M2Iab	Северное (05)
11	Хадар (β Центавра)	$14^{\mathrm{h}}03^{\mathrm{m}}49^{\mathrm{s}}$	$-60°22'23''$	400	0.61^{v}	-5.4	B1III	Южное (06)
12	Альтаир (α Орла)	$19^{\mathrm{h}}50^{\mathrm{m}}47^{\mathrm{s}}$	$08°52'06''$	16.8	0.77	2.3	A7Vn	Северное (06)
13	Акрукс (α Южного Креста)	$12^{\mathrm{h}}26^{\mathrm{m}}36^{\mathrm{s}}$	$-63°05'57''$	321	0.77	-4.1	B0.5IV + B1Vn	Южное (07)
14	Альдебаран (α Тельца)	$04^{\mathrm{h}}35^{\mathrm{m}}55^{\mathrm{s}}$	$16°30'33''$	65	0.85^{v}	-0.3	K5III	Северное (07)
15	Антарес (α Скорпиона)	$16^{\mathrm{h}}29^{\mathrm{m}}24^{\mathrm{s}}$	$-26°25'55''$	610	0.96^{v}	-5.2	M1.5Iab	Южное (08)
16	Спика (α Девы)	$13^{\mathrm{h}}25^{\mathrm{m}}12^{\mathrm{s}}$	$-11°09'41''$	250	0.98^{v}	-3.2	B1V	Южное (09)
17	Поллукс (β Близнецов)	$7^{\mathrm{h}}45^{\mathrm{m}}19^{\mathrm{s}}$	$28°01'34''$	33.7	1.14	0.7	K0IIIb	Северное (08)
18	Фомальгаут (α Южной Рыбы)	$22^{\mathrm{h}}57^{\mathrm{m}}39^{\mathrm{s}}$	$-29°37'20''$	25	1.16	2.0	A3Va	Южное (10)
19	Мимоза (β Южного Креста)	$12^{\mathrm{h}}47^{\mathrm{m}}43^{\mathrm{s}}$	$-59°41'19''$	353	1.25^{v}	-4.0	B0.5III	Южное (11)

Топ-25 ярчайших звезд ночного небосвода (продолжение)

20	Денеб (α Лебедя)	$20^h41^m26^s$	$45°16'49''$	1550	1.25	−8.38	A2Ia	Северное (09)
21	Регул (α Льва)	$10^h08^m22^s$	$11°58'02''$	77	1.35	−0.5	B7Vn	Северное (10)
22	Адара (ε Большого Пса)	$06^h58^m38^s$	$-28°58'19''$	400	1.50	−4.8	B2II	Южное (12)
23	Кастор (α Близнецов)	$07^h34^m36^s$	$31°53'18''$	51.5	1.57	0.5	A1V + A2V	Северное (11)
24	Гакрукс (γ Южного Креста)	$12^h31^m10^s$	$-57°06'48''$	88	1.63^v	−1.2	M3.5III	Южное (13)
25	Шаула (λ Скорпиона)	$17^h33^m37^s$	$-37°06'13''$	365	1.63^v	−3.5	B1.5IV	Южное (14)

А.11. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела, болометрические поправки

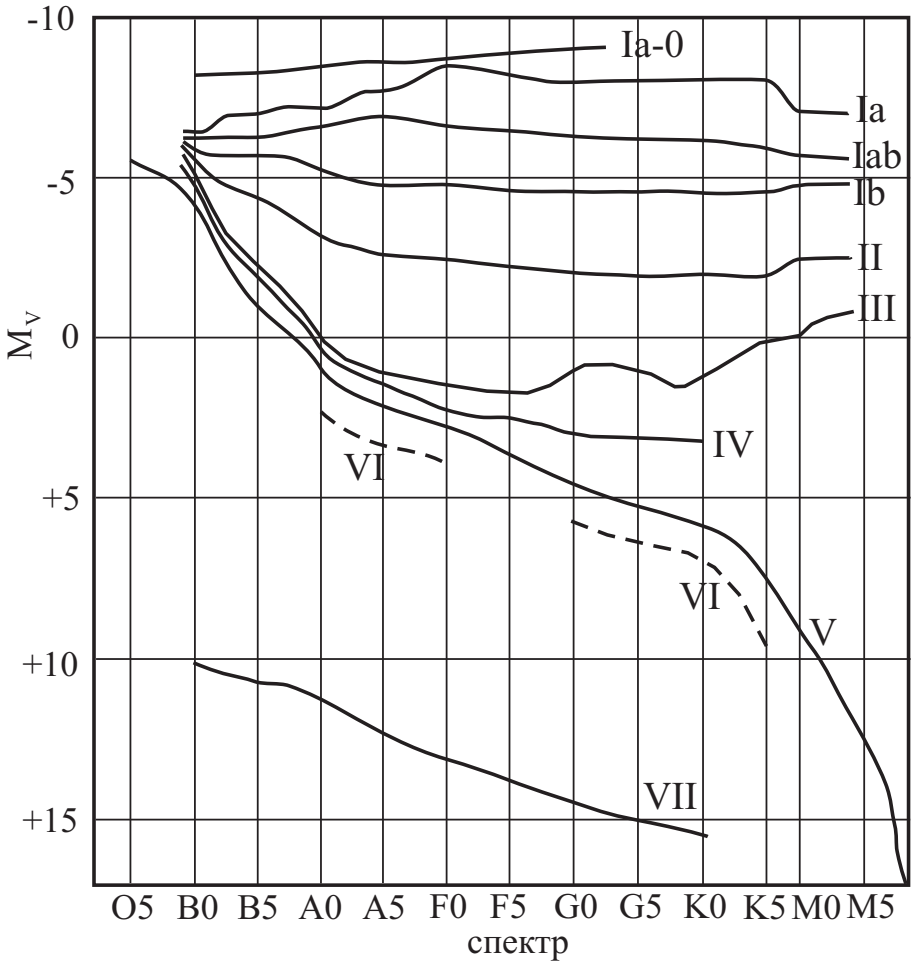


Рис. А.3. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.

Болометрические поправки ΔM_b

Спектр	ΔM_b	Спектр	ΔM_b		
			Гл. последовательность	Гиганты	Сверхгиганты
B0	– 2.70	F5	– 0.04	– 0.08	– 0.12
B5	– 1.58	F8	– 0.05	– 0.17	– 0.28
A0	– 0.72	G0	– 0.06	– 0.25	– 0.42
A5	– 0.31	G2	– 0.07	– 0.31	– 0.52
F0	– 0.09	G5	– 0.10	– 0.39	– 0.65
F2	– 0.04	G8	– 0.10	– 0.47	– 0.80
		K0	– 0.11	– 0.54	– 0.93
		K2	– 0.15	– 0.72	– 1.20
		K3	– 0.31	– 0.89	– 1.35
		K4	– 0.55	– 1.11	– 1.56
		K5	– 0.85	– 1.35	– 1.86
		M0	– 1.43	– 1.55	– 2.2
		M1	– 1.70	– 1.72	– 2.6
		M2	– 2.03	– 1.95	– 3.0
		M3	– 2.35	– 2.26	– 3.6
		M4	– 2.7	– 2.72	– 3.8
		M5	– 3.1	– 3.4	– 4.0

A.12. Статистика распределения звезд по звездным величинам

m	Кол-во звезд	m	Кол-во звезд	m	Кол-во звезд, $\times 10^6$	m	Кол-во звезд, $\times 10^6$
0^m	4	5^m	1602	10^m	0.340	15^m	36.9
1^m	15	6^m	4800	11^m	0.927	16^m	83.7
2^m	48	7^m	14000	12^m	2.46	17^m	182
3^m	171	8^m	42000	13^m	6.29	18^m	374
4^m	513	9^m	121000	14^m	15.5	19^m	733

Примечание: здесь указано количество звезд на всем небосводе, имеющих блеск ярче указанной звездной величины, согласно Star Numbers, 2001.

А.13. Таблица Менделеева

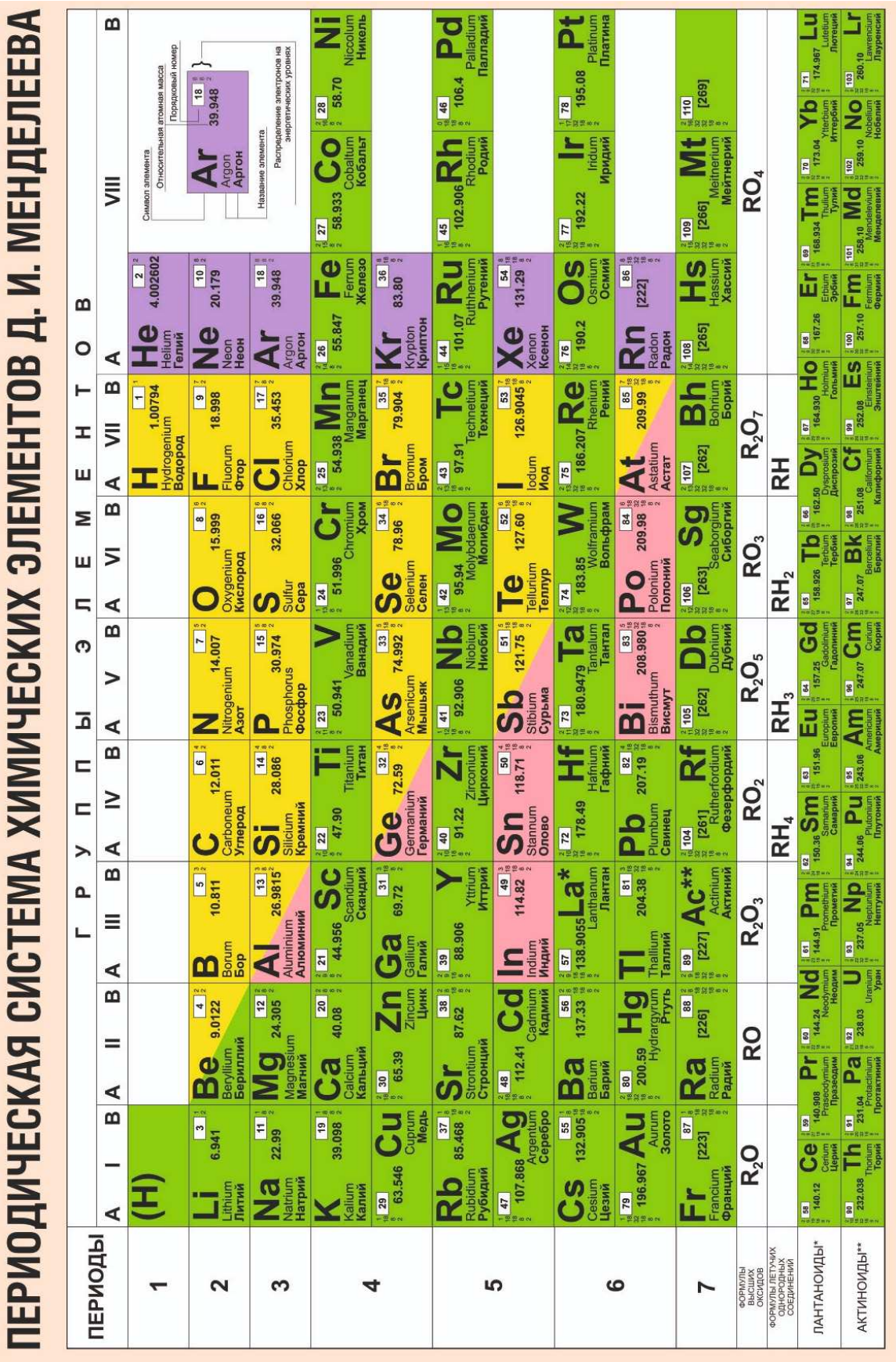


Рис. А.4. Таблица Менделеева.

В.1. Карты звездного неба

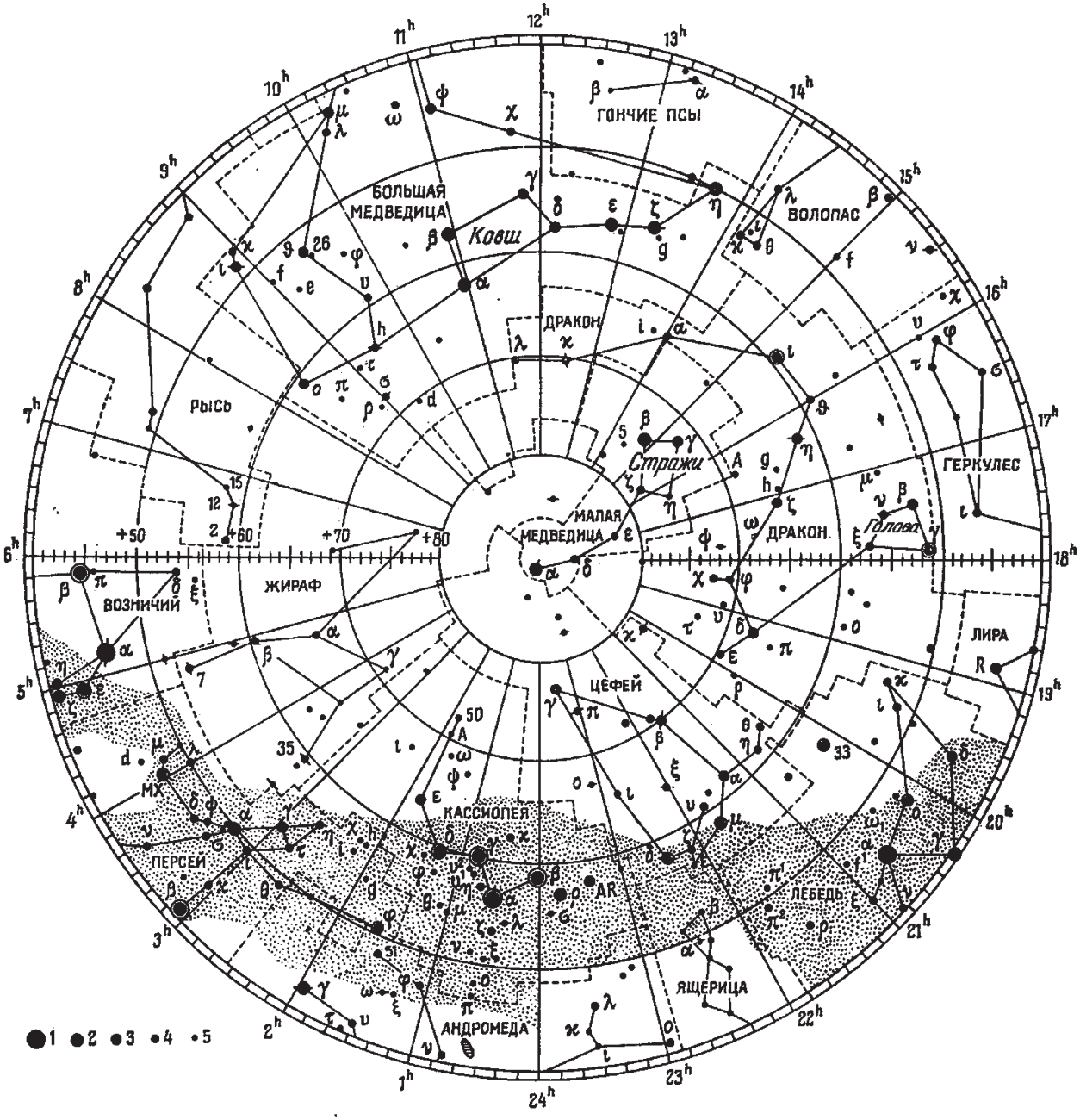


Рис. В.1. Карта северной околополярной области.

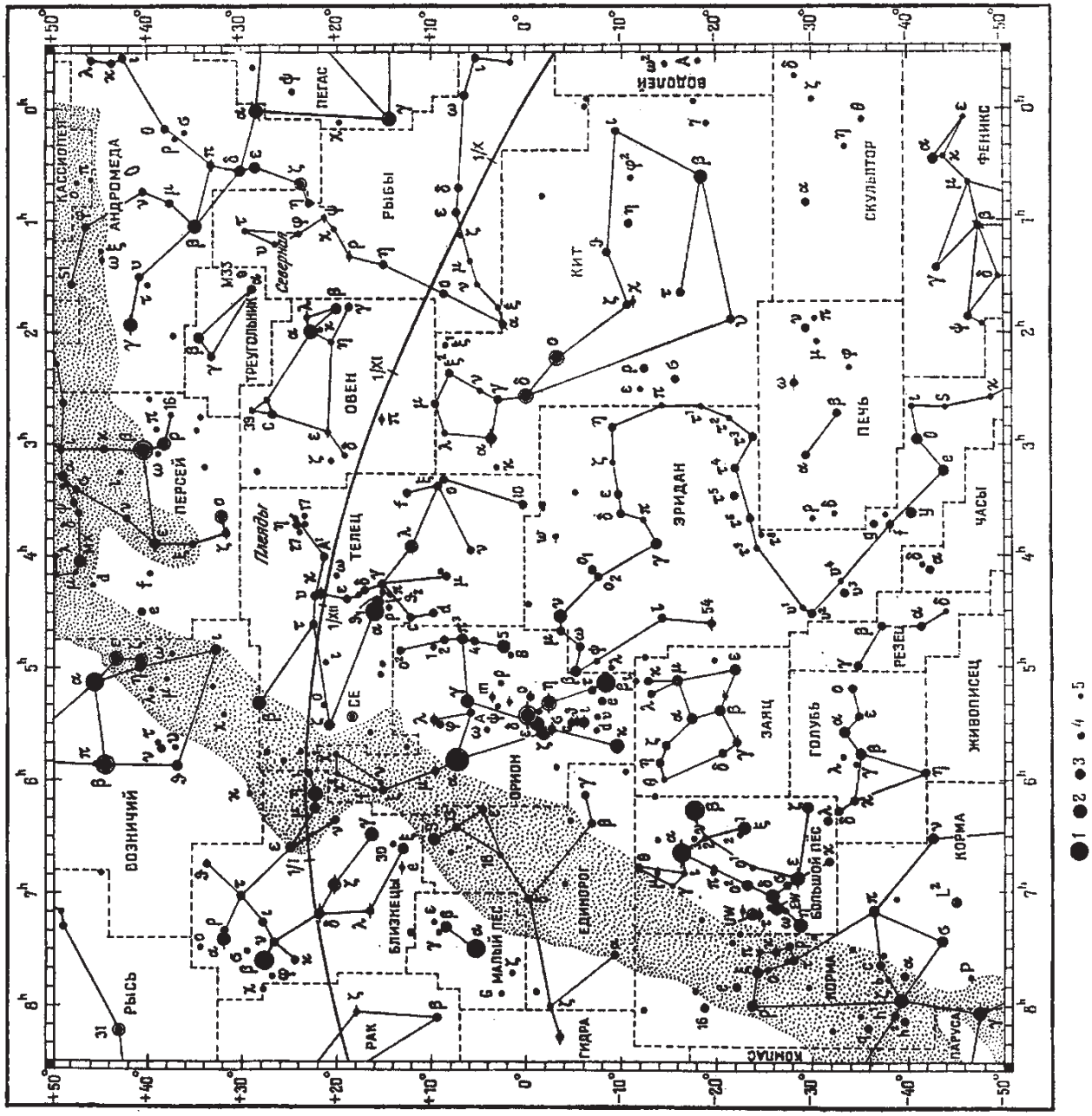


Рис. В.2. Карта осенне-зимнего небосвода.

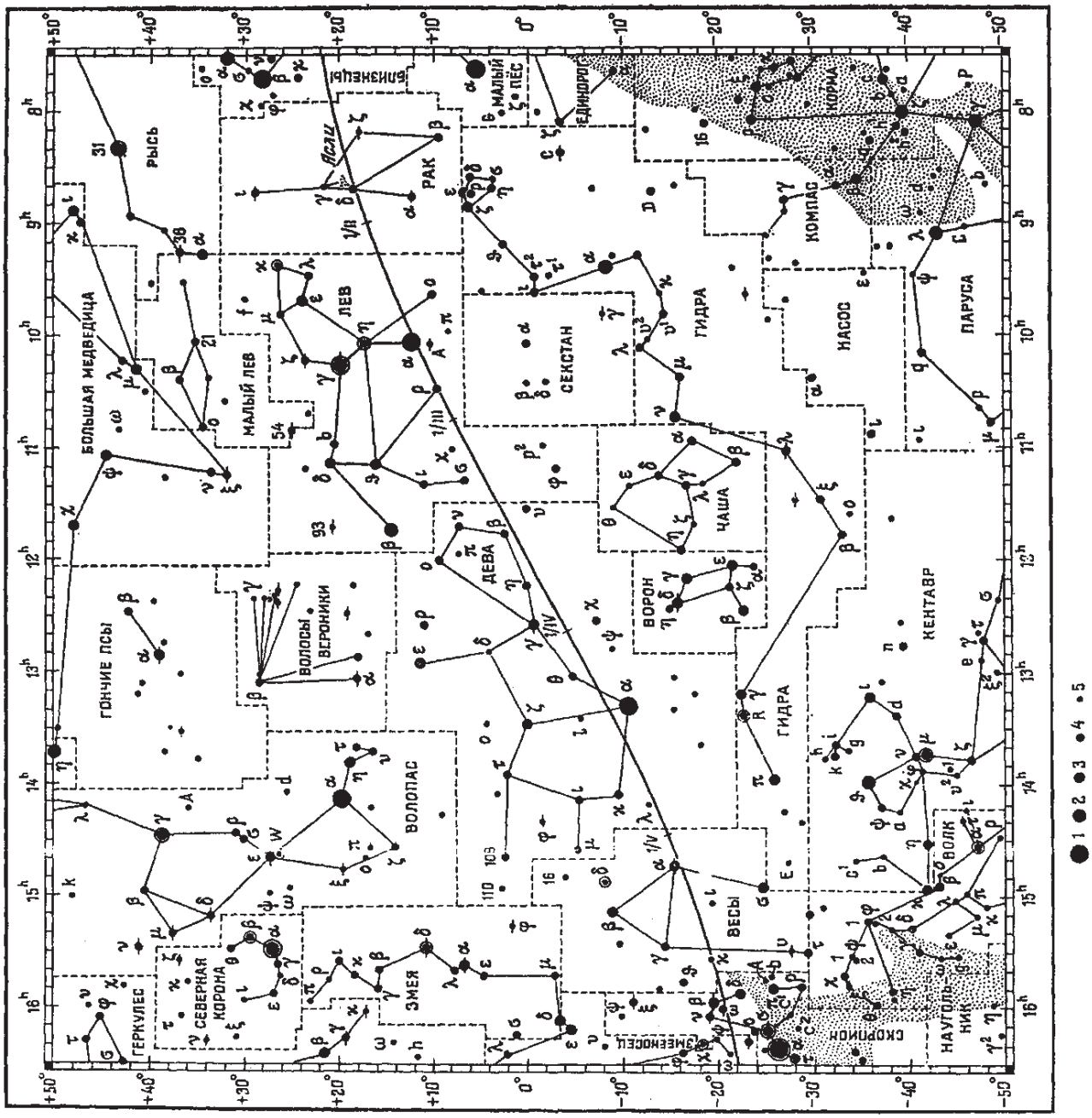


Рис. В.3. Карта зимне-весеннего небосвода.

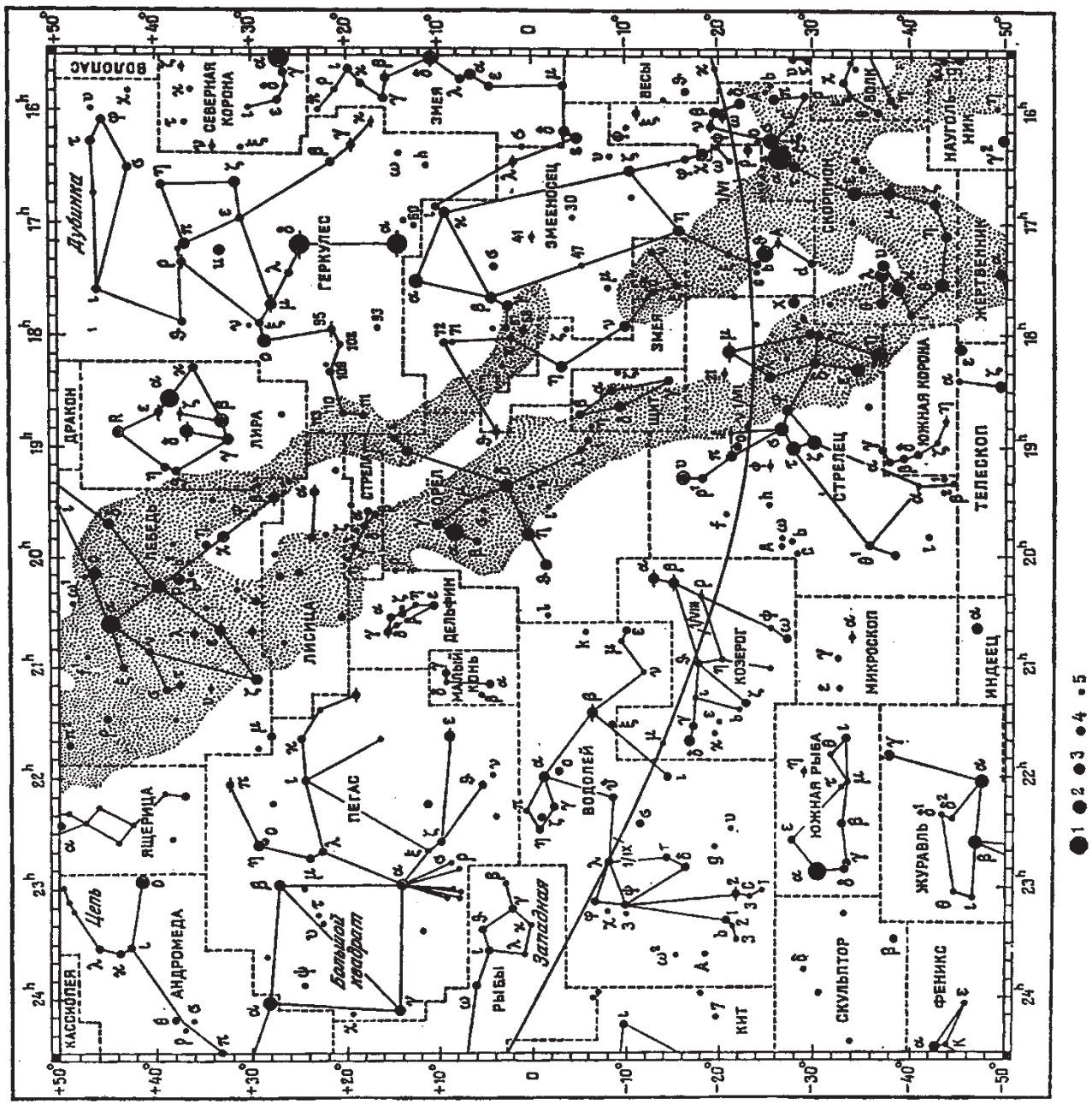


Рис. В.4. Карта летнего-осеннего небосвода.

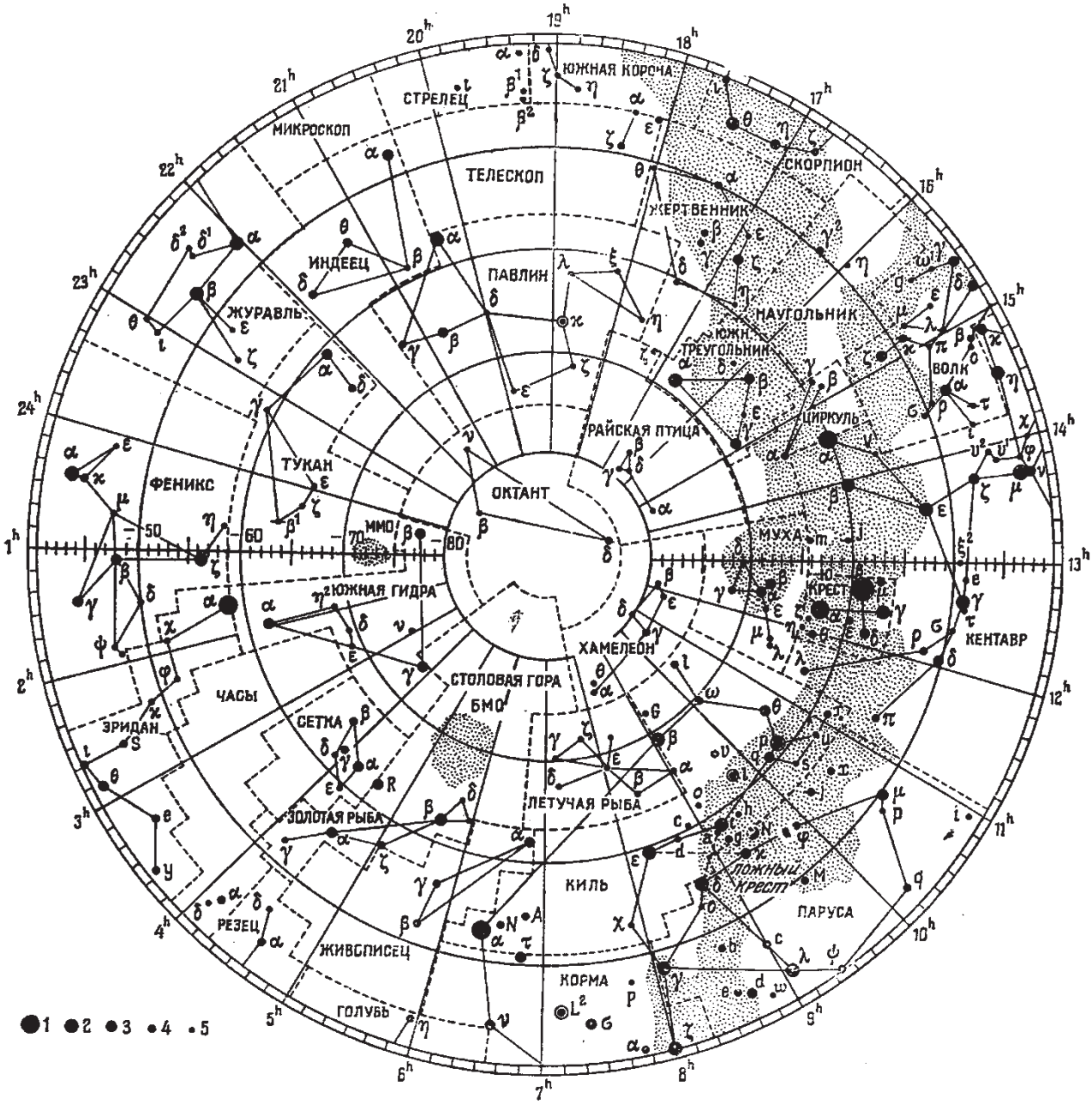


Рис. В.5. Карта южной околополярной области.