САМАРСКИЙ РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ДЛЯ ОДАРЕННЫХ ДЕТЕЙ

САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ОТКРЫТОЙ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ им. Ф.А. БРЕДИХИНА

СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ.

СЕЗОН: 2024-2025, ТУР № 1

Самара, 2024 г.

Дорогие Друзья!

Вашему вниманию в данном релизе представлены 10 оригинальных задач двух уровней сложности – «Новичок» (уровень А), «Знаток» (уровень В). Задачи составлены в соответствии с ***Перечнем*** *вопросов, рекомендуемых Центральной предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады школьников по астрономии для подготовки обучающихся 10-11 классов к решению задач ее различных этапов.*

При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!

Ссылка: **«Условия и решения конкурсных задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2025 среди обучающихся 10-11 классов. Тур № 1». – https://codsamara.ru/olimpiady-i-konkursy/olimpiada-imeni-f-a-bredihina/**

Составитель: – ***Филиппов Юрий Петрович***, научный руководитель школы, методист СРЦОД, к.ф.-м.н., доцент кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева.

Верстка в системе LaTeX – Филиппов Ю.П., Белозерская Л.Н.

Памятка участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2025

1. ***Официальный сайт Астрошколы***:
https://codsamara.ru/olimpiady-i-konkursy/olimpiada-imeni-f-a-bredihina/

2. ***Официальная группа в VK***:
vk.com/bredikhinolimp

3. ***Сроки подачи решений задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2025 тура № 1 на проверку***:
15.10.2024-30.11.2024!!!

4. ***Электронный ящик ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2025:***
samrasolimp@mail.ru

5. ***Руководство зарегистрированного участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2025***:

https://codsamara.ru/olimpiady-i-konkursy/olimpiada-imeni-f-a-bredihina/
или
https://vk.com/bredikhinolimp

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Дорогие Друзья!
Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2025, внимательно ознакомьтесь с «Руководством зарегистрированного участника ОМОА им Ф.А. Бредихина-2025»! Электронный адрес последнего указан в Памятке участника.

Уровень «Новичок» (уровень А)

№ 1. *«Кроссворд-ревью "Астро-солянка"»*

Ответьте на следующие вопросы, заполнив ниже представленный кроссворд. ***Как называется:***

1. Как называется третья по яркости звезда ночного небосвода Самарской области? (1 балл)

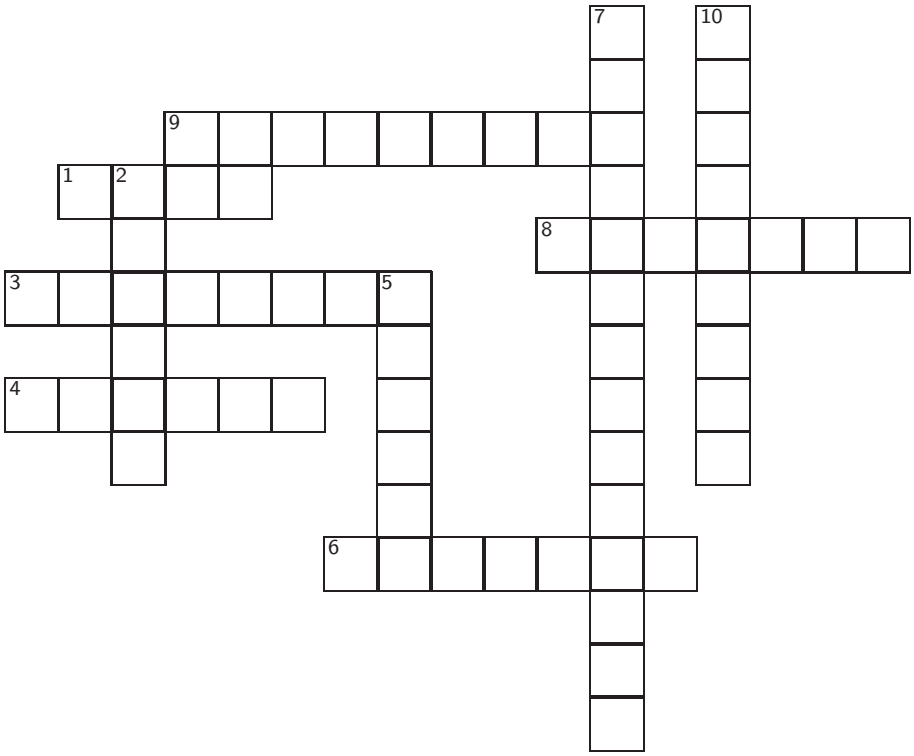
2. Какой из спутников Юпитера определенно обладает большим подледным океаном жидкой воды? (1 балл)

3. В каком созвездии расположен апекс Солнечной системы?

4. Фамилией какого ученого назван эффект изменения частоты электромагнитного излучения, приходящего от движущегося источника, относительно частоты неподвижного источника? (1 балл)

5. У какой классической планеты Солнечной системы самая низкая средняя плотность? (1 балл)

6. Какая физическая величина не сохраняется у метеороида, при его вхож-



дении в плотные слои атмосферы Земли? (1 балл)

7. Как называется геометрический параметр эллипса, характеризующий его меру сплюснутости? (1 балл)

8. Как называется вид грунта, формирующего поверхность Луны? (1 балл)

9. Как называется видимое перемещение светил на небесной сфере, обусловленное перемещением наблюдателя в пространстве? (1 балл)

10. Характеристика телескопа, определяющая степень яркости первичного изображения, сформированного его объективом в своей фокальной плоскости. (1 балл)

№ 2. *«Околополярная звезда в поле зрения трубы»*

С территории г. Тольятти (53°31′ с.ш., 49°25′ в.д.) в неподвижную безлинзовую цилиндрическую трубу, которая помогает уменьшить воздействие городской засветки, наблюдается суточное движение звезды, расположенной вблизи одного из полюсов небосвода (см. рис. 1). Труба расположена таким образом, что данный полюс (точка A) находится точно на границе поля зрения трубы (участка небосвода, доступного для наблюдения в эту трубу), а суточная параллель $B\breve{O}C$ звезды проходит точно через его центр.

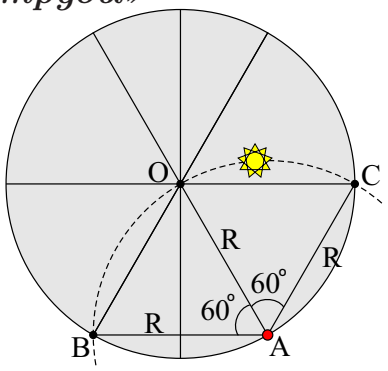


Рис. 1. К определению поля зрения трубы и суточной параллели звезды.

1. Какой именно полюс находится в точке A? (1 балл)

1. Северный географический полюс	2. Южный географический полюс	3. Северный полюс мира
4. Южный полюс мира	5. Северный полюс эклиптики	6. Южный полюс эклиптики

2. В каком именно направлении движется звезда вдоль суточной параллели $B\breve{O}C$? (1 балл)

1. По часовой стрелке ($B \to O \to C$)	2. Против часовой стрелки ($C \to O \to B$)	3. Невозможно определить точно
4. Совершает колебательное движение: сначала движется в одном направлении, затем – в обратном		

3. Чему равно склонение звезды, если угловой радиус поля зрения трубы составляет $R = 1.5°$? Ответ представьте в градусах, округлив до десятых. (2 балла)

4. Чему равно время пребывания звезды в поле зрения трубы? Ответ представьте в часах, округлив до десятых. (2 балла)

5. Чему равна площадь (в кв. градусах) поля зрения трубы? (2 балла)

6. Чему равна длина (в градусах) дуги суточной параллели $B\breve{O}C$? (2 балла)

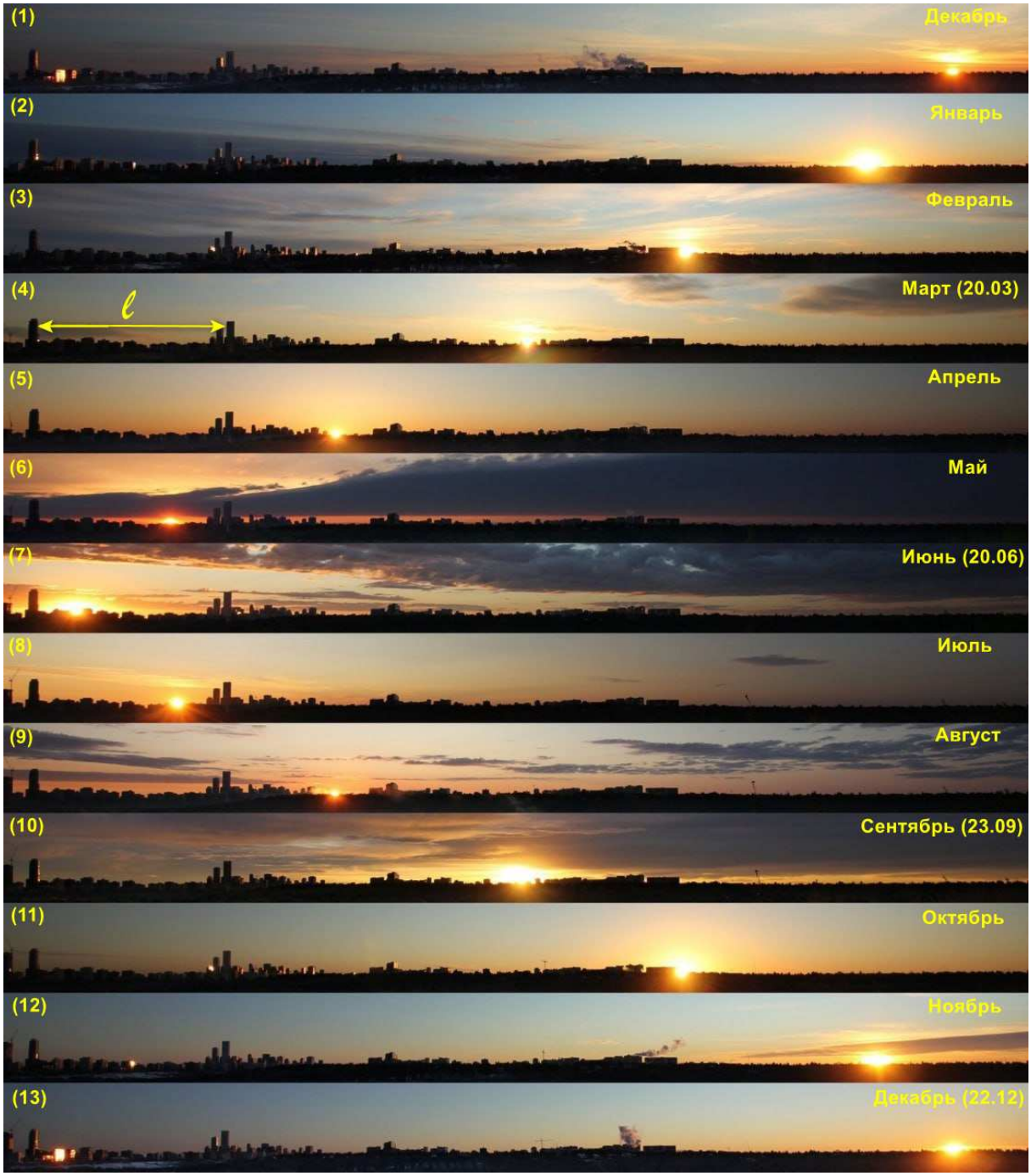


Рис. 2. Изменение положений Солнца на горизонте в течение года.

№3. «Солнце на горизонте в течение года»

На рис. 2 представлена серия (1) ÷ (13) фотографий Солнца на горизонте, полученных ежемесячно в течение года с одной точки поверхности Земли. Определите:

1. Какое астрономическое событие запечатлено на серии фотографий? Свой ответ поясните. (2 балла)

Восход Солнца	Закат Солнца	Невозможно однозначно определить

2. Установите соответствие между сторонами света (горизонта) и номерами кадров, на которых положение Солнца наиболее близко к соответствующим сторонам. (1 балл за правильно определенную пару, но не более 4 баллов)

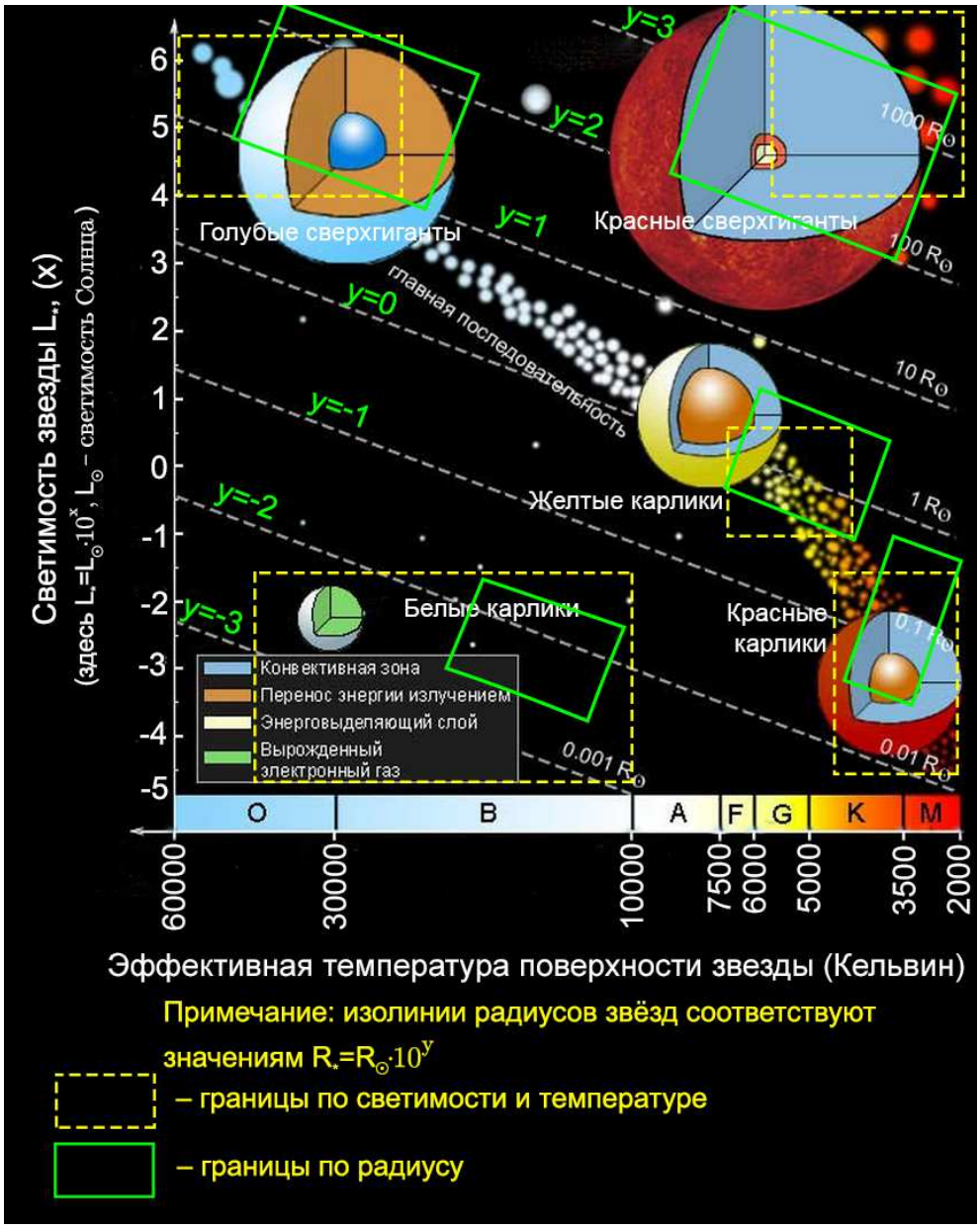


Рис. 3. К определению диаграммы Герцшпрунга-Рассела и моделей внутреннего строения некоторых классов звезд; пунктирными прямоугольниками указаны интервалы возможных значений (ИВЗ) для светимости (выраженной в светимостях Солнца, $L_\odot$) и температуры (выраженной в кельвинах, К) звезд соответствующего класса, зелеными прямоугольниками указаны ИВЗ для радиуса (выраженного в радиусах Солнца, $\mathfrak{R}_\odot$) этих звезд.

Сторона света	Север	Юг	Восток	Запад
Номер кадра				

3. Чему равны азимуты положений Солнца на горизонте на кадрах «4» и «10»? (1+1 балл)

4. Оцените моменты местного среднего солнечного времени получения кадров «4» и «10», с учетом уравнения времени. (2+2 бала)

№4. «Свойства звезд и диаграмма Г-Р»

На рис. 3 представлена диаграмма «спектр-светимость» (Герцшпрунга-Рассела) и модели внутреннего строения некоторых классов звезд.

1. Тело звезды какого класса (среди представленных на диаграмме) более

чем на 90% состоит из вырожденного газа? (1 балл)

2. Звезды какого класса (среди представленных на диаграмме) характеризуются самыми высокими мощностями излучения электромагнитных волн и при этом принадлежат ранним спектральным классам (O, B)? (1 балл)

3. По диаграмме определите характерные интервалы возможных значений температуры T_*, радиуса $\mathfrak{R}_*$ и светимости L_* для красных сверхгигантов. Ответ представьте коэффициентами при соответствующих степенях или показателями степени числа «10» этих величин. Ответ представьте в форме (1 балл за одно правильное значение):

$$z_{\min} \cdot 10^4 \text{ K} \leq T_* \leq z_{\max} \cdot 10^4 \text{ K}, \; 10^{y_{\min}} \cdot \mathfrak{R}_\odot \leq \mathfrak{R}_* \leq 10^{y_{\max}} \cdot \mathfrak{R}_\odot,$$

$$10^{x_{\min}} \cdot L_\odot \leq L_* \leq 10^{x_{\max}} \cdot L_\odot.$$

Уровень «Знаток» (уровень B)

Задача №5. «Угломерный инструмент и доли небосвода»

Теодолит Т-15 – это прибор, предназначенный для измерения вертикальных (в частности, высоты) и горизонтальных (в частности, азимута) углов (см. рис. 4.а). При расположении прибора на горизонтальной поверхности его оптическая труба способна поворачиваться на 360° по азимуту и от 0° до 55° градусов по высоте. Какая доля небесной сферы (НС) г. Самары ($\varphi_s = 53°12'$, $\lambda_s = 3^{\text{ч}}20^{\text{м}}$) доступна наблюдениям в такой прибор: а) в данный момент, (5 баллов) б) регулярно проводимым в течение года? (6 баллов)

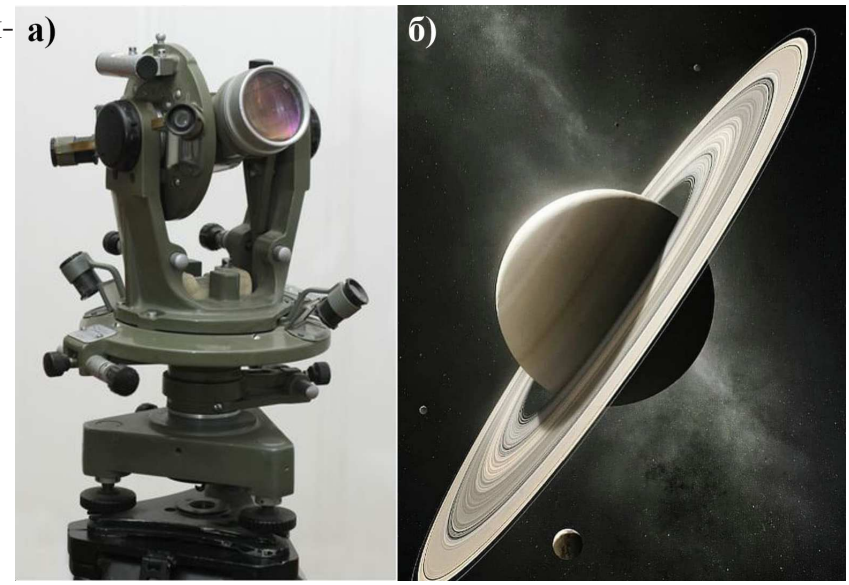


Рис. 4. К определению: а) теодолита Т-15, б) Юпитера с кольцами (в представлении художника-фантаста).

№6. «Солнце на горизонте и место наблюдения»

С использованием данных и результатов решения задачи №3 настоящего релиза, определите:

1. Значения азимутов Солнца на горизонте в дни солнцестояний, если расстояние от места съемки до двух самых высоких равноудаленных башен, видимых на горизонте, составляет $r_0 = 5.00$ км, а линейное расстояние (отсчитываемое в картинной плоскости и указано на рисунке) между ними равно

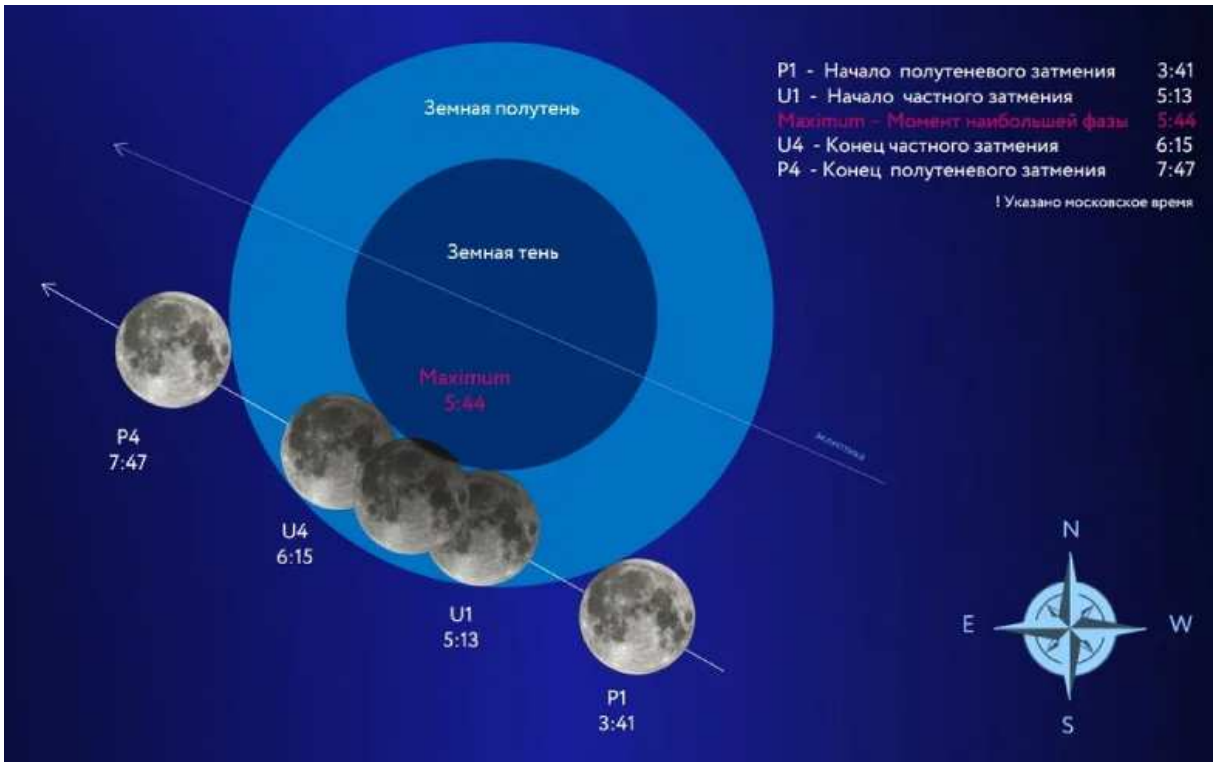


Рис. 5. К определению основных фаз лунного затмения 18.09.2024 года (с сохранением масштаба).

$\ell = 1.02$ км. Угловой масштаб вдоль горизонта и отвесной линии на всем рис. 2 считать одним и тем же. (2+2 балла)

2. Лишь с использоованием результатов пункта 1, оцените широту места наблюдения. (6 баллов)

3. Лишь с использованием рис. 2 и результатов решений пунктов 1 и 2, оцените угол наклона эклиптики к эватору. (2 балла)

№7. «Главное событие сентября 2024 года»

Ночью 18 сентября 2024 года состоялось редкое астрономическое явление: одновременно наблюдалось суперлуние (т. е. полнолуние, в котором Луна находится в перигее своей орбиты, при этом ее видимый угловой диаметр достигает максимального значения для земного наблюдателя) и лунное затмение. С использованием рис. 5 оцените:

1. В каком созвездии располагалась тень Земли во время затмения? (1 балл) Оцените прямое восхождение и склонение геометрического центра земной тени? (1+3 балла) В решении этого пункта используйте диаграмму видимого годичного движения Солнца по эклиптике (приложение А9, рис. А.1).

2. Эклиптическую долготу и широту Луны в момент достижения максимальной фазы затмения. (1+3 балла) Чему было равно угловое расстояние между центром диска Луны и восходящим узлом ее орбиты. (2 балла)

3. Максимальную фазу этого затмения, при наблюдении Луны из подлунной точки. (3 балла)

№8. «"Звезда смерти" и уничтожение Земли»

В популярной киноэпопеи американского режиссера Дж. Лукаса "Звездные войны" был фрагмент, в котором силы Галактической Империи используют «Звезду смерти (ЗС)» – космическую станцию, вооруженную лазерной пушкой, сверхмощным оружием, способным уничтожать целые планеты. Определите, какое минимальное количество энергии потребовалось бы такой пушке, чтобы полностью уничтожить планету Земля? Под "уничтожением" понимается разрушение тела планеты на малые частицы и их разлет "на бесконечность". Если бы такая станция могла "заряжаться" от звезд энергией, то определите минимальное количество дней, которое потребовалось ЗС, для "зарядки" от Солнца с нуля и до значения, которого бы хватило для уничтожения Земли? Землю считайте однородным шаром. При использовании в решении задачи формулы для потенциальной энергии шара, вывод последней необходимо обязательно представить. (14 баллов)

№9. «Нереальный Юпитер»

На рис. 4.б) представлен образ Юпитера с кольцами в стиле "фэнтэзи". Определите:

1. Могут ли быть в действительности кольца у Юпитера на таких расстояниях? Следует помнить, что спутник (а значит и частицы колец) Юпитера и его орбита могут лишь полностью располагаться внутри его сферы Хилла, радиус которой относительно центра Юпитера в системе "Солнце-Юпитер", представляется формулой:

$$\mathfrak{R}_H = a_J \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{M}_J}{3(\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_J)}}, \qquad (1)$$

где $\mathfrak{M}_\odot$, $\mathfrak{M}_J$ – массы Солнца и Юпитера соответственно, a_J – радиус круговой орбиты Юпитера. (3 балла)

2. Определите интервалы возможных значений (ИВЗ) для радиусов орбит и сидерических периодов обращения частиц колец Юпитера, представленных на рис. 4.б). Здесь и далее гравитационным влиянием Солнца и других планет пренебречь. (4 балла)

3. Определите ИВЗ для орбитальной скорости и цетростремительного ускорения частиц колец Юпитера. (4 балла)

4. Проверьте: есть ли в таких кольцах частицы, сидерический период обращения которых равен периоду обращения Юпитера вокруг своей оси? Если есть, то чему равен радиус их орбиты и орбитальная скорость движения? (3 балла)

№10. «Экзо-Земля с кратной орбитой и двойное Солнце»

Исследователи космоса обнаружили экзопланету, подобную Земле, движущуюся вокруг двойной звезды по орбите, близкой к круговой, на среднем

расстоянии $r_0 = 1$ а. е. от центра масс этой пары. Компоненты двойной звезды – близнецы, подобные Солнцу, имеющие форму шара, движущиеся по одной круговой орбите с периодом $T_* = 1$ звездные сутки Земли. Орбиты всех рассматриваемых тел лежат в одной плоскости. Определите:

1. Радиус орбиты (a_*, в км) одного из компонентов двойной звезды. (2 балла)

2. Продолжительность звездного года (в сутках) экзопланеты и ее среднюю орбитальную скорость. (2+1 балла)

3. Закон изменения величины расстояния r от экзопланеты до центра масс двойной звезды с течением времени, учитывая, что $a_*/r_0 \ll 1$. (5 баллов)

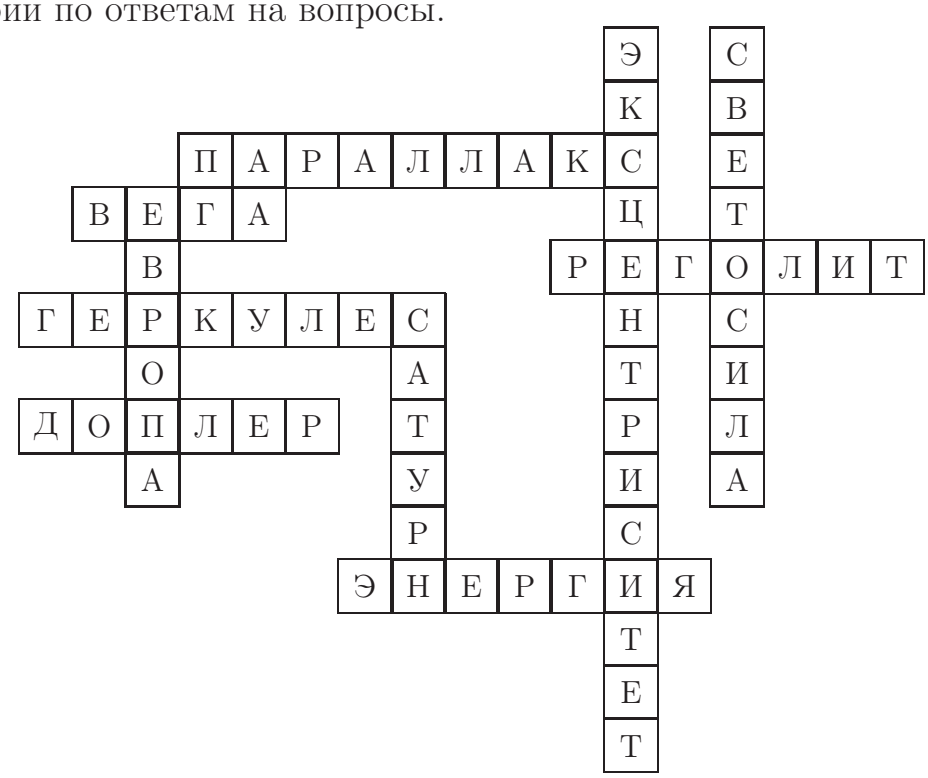
4. Закон изменения радиальной и тангенциальной проекций орбитальной скорости экзопланеты, учитывая, что $a_*/r_0 \ll 1$. (5 баллов)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Уровень «Новичок» (уровень А)

№ 1. *«Кроссворд-ревью "Астро-солянка"»*

Правильно заполненный кроссворд должен выглядеть так. Дадим краткие комментарии по ответам на вопросы.



1. Самой яркой звездой небосвода является Сириус (см. приложение А.10, рейтинг 25 самых ярких звезд), у которого небольшое по модулю и отрицательное по значению склонение. В силу последнего факта, Сириус виден с территории Самарской области. Вторая (Канопус) и третья (Ригил & Толиман) звезды рейтинга имеют большие по модулю и отрицательные по значению склонения. Поэтому они не могут быть видны с территории Самарской области. Четвертым и пятой в том же рейтинге является Арктур и Вега соответсвенно, принадлежащие северной полусфере небосвода (а значит видимые с территории Самарской области). Значит, третьей по яркости звездой ночного небосвода Самары является *Вега*. (1 балл)

2. Согласно данным космического аппарата «Галилео», исследовавшего Юпитер и его спутники, самый маленький из четверки его галилеевых спутников, Европа, обладает огромным подледным океаном жидкой воды, где возможно существование различных форм жизни, подобных земным. (1 балл)

3. *Апексом Солнечной системы* называется точка на небесной сфере, в которую направлен вектор скорости Солнечной системы, определенный относительно ближайших к ней звезд. Данная точка находится в созвездии Геркулеса. (1 балл)

4. Эффект изменения частоты электромагнитного излучения, приходящего от движущегося источника, относительно частоты неподвижного источни-

ка принято называть *эффектом Доплера*, в честь австрийского математика и физика, Кристиана Доплера, открывшего его. (1 балл)

5. С использованием справочных данных, легко убедиться в том, что среди классических планет самой низкой средней массовой плотностью обладает именно *Сатурн*. (1 балл)

6. При вхождении метеороида в плотные слои земной атмосферы, последний испытывает действие значительной силы сопротивления со стороны воздуха. Работа этой силы – всегда отрицательная величина. С использованием теоремы об изменении кинетической энергии легко убедиться в том, что именно полная механическая *энергия* уменьшается (не сохраняется) с течением времени падения. (1 балл)

7. Основной геометрический параметр эллипса, характеризующий его меру сплюснутости, называется *эксцентриситетом*. (1 балл)

8. Вид грунта, формирующего поверхность Луны, называется *реголитом*. (1 балл)

9. Видимое перемещение светила на небесной сфере, обусловленное перемещением наблюдателя в пространстве, называется *параллаксом*. (1 балл)

10. Характеристика телескопа, определяющая степень яркости первичного изображения, сформированного его объективом в своей фокальной плоскости называется *светосилой*. (1 балл)

№ 2. *«Околополярная звезда в поле зрения трубы»*

1. Как известно, геометрический центр суточной параллели (из рисунка очевидно, что это точка А) любой звезды лежит на оси мира. При наблюдении с Земли данный центр будет точно проецироваться на видимый полюс мира. Поскольку г. Тольятти располагается в северном географическом полушарии (это понятно, согласно данным географическим координатам), значит точка А является *северным полюсом мира*. (1 балл)

2. Поскольку точка А является северным полюсом мира, а наблюдения ведутся из центра небесной сферы, то данная звезда как и другие видимые звезды совершает свое суточное движение по своей суточной параллели *против часовой стрелки*. (1 балл)

3. Поскольку центр суточной параллели лежит на краю поля зрения трубы (являющегося кругом), а дуга суточной параллели проходит через его центр, то полярное расстояние (p_*) звезды равно радиусу R поле зрения трубы, т. е. $p_* = R = 1.5°$. Полярное расстояние звезды связано с ее склонением соотношением вида: $p_* + \delta_* = 90°$, откуда следует значение склонения: $\delta_* = 90° - p_* = 88.5°$. (2 балла)

4. Из рисунка видно, что часть суточной параллели звезды, попавшая в поле зрения трубы, соответствует углу раствора 120°. Как известно, звезда за одни сутки (24 часа) совершает один полный оборот, соответствующий углу

360°. Следовательно, данную дугу звезда описала за 1/3 суток, т. е. за 8.0 часов. (2 балла)

5. Угловую площадь (телесный угол) поля зрения трубы можно представить виде (2 балла):

$$\Omega_f = \pi R^2 = 7.07 \text{ кв. град.}$$

6. Длину дуги части суточной параллели (окружности) можно определить по формуле, аналогичной формуле линейной длины части окружности:

$$L = \frac{1}{3}(2\pi r),$$

здесь r – радиус суточной параллели звезды (из рисунка видно, что $r = R$). Численный расчет искомой величины дает значение: $L = 3.14°$. (2 балла)

№3. «Солнце на горизонте в течение года»

1. Очевидно, на представленной серии фотографий запечатлен восход Солнца, поскольку с декабря по июнь-месяц Солнце перемещается из южной полусферы в северную, а точки его восхода/захода дрейфуют в направлении "от точки юга к точке севера". Значит на всех фотографиях справа располагался юг, слева – север, а по центру фотографии, очевидно, располагался восток. Солнце на восточной стороне горизонта, очевидно, бывает только утром. Значит на всех представленных фотографиях запечатлен именно *восход Солнца*. (2 балла)

2. Как было отмечено в предыдущем пункте, самая левая точка всех кадров наиболее близка к точке севера математического горизонта. Значит наиболее близкое положение точки восхода Солнца к точке севера запечатлено на кадре №7. Наиболее близкое положение точки восхода Солнца к точке юга запечатлено на кадре №13. В день весеннего (20÷21 марта) и осеннего (22÷23 сентября) равноденствия Солнце движется по небесному экватору, и восходит в точке востока. Значит на кадрах №4 и №10 точка восхода Солнца совпадала с точкой востока. Таким образом, имеем следующее распределение (1 балл за каждую правильно определенную позицию, но не более 4 баллов):

Сторона света	Север	Юг	Восток	Запад
Номер кадра	7	1, 13	4, 10	–

3. На кадрах №4 и №10 Солнце в момент восхода находилось в точке востока, значит его азимут в эти моменты был равен 270°. (1+1 балл)

4. Местное среднее солнечное время можно определить по формуле (1 балл):

$$T_{\text{m}} = T_{\odot} + \eta,$$

где T_{m} – среднее солнечное время, $T_{\odot}$ – истинное солнечное время, η – уравнение времени. Истинное солнечное время можно определить по формуле (1

балл):

$$T_\odot = t_\odot + 12^{\mathrm{h}},$$

здесь $t_\odot$ – часовой угол истинного солнца – центра видимого диска Солнца. В момент восхода Солнца в точке востока его часовой угол $t_\odot = 18^{\mathrm{h}}$, значит истинное солнечное время в момент восхода на кадрах 4 и 10 было $T_\odot = 6^{\mathrm{h}}00^{\mathrm{m}}$.

С использованием кривой уравнения времени, представленной на рис. А.2 приложения А.9, определяем его значения для дней весеннего ($\eta_1 = +8.0$ мин) и осеннего ($\eta_2 = -9.5$ мин) равноденствий. (1 балл) В итоге среднее солнечное время моментов получения кадров №4 и №10 (1 балл):

$$T_{\mathrm{m}\,1} = 6^{\mathrm{h}}08^{\mathrm{m}}, \;\; T_{\mathrm{m}\,2} = 5^{\mathrm{h}}50.5^{\mathrm{m}} \approx 5^{\mathrm{h}}51^{\mathrm{m}}.$$

№4. «Свойства звезд и диаграмма Г-Р»

1. Согласно рис. 3, более чем на 90% белый карлик состоит из вырожденного газа. (1 балл)

2. Звезды спектрального класса O характеризуются самыми высокими температурами и при этом обладают самыми большими светимостями (мощностями), являясь *голубыми сверхгигантами* и располагаясь в левом верхнем углу диаграммы. (1 балл)

3. По вертикальным границам желтого прямоугольника можно определить приближенные пограничные значения для температуры, а по горизонтальным границам – пограничные значения светимости ((1+1)+(1+1) балл):

$$0.2 \cdot 10^4 \text{ K} \le T_* \le 0.55 \cdot 10^4 \text{ K}, \;\; 10^4 \cdot L_\odot \le L_* \le 10^{6.67} \cdot L_\odot.$$

По наклонным сторонам зеленого прямоугольника, параллельным линиям постоянного радиуса, определяем диапазон возможных радиусов для этих звезд (1+1 балл):

$$10^2 \cdot \mathfrak{R}_\odot \le \mathfrak{R}_* \le 10^{3.53} \cdot \mathfrak{R}_\odot.$$

Диапазоны возможных значений для светимости и радиуса можно также представить в виде:

$$10^4 \cdot L_\odot \le L_* \le 4.68 \cdot 10^6 \cdot L_\odot, \;\; 100 \cdot \mathfrak{R}_\odot \le \mathfrak{R}_* \le 3.4 \cdot 10^3 \cdot \mathfrak{R}_\odot.$$

Уровень «Знаток» (уровень B)

Задача №5. «Угломерный инструмент и доли небосвода»

1. Определим долю небесной сферы (НС), доступную наблюдениям в г. Самаре в данный момент. Для этого заметим, что область небосвода, доступная наблюдениям в такой прибор, может быть представлена как разность двух областей (см. рис. 6.а): полусферы (CAZBD), телесный угол для которой есть

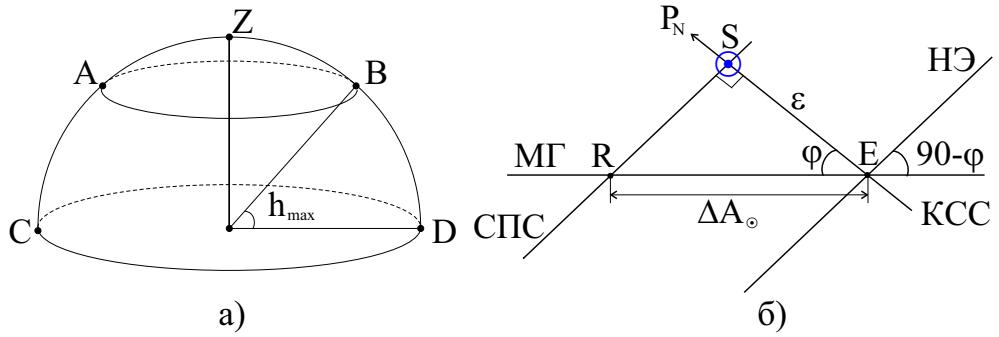


Рис. 6. К определению а) области небосвода, доступной наблюдениям в теодолит в г. Самаре в данный момент, б) широты места наблюдения приближенным способом.

$\Omega_{1/2} = 2\pi$ срад, и шарового сегмента (AZB), центр которого совпадает с зенитом наблюдателя, угол раствора конуса, на который опирается сегмент, равен $90^\circ - h_{\max}$. (1 балл) Здесь $h_{\max} = +55^\circ$ – максимальная высота светила, еще доступного наблюдениям в теодолит, при расположении последнего на горизонтальной поверхности. Тогда телесный угол для такого сегмента можно представить в виде (1 балл):

$$\Omega_s = 2\pi(1 - \cos(90^\circ - h_{\max})). \tag{2}$$

Значит телесный угол, соответствующий данной области и доля от поверхности всей НС, есть (1+1+1 балл)

$$\Omega_1 = \Omega_{1/2} - \Omega_s = 2\pi \sin h_{\max}, \quad \Rightarrow$$
$$\eta_1 = \frac{\Omega_1}{2\Omega_{1/2}} = \frac{1}{2}\sin h_{\max} = 0.41, \quad \text{или} \quad 41\%. \tag{3}$$

2. Заметим, что широта места наблюдения равна высоте полюса мира над горизонтом, т. е. $\varphi_s = h_{p_N} \leq h_{\max}$. (1 балл) При проведении регулярных наблюдений с данным прибором в течение года, в силу суточного вращения сферы и обращения Земли вокруг Солнца, в этот инструмент можно будет обозревать область небосвода, простирающуюся от северного полюса мира до точки юга г. Самары, склонение для которой есть $\delta_{\min} = (\varphi_s - 90^\circ) = -36^\circ 48'$. (1 балл) Таким образом, недоступной для наблюдений из города Самары в течение года остается лишь шаровой сегмент, охватывающий область небосвода, склонения для точек которой меньше $\delta_{\min}$. (1 балл) Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем телесный угол, соответствующий искомой области наблюдений: (1+1+1 балл)

$$\Omega_2 = 2\Omega_{1/2} - 2\pi(1 - \cos(90^\circ - |\delta_{\min}|)) = 2\pi(1 + \cos\varphi_s), \quad \Rightarrow$$
$$\eta_2 = \frac{\Omega_2}{2\Omega_{1/2}} = \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi_s) = 0.80, \quad \text{или} \quad 80\%. \tag{4}$$

№6. «Солнце на горизонте и место наблюдения»

Замечание: в исходной формулировке условий данной задачи была допущена опечатка при определении линейного расстояния между самыми высокими равноудаленными башнями, видимыми на горизонте: вместо $\ell = 1.02$ км было указано значение $\ell = 1.20$ км. Приносим извинения за допущенную опечатку. Решение данной задачи, в котором представлен верный сценарий решения этой задачи лишь с отклонением от численного значения будет оценено максимальным баллом.

1. Для определения азимутов точек восхода Солнца в дни солнцестояний определим угловой масштаб фотографии. Для этого определим по рисунку расстояние между башнями $\ell' = 28$ мм (Ваши значения линейных величин могут отличаться от указанных при использовании фотографии в ином масштабе). Далее определим угловое расстояние ψ между башнями (1 балл):

$$\sin(\psi/2) = \frac{\ell}{2\,r_0}, \quad \Rightarrow \quad \psi = 2\arcsin\left(\frac{\ell}{2\,r_0}\right) = 11.71^\circ.$$

Тогда угловой масштаб фотографии составит $\mu = \psi/\ell' = 0.418^\circ$/мм. Далее измерим расстояния между положениями Солнца на горизонте на кадрах 4 и 7: $L_1 = 66.5$ мм, и на кадрах 10 и 13: $L_2 = 64.5$ мм. Поскольку относительно точки востока положение точек восхода солнца в дни солнцестояний должны быть симметричными, то определим среднее значение величин $\bar{L} = \frac{1}{2}(L_1 + L_2) = 65.5$ мм (1 балл). Тогда азимуты точек восхода в дни летнего и зимнего солнцестояний представляются в виде (1+1 балл):

$$A_{\text{л.с.}} = 270^\circ - \Delta A \approx 242.6^\circ, \quad A_{\text{з.с.}} = 270^\circ + \Delta A \approx 297.4^\circ, \quad \Delta A = \mu\,\bar{L} = 27.4^\circ.$$

2-3. Определим широту места съемки и угол наклона эклиптики к эватору.

Заметим, что эклиптика в день весеннего равноденствия в момент восхода Солнца располагалась вдоль прямой ABC (составляющей минимальный угол γ с горизонтом) с точки зрения земного наблюдателя, расположенного в центре небесной сферы (см. рис. 7). При этом точки пересечения этой прямой с небесной сферой совпадали с точками летнего и зимнего солнцестояния (они не вошли в панораму на кадре №4). Точка зимнего солнцестояния имела наибольшую высоту над горизонтом, а точка летнего солнцестояния – наименьшую высоту. С декабря по июнь точки восхода Солнца дрейфовали по кривой $AKBLC$. При этом точки A и H совпали с точкой зимнего солнцестояния, а точка C – с точкой летнего солнцестояния. Очевидно, точки солнцестояния на кадрах 1 и 7 должны располагаться на той же прямой ABC (1 балл), поскольку эти точки всегда лежат на одном диаметре небесной сферы, проходящей через ее центр (последний совпадает с точкой востока при наблюдении из точки запада).

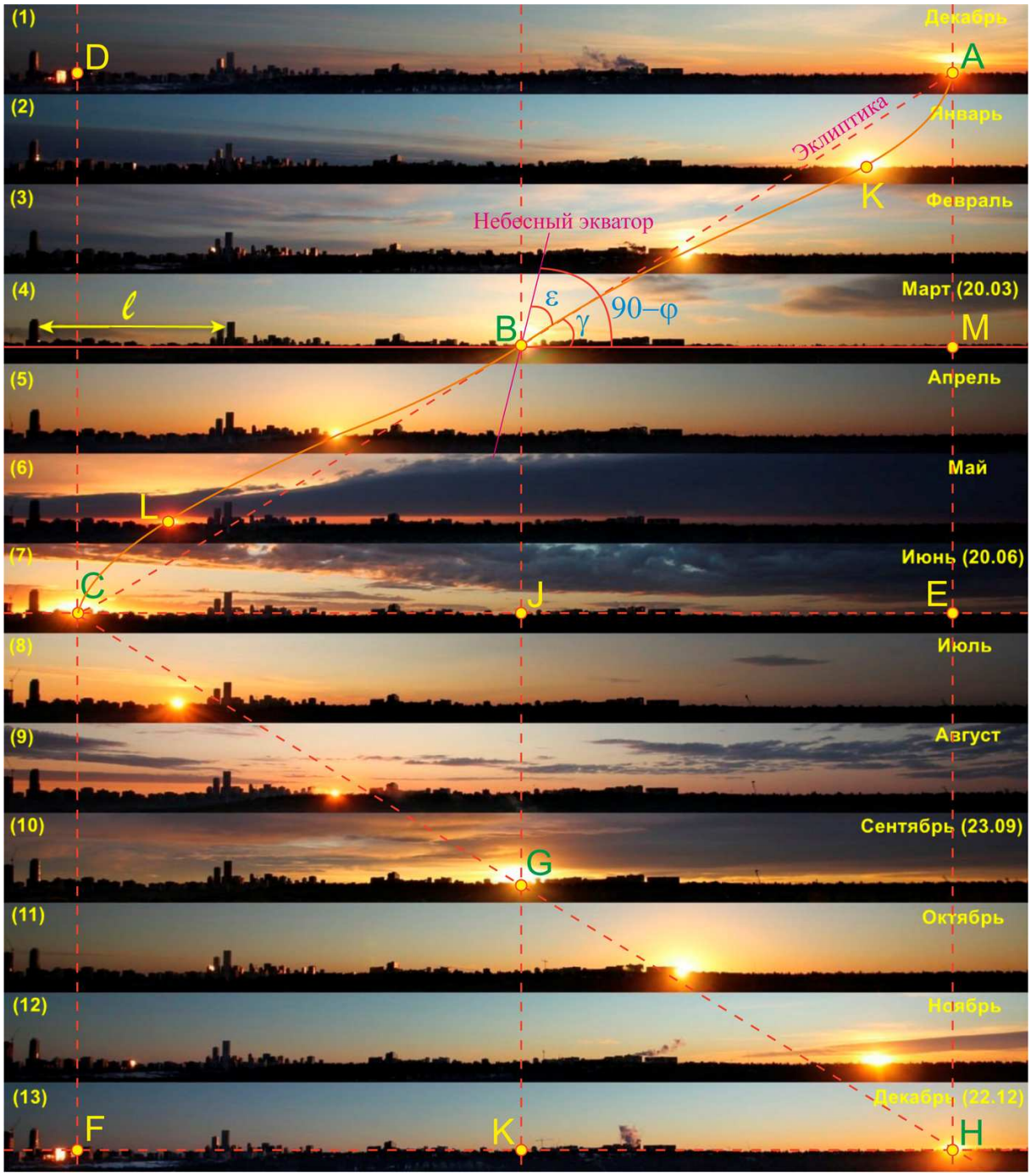


Рис. 7. Изменение положений Солнца на горизонте в течение года с дополнительными построениями.

Рассмотрим сферический треугольник $\triangle_S ABM$. Воспользуемся для него формулами синусов и косинусов:

$$\sin\gamma \sin s = \sin\Delta h \sin 90^\circ, \quad \Rightarrow \quad \sin s = \frac{\sin\Delta h}{\sin\gamma},$$
$$\cos s = \cos\Delta h \cos\Delta A,$$

$$\sin^2 s + \cos^2 s = 1, \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin^2\Delta h}{\sin^2\gamma} + \cos^2\Delta h \cos^2\Delta A = 1, \quad \Rightarrow$$
$$\gamma = \arcsin\left[\frac{\sin\Delta h}{\sqrt{1-\cos^2\Delta h\cos^2\Delta A}}\right] = 33.5^\circ, \tag{5}$$

здесь $\Delta h = \breve{AM} = \mu \cdot AM = 16.9°$, где $AM = 40.5$ мм определено по рис. 7 (здесь учтено, что угловой масштаб фотографии вдоль горизонта и отвесной линии на всем рис. 2 сохраняется). Угол γ можно определить в приближении плоского треугольника $\triangle ABM$: $\gamma_1 = \mathrm{arctg}(AM/BM) = \mathrm{arctg}(\Delta h/\Delta A) = 31.7°$ (отклонение от точного значения на 1.8°).

Небесный экватор с математическим горизонтом составляет угол $90° - \varphi$. С другой стороны, эклиптика составляет с экватором угол ε, а с горизонтом угол γ. В итоге получаем аналитическую связь между углом наклона эклиптики к экватору и широтой места наблюдения (1 балл):

$$90° - \varphi = \gamma + \varepsilon, \;\; \Rightarrow \;\; \varphi = 90° - (\gamma + \varepsilon). \tag{6}$$

Способ №1. *Точный расчет (φ, ε) с использованием формул для сферического треугольника*

Для этого рассмотрим сферический треугольник $\triangle_S RSE$ (см. рис. 6.б), образованный точкой востока (E), точкой восхода Солнца (R) в день летнего солнцестояния, и точкой пересечения (S) суточной параллели Солнца в указанный день и его кругом склонения, проходящим через точку востока. Воспользуемся формулами синусов и косинусов для $\triangle_S RSE$ (1+1 балл):

$$\sin\varphi \sin\Delta A = \sin 90° \sin\ell, \;\; \Rightarrow \;\; \sin\ell = \sin\varphi \sin\Delta A, \;\; \text{здесь} \;\; \ell = \breve{RS},$$
$$\cos\Delta A = \cos\ell \, \cos\delta_\odot, \;\; \Rightarrow \;\; \cos\ell = \frac{\cos\Delta A}{\cos\delta_\odot},$$
$$\sin^2\ell + \cos^2\ell = 1, \;\; \Rightarrow \;\; \sin^2\varphi \sin^2\Delta A + \frac{\cos^2\Delta A}{\cos^2\delta_\odot} = 1, \;\; \Rightarrow$$
$$\sin^2\varphi \sin^2\Delta A + \frac{\cos^2\Delta A}{\cos^2\varepsilon} = 1. \tag{7}$$

С учетом формулы (6), уравнение (7) можно представить в виде (1 балл):

$$\cos^2(\gamma+\varepsilon)\sin^2\Delta A + \frac{\cos^2\Delta A}{\cos^2\varepsilon} = 1, \;\; \Rightarrow \;\; \cos^2(\gamma+\varepsilon) = 1 - \mathrm{ctg}^2\Delta A \, \mathrm{tg}^2\varepsilon. \tag{8}$$

Решим последнее уравнение графическим способом. Из рис. 8.а) видно, что точка пересечения функций f_1 и f_2, определяемых выражениями,

$$f_1(\varepsilon) = \cos^2(\gamma+\varepsilon), \;\; f_2(\varepsilon) = 1 - \mathrm{ctg}^2\Delta A \, \mathrm{tg}^2\varepsilon,$$

единственная и отвечает значению $\varepsilon \approx 23.5°$ (точные численные методы дают значение 23.47°). (1 балл) С использованием формулы (6), получаем значение широты $\varphi = 33.03°$ (возможно также значение $-33.03°$). (1 балл)

Способ №2. *Приближенный расчет (φ, ε) с использованием формул для плоского треугольника*

Заметим, что в приближении плоского треугольника $\triangle_S RSE$ (см. рис. 6.б, которое, по-хорошему, здесь уже «хромает», поскольку данный треугольник,

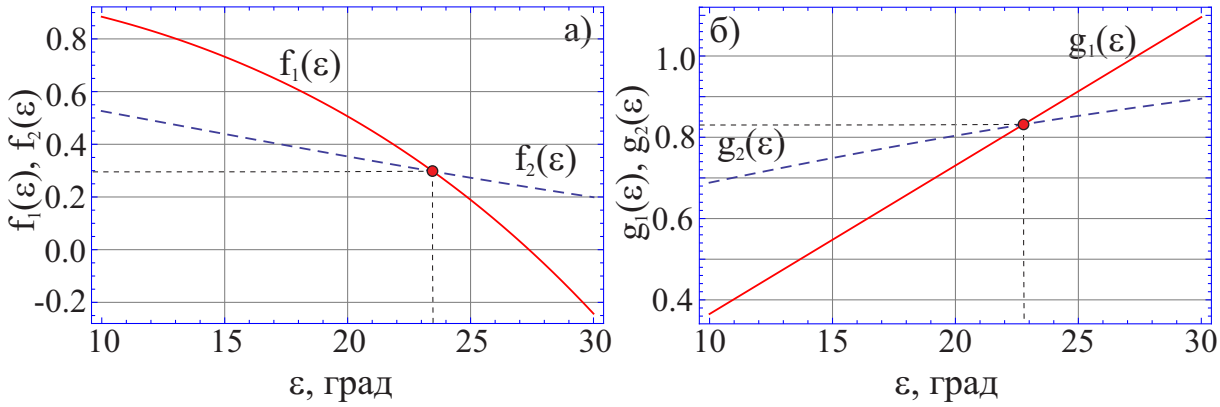


Рис. 8. К определению функций а) $f_1(\varepsilon)$, $f_2(\varepsilon)$; б) $g_1(\varepsilon)$, $g_2(\varepsilon)$ и точек их пересечения.

строго говоря, уже нельзя считать малым, в частности, в силу $\Delta A \approx 30°$) можно записать (2 балла):

$$\cos\varphi = \frac{\varepsilon}{\Delta A}. \tag{9}$$

С учетом формулы (6), уравнение (9) можно представить в виде (1 балл):

$$\sin(\gamma + \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\Delta A}. \tag{10}$$

Вновь решим полученное трансцендентное уравнение графическим методом, полагая что

$$g_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\Delta A}, \quad g_2(\varepsilon) = \sin(\gamma + \varepsilon).$$

Единственная точка пересечения (см. рис. 8.б) данных функций отвечает значению $\varepsilon \approx 22.8°$ (точные численные методы дают значение 22.77°). (1 балл) С использованием формулы (6), получаем значение широты $\varphi = 35.53°$ (возможно также значение $-35.53°$). (1 балл) Полученные приближенные значения углов наклона и широты отличаются от точных на $0.7°/2.5°$ соответственно, что соответствует отклонениям от точных значений на 2.9% и 7.6% соответственно.

№7. «Главное событие сентября 2024 года»

1. Для определения созвездия, в котором располагалась тень Земли, воспользуемся диаграммой видимого движения Солнца по небосводу (см. рис. А.1 приложения А.9). Согласно этой диаграмме, Солнце в сутки затмения располагалось в созвездии Девы, а диаметрально противоположная ему точка – *противосолнечная точка*, совпадала с центром геометрической тени Земли (далее точка С) и была расположена в созвездии Рыбы. (1 балл)

Выполним оценку экваториальных координат точки С. Заметим, что прямое восхождение можно получить непосредственно из диаграммы на рис. А.2 приложения А.9. Оно составляет значение $\alpha_C = 23^{\mathrm{h}}40^{\mathrm{m}}$. (1 балл) Склонение можно оценить так: поскольку точка C совпадает с противосолнечной точкой, то ее склонение, очевидно, связано со склонением Солнца соотношением вида: $\delta_C = -\delta_\odot$. (1 балл) Склонение Солнца можно легко оценить из прямоугольного треугольника, сторонами которого являются небесный экватор, эклиптика

и круг склонения Солнца в момент наибольшей фазы затмения. Заметим, что величину дуги эклиптики от Солнца до точки весеннего равноденствия можно вычислить по формуле: $\ell = \omega_\odot \Delta t$, здесь $\omega_\odot = 2\pi/T_{\text{тр}} = 0.986°/\text{сут}$ – угловая скорость перемещения Солнца по эклиптике, $\Delta t \approx 5$ сут – промежуток времени между моментом затмения и осенним равноденствием в 2024 году (23 сентября, начало суток), $T_{\text{тр}}$ – продолжительность тропического года. В итоге $\ell = 4.93°$. (1 балл) Тогда из прямоугольного треугольника следует, что $\delta_\odot = \ell \sin\varepsilon = 1.96° \approx 2.0°$. Тогда склонение точки C будет $\delta_C \approx -2.0°$. (1 балл)

2. Для оценки эклиптических координат Луны заметим, что эклиптическая долгота Луны фактически равна эклиптической долготе центра геометрической тени Земли. Последняя величина была равна $\beta_{ES} = 360° - \ell \approx 355°$. (1 балл) Для определения широты определим угловой диаметр Луны, при ее наблюдении с подлунной точки в момент затмения (1 балл):

$$\mathcal{D}''_{☾} = \frac{2\,\mathfrak{R}_{☾}}{r^{(☾)}_{\min} - \mathfrak{R}_\oplus} \times 3438' = 34.1'. \tag{11}$$

По рис. 5 определим линейный диаметр Луны $d_{☾} = 20$ мм и расстояние $d_{\text{MS}} = 48$ мм от центра диска Луны до геометрического центра земной тени. Составляя пропорцию

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{☾} \to \mathcal{D}''_{☾}, \\ d_{\text{MS}} \to |\beta_{☾}| \end{array} \right\}, \quad \Rightarrow \quad |\beta_{☾}| = \mathcal{D}''_{☾} \left(\frac{d_{\text{MS}}}{d_{☾}} \right) \approx 82' = 1°22'.$$

Т. о., искомое угловое расстояние $|\beta_{☾}| = 1°22'$ (1 балл) от центра диска Луны до центра геометрической тени Земли. Поскольку последняя точка лежит на эклиптике, то найденное расстояние с учетом положения к югу от эклиптики дает значение эклиптической широты Луны $\beta_{☾} = -1°22'$. (1 балл)

Угловое расстояние γ между центром диска Луны и восходящим узлом ее орбиты можно определить из сферического (по факту плоского) треугольника, образованного восходящим узлом, центром диска Луны и центром геометрической тени Земли. Фактически данный треугольник является прямоугольным. (1 балл) Тогда искомое расстояние (1 балл)

$$\gamma = \frac{|\beta_{☾}|}{\sin i_{☾}} \approx 914' = 15°14'.$$

3. Согласно определению, *линейной фазой* Φ_L *затмения* для затмеваемого тела (Луны) называется отношение части диаметра затмеваемого тела, закрытого затмевающим телом от земного наблюдателя, к диаметру затмеваемого тела. Согласно рис. 9, искомую максимальную величину можно представить отношением вида: $\Phi_L^{\max} = BE/(2\,BM_M)$. Заметим далее, что

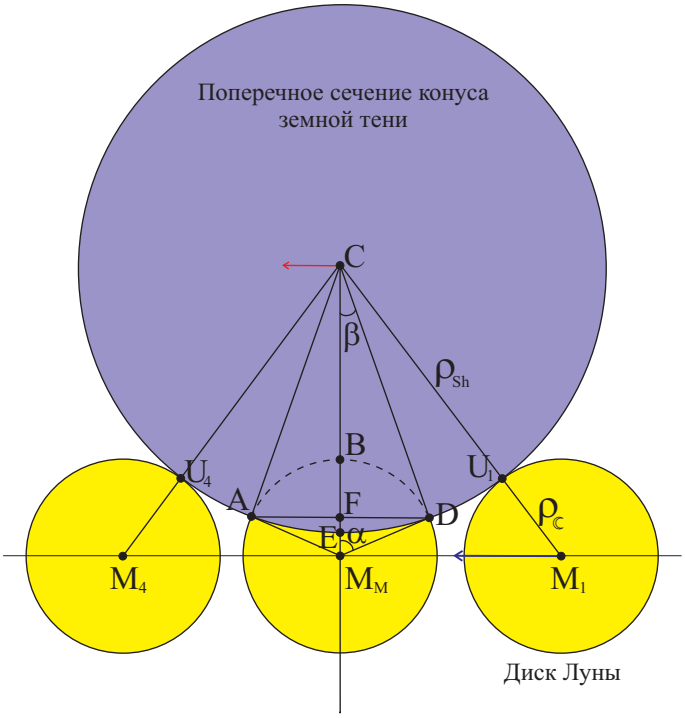


Рис. 9. К определению максимальной линейной фазы затмения Луны. Стрелками показаны направления видимого перемещения Луны и конуса геометрической тени Земли по небосводу.

$BM_M = \rho_☾$ – угловой радиус видимого диска Луны, $BE = BF + FE = (BM_M - FM_M) + (CE - CF) = BM_M + CE - (FM_M + CF) = \rho_{\text{Sh}} + \rho_☾ - \sigma_{\min}$. В последнем выражении ρ_{Sh} – угловой радиус земной тени, $\sigma_{\min}$ – минимальное угловое расстояние между центром видимого диска Луны и осью симметрии конуса земной тени (в нашем случае он равен $|\beta_☾|$). В итоге получаем (1 балл)

$$\Phi_L^{\max} = \frac{\rho_{\text{Sh}} + \rho_☾ - \sigma_{\min}}{2\rho_☾}. \tag{12}$$

Определим по рис. 5 диаметр геометрической тени Земли $d_{sh} = 80$ мм. Поскольку все угловые величины определены по одному рис. 5 и имеют общий угловой масштаб, то отношение угловых величин можно свести к отношению соответствующих линейных величин, определенных по тому же рисунку: (1+1 балл)

$$\Phi_L^{\max} = \frac{d_{sh}/2 + d_☾/2 - d_{MS}}{d_☾} = 0.1 \text{ или } 10\%. \tag{13}$$

№8. «"Звезда смерти" и уничтожение Земли»

1. Световой пучок, действующий на тело планеты во время выстрела лазерной пушки, совершает положительную работу (A_{LB}), равную сумме работ, направленных на изменение гравитационной потенциальной энергии всех частиц тела Земли ($A_G^{(\oplus)}$), а также на вывод этих частиц из гравитационного поля Солнца ($A_G^{(\odot)}$). Эти работы можно представить через изменения потенциальных энергий (1 балл):

$$A_{\text{LB}} = A_G^{(\oplus)} + A_G^{(\odot)} = (U_\infty^{(\oplus)} - U_0^{(\oplus)}) + (U_\infty^{(\odot)} - U_0^{(\odot)}), \tag{14}$$

где $U_0^{(\oplus)}$, $U_\infty^{(\oplus)}$ – потенциальные энергии гравитационного взаимодействия всех частиц тела Земли в начальный момент и при их разлете «на бесконечность» соответственно; $U_\infty^{(\odot)}$, $U_0^{(\odot)}$ – потенциальные энергии гравитационного взаимодействия Земли и Солнца в начальный момент и при удалении частиц Земли «на бесконечность» в гравитационном поле последнего соответственно (гравитационным взаимодействием с другими телами можно смело пренебречь даже в оптимальной конфигурации сближения, поскольку прямым подсчетом можно убедиться, что их вклады в общий результат буду давать не более $\mathcal{O}(0.1\%)$). Разлетевшись «на бесконечность», частицы друг от друга находятся на бесконечно больших расстояниях и, согласно формуле для потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух точечных масс,

$$\lim_{r_{1,2}\to\infty} U_{1-2} = \lim_{r_{1,2}\to\infty} -\frac{G\,m_1\,m_2}{r_{1,2}} \to 0.$$

Значит и потенциальная энергия взаимодействия всех частиц также равна нулю, т. е. $U_\infty = 0$. (1 балл)

Изначально все частицы образовывали шарообразное тело Земли. Значит начальная энергия гравитационного взаимодействия $U_0^{(\oplus)}$ должна быть равна потенциальной энергии гравитационного взаимодействия однородного шара, а энергию $U_0^{(\odot)}$ можно определить потенциальной энергией гравитационного взаимодействия двух точечных масс.

2. Получим явное аналитическое выражение для $U_0^{(\oplus)}$. Рассмотрим бесконечно тонкий сферический слой толщины dr и массы dm на поверхности однородного шара массы $\mathfrak{M}$. Мысленно разобьем этот слой на большое количество малых элементов и определим работу по перемещению всех элементов этого слоя с поверхности шара на бесконечность (1 балл):

$$dA = -dA_G = dU_G^{(f)} - dU_G^{(i)} = dm\left(-\frac{G\,\mathfrak{M}}{\infty} + \frac{G\,\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}\right) = \frac{G\,dm\,\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}.$$

Разобьем тело однородного шара на бесконечное количество бесконечно тонких слоев толщины dr каждый. Рассмотрим вновь перенос вещества такого тонкого слоя, расположенного на поверхности шара-остова радиуса r. Запишем по аналогии с предыдущим случаем элементарную работу по перемещению вещества тонкого слоя с поверхности остова на бесконечность (1 балл):

$$dA = \frac{G\,dm\,m(r)}{r},$$

здесь $m(r)$ – масса шара-остова, которую можно представить в виде (1 балл):

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi\,r^3\,\rho, \quad \text{где} \quad \rho = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{4}{3}\pi\,\mathfrak{R}^3}, \tag{15}$$

где ρ – средняя массовая плотность шара. В итоге последнее выражение можно переписать в виде:

$$m(r) = \mathfrak{M}\left(\frac{r}{\mathfrak{R}}\right)^3. \tag{16}$$

Далее определим массу тонкого слоя (1 балл):

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot 4\pi\, r^2\, dr.$$

В результате искомая элементарная работа представляется в виде (1 балл):

$$dA = \frac{G\,\rho \cdot 4\pi\, r^2\, dr}{r}\mathfrak{M}\left(\frac{r}{\mathfrak{R}}\right)^3 = \frac{3\,G\,\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}^6} r^4\, dr. \tag{17}$$

Проинтегрируем полученный результат по всем бесконечно тонким слоям и, таким образом, найдем полную работу по «распылению» всего вещества шара на бесконечность (2 балла):

$$\int_0^A dA' = \frac{3\,G\,\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}^6}\int_0^{\mathfrak{R}} r^4\, dr, \;\; \Rightarrow \;\; A = \frac{3\,G\,\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}^6}\frac{\mathfrak{R}^5}{5}. \tag{18}$$

При вычислении последнего определенного интеграла мы учли известный результат для табличного неопределенного интеграла:

$$\int r^4\, dr = \frac{r^5}{5} + \text{const},$$

а также использовали формулу Ньютона-Лейбница. Полученная работа равна работе потенциальных гравитационных сил, взятой со знаком минус, то есть $A = -A_G$. С другой стороны, работа потенциальных сил равна изменению потенциальной энергии, взятой со знаком минус: $A_G = (U_G^{(i)} - U_G^{(f)})$. При распылении вещества шара на бесконечность взаимодействие между всеми его частицами прекращается. Следовательно, $U_G^{(f)} = 0$. В итоге получаем окончательное выражение для гравитационной потенциальной энергии шара (1 балл):

$$U_G^{(i)} = -\frac{3}{5}\frac{G\,\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}}. \tag{19}$$

Тогда искомая работа

$$A_{\text{LB}} = \frac{3}{5}\frac{G\,\mathfrak{M}_\oplus^2}{\mathfrak{R}_\oplus} + \frac{G\,\mathfrak{M}_\oplus\,\mathfrak{M}_\odot}{a_\oplus},$$

где $\mathfrak{M}_\oplus, \mathfrak{R}_\oplus, a_\oplus$ – масса, радиус и большая полуось орбиты Земли соответственно; $\mathfrak{M}_\odot$ – масса Солнца. С другой стороны, $A_{\text{LB}} = W_{\text{LB}}$, где W_{LB} – энергия светового пучка лазерной пушки. В итоге получаем (2 балла)

$$W_{\text{LB}}^\oplus = \frac{3}{5}\frac{G\,\mathfrak{M}_\oplus^2}{\mathfrak{R}_\oplus} = 2.24\cdot 10^{32}\ \text{Дж}, \;\; W_{\text{LB}}^\odot = \frac{G\,\mathfrak{M}_\oplus\,\mathfrak{M}_\odot}{a_\oplus} = 5.30\cdot 10^{33}\ \text{Дж},$$

$$W_{\text{LB}} = W_{\text{LB}}^{\oplus} + W_{\text{LB}}^{\odot} = 5.52 \cdot 10^{33} \text{ Дж}. \tag{20}$$

3. Минимальные количества дней для зарядки лазерной пушки от Солнца для уничтожения Земли без учета гравитации Солнца/с учетом гравитации Солнца представляются в виде (2 балла):

$$t_{\min}^{(1)} = \frac{W_{\text{LB}}^{\oplus}}{L_{\odot}} = 5.861 \cdot 10^5 \text{ с} = 6.78 \text{ сут}, \quad t_{\min}^{(2)} = \frac{W_{\text{LB}}}{L_{\odot}} = 1.444 \cdot 10^7 \text{ с} = 167.1 \text{ сут}.$$

№9. «Нереальный Юпитер»

1. С использованием линейки по фотографии определим диаметр Юпитера ($d_J = 27.5$ мм, здесь и далее Ваши значения измеренных величин по фотографии могут отличаться от указанных автором), радиусы внутренней ($r_{\min} = 19$ мм) и внешней ($r_{\max} = 43$ мм) границ колец по фотографии. (1 балл) Далее составим пропорции вида (1+1 балл):

$$\left\{ \begin{array}{l} d_J \to 2 \times \mathfrak{R}_J, \\ r_{\min} \to \mathfrak{R}_{\min}, \end{array} \right\}, \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{R}_{\min} = \mathfrak{R}_J \left(\frac{2\, r_{\min}}{d_J} \right) = 98800 \text{ км}, \tag{21}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_J \to 2 \times \mathfrak{R}_J, \\ r_{\max} \to \mathfrak{R}_{\max}, \end{array} \right\}, \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{R}_{\max} = \mathfrak{R}_J \left(\frac{2\, r_{\max}}{d_J} \right) = 223575 \text{ км}, \tag{22}$$

здесь $\mathfrak{R}_{\min}, \mathfrak{R}_{\max}$ – радиусы внутренней и внешней границ колец Юпитера, $\mathfrak{R}_J = 71492$ км – экваториальный радиус Юпитера (кольца лежат, очевидно, в плоскости экватора планеты).

Вычисляя радиус сферы Хилла по формуле (1), с использованием справочных данных, в результате получаем $\mathfrak{R}_H = 53.12$ млн км (1 балл). Поскольку $\mathfrak{R}_{\min}$, $\mathfrak{R}_{\max} < \mathfrak{R}_H$, значит в действительности у Юпитера могут быть такие кольца. (1 балл)

2. Согласно (21)-(22), радиусы орбит частиц таких колец заключены в интервале:

$$\mathfrak{R}_{\min} \leq \mathfrak{R}_{\text{rings}} \leq \mathfrak{R}_{\max}, \quad \text{или} \quad 98800 \text{ км} \leq \mathfrak{R}_{\text{rings}} \leq 223575 \text{ км}. \tag{23}$$

Для определения интервала допустимых значений (ИДЗ) для сидерического периода обращения вокруг Юпитера, рассмотрим движение пылевой частицы кольца по круговой орбите и запишем второй закон Ньютона для нее:

$$\mathfrak{M}_p \cdot \vec{a}_p = \vec{F}_{\text{at}},$$

здесь $\vec{a}_p$ — вектор ускорения пылевой частицы, $\vec{F}_{\text{at}}$ — вектор силы притяжения, приложенной к пылевой частице со стороны Юпитера. В проекциях на координатную ось OX (см. рис. 10):

$$\mathfrak{M}_p \cdot a_p = F_{\text{at}}. \tag{24}$$

С учетом того, что a_p является центростремительным ускорением, определяемым выражением вида:

$$a_p = \frac{v^2}{R},$$

а сила притяжения определяется законом всемирного тяготения:

$$F_{\text{at}} = \frac{G \cdot \mathfrak{M}_J \cdot \mathfrak{M}_p}{R^2},$$

где G – универсальная гравитационная постоянная, уравнение (24) можно переписать в виде:

$$\mathfrak{M}_p \frac{v^2}{R} = \frac{G \cdot \mathfrak{M}_J \cdot \mathfrak{M}_p}{R^2}. \qquad (25)$$

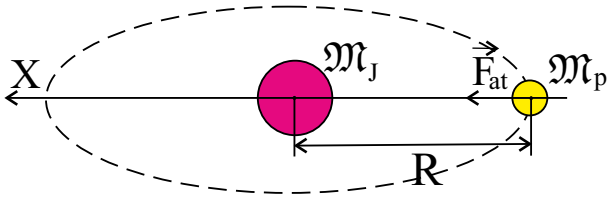


Рис. 10. К определению сидерического периода обращения частицы кольца.

Поскольку частица движется равномерно, то

$$v = \frac{2\pi R}{T},$$

где T — искомый период обращения частицы. Следовательно, соотношения (25) можно представить в виде (1 балл):

$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{G \cdot \mathfrak{M}_J}{R} \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{G \cdot \mathfrak{M}_J}} = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{G \cdot \mathfrak{M}_J}}. \qquad (26)$$

С использованием последнего результата и интервала (21), получаем следующий ИДЗ для сидерического периода (1 балл):

$$4.81 \text{ час} \leq T \leq 16.39 \text{ час}. \qquad (27)$$

3. Линейная орбитальная скорость и центростремительное ускорение частицы кольца определяются, согласно (25), выражениями вида (1+1 балл):

$$V = \sqrt{\frac{G \cdot \mathfrak{M}_J}{R}}, \quad a_p = \frac{G \cdot \mathfrak{M}_J}{R^2}. \qquad (28)$$

Выполняя численные расчеты, получаем следующие ИДЗ для искомых величин (1+1 балл):

$$23.81 \text{ км/с} \leq V \leq 35.81 \text{ км/с}, \quad 2.54 \text{ м/с}^2 \leq a_p \leq 12.98 \text{ м/с}^2. \qquad (29)$$

4. Из сопоставления сидерического периода ($P_J = 9.924$ часа, согласно справочным данным) вращения Юпитера вокруг своей оси с интервалом (27) и непрерывности самих колец, приходим к заключению, что в кольцах должны быть частицы, период обращения которых равен периоду P_J. (1 балл)

Из результатов (26), (28) следуют явные выражения для радиуса орбиты и орбитальной скорости движения таких частиц (1+1 балл):

$$R_p = \sqrt[3]{\frac{G \cdot \mathfrak{M}_J\, P_J^2}{4\pi^2}} = 160000 \text{ км}, \quad V_p = \sqrt[3]{\frac{2\pi\, G \cdot \mathfrak{M}_J}{P_J}} = 28.14 \text{ км/с}. \qquad (30)$$

№10. «Экзо-Земля с кратной орбитой и двойное Солнце»

1. Для определения радиуса орбиты одного из компонентов двойной звезды воспользуемся 3-м обобщенным законом Кеплера (2 балла):

$$\frac{(\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_\odot)T_*^2}{(\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_\oplus)T_\oplus^2} = \frac{(2a_*)^3}{a_\oplus^3}, \quad \Rightarrow$$

$$a_* = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\, a_\oplus \left(\frac{T_*}{T_\oplus}\right)^{2/3} = 1.23 \cdot 10^{-2} \text{ а.е.} = 1.841 \cdot 10^6 \text{ км}, \qquad (31)$$

здесь $\mathfrak{M}_\odot, \mathfrak{M}_\oplus$ – масса Солнца и Земли соответственно, $T_\oplus, a_\oplus$ – звездный год и радиус орбиты Земли.

2. Поскольку $2a_* \ll r_0 = 1$ а.е., значит данную тесную двойную систему звезд на масштабах r_p можно рассматривать как одну материальную точку, следовательно к паре "двойная звезда-экзопланета" можно вновь применить 3-й закон Кеплера (2 балла):

$$\frac{(2\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_\oplus)T_p^2}{(\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_\oplus)T_\oplus^2} = \frac{r_0^3}{a_\oplus^3}, \quad \Rightarrow \quad T_p = \frac{\sqrt{2}}{2}\, T_\oplus \left(\frac{r_0}{a_\oplus}\right)^{3/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, T_\oplus = 258.28 \text{ сут}. \qquad (32)$$

Поскольку орбита экзопланеты близка круговой, то орбитальную скорость можно определить выражением вида (1 балл):

$$V_p = \frac{2\,\pi\, r_0}{T_p} = \sqrt{2}\frac{2\,\pi\, a_\oplus}{T_\oplus} = \sqrt{2}V_\oplus = 42.12 \text{ км/с}, \quad \text{где} \qquad (33)$$

$$V_\oplus = \frac{2\,\pi\, a_\oplus}{T_\oplus} = 29.78 \text{ км/с},$$

здесь $V_\oplus$ – средняя орбитальная (первая космическая) скорость Земли.

3. Запишем второй закон Ньютона для экзо-Земли (1 балл):

$$\mathfrak{M}_\oplus \vec{a}_p = -\frac{G\,\mathfrak{M}_\oplus\,\mathfrak{M}_\odot}{r_1^3}\vec{r}_1 - \frac{G\,\mathfrak{M}_\oplus\,\mathfrak{M}_\odot}{r_2^3}\vec{r}_2, \qquad (34)$$

здесь $\mathfrak{M}_\oplus$ – масса экзопланеты (Земли), $\mathfrak{M}_\odot$ – масса каждого компонента двойной системы (Солнца); $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ – радиусы-векторы экзопланеты с позиций компонентов двойной системы (см. рис. 11.а). Введем далее декартову систему координат OXY так, как показано на рис. 11.а), начало отсчета которой совпадает с центром масс двойной звезды. Для дальнейших расчетов

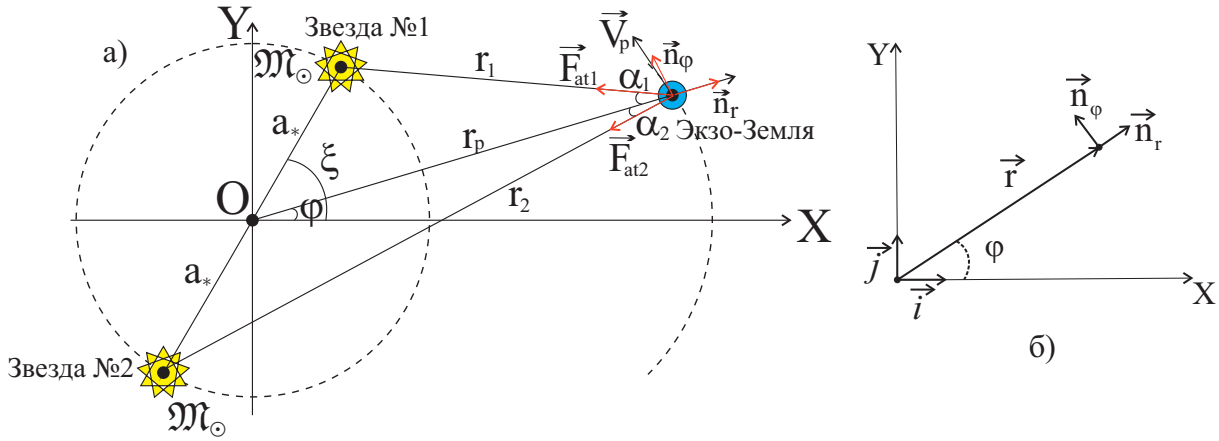


Рис. 11. К определению взаимного расположения экзо-Земли и двойного солнца, а также параметров этой системы тел.

перейдем к полярной системе координат (r, φ), см. рис. 11.б), посредством выражений вида:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{35}$$

Единичные орты полярной системы координат связаны с ортами декартовой системы посредством системы выражений:

$$\vec{n}_r = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}, \quad \vec{n}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}. \tag{36}$$

Запишем ускорение экзо-Земли в проекциях на орты полярной системы:

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(r_p\,\vec{n}_r)\right) = \frac{d}{dt}(\dot{r}_p\,\vec{n}_r + r_p\,\dot{\vec{n}}_r) = \ddot{r}_p\,\vec{n}_r + \dot{r}_p\,\dot{\vec{n}}_r + \dot{r}_p\,\dot{\varphi}\,\vec{n}_\varphi +$$

$$+ r_p\,\ddot{\varphi}\,\vec{n}_\varphi + r_p\,\dot{\varphi}\,\dot{\vec{n}}_\varphi = (\ddot{r}_p - r_p\,\dot{\varphi}^2)\vec{n}_r + (2\dot{r}_p\,\dot{\varphi} + r_p\,\ddot{\varphi})\vec{n}_\varphi. \tag{37}$$

В последних выражениях точками отмечены производные от величин по времени и учтено, что

$$\dot{\vec{n}}_r = \frac{d}{dt}\left(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}\right) = (-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j})\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\,\vec{n}_\varphi, \tag{38}$$

$$\dot{\vec{n}}_\varphi = \frac{d}{dt}\left(-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}\right) = (-\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j})\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}\,\vec{n}_r. \tag{39}$$

Запишем уравнение (34) в проекциях на орты полярной системы координат (1 балл):

$$\ddot{r}_p - r_p\,\dot{\varphi}^2 = -\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{r_1^2}\cos\alpha_1 - \frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{r_2^2}\cos\alpha_2, \tag{40}$$

$$2\dot{r}_p\,\dot{\varphi} + r_p\,\ddot{\varphi} = \frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{r_1^2}\sin\alpha_1 - \frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{r_2^2}\sin\alpha_2. \tag{41}$$

С использованием теоремы косинусов представим выражения для r_1 и r_2:

$$r_1 = \sqrt{a_*^2 + r_p^2 - 2a_*\,r_p\,\cos(\xi - \varphi)} = r_p\sqrt{1 + x^2 - 2x\,\cos(\xi - \varphi)}, \tag{42}$$

$$r_2 = \sqrt{a_*^2 + r_p^2 + 2a_*\,r_p\,\cos(\xi - \varphi)} = r_p\sqrt{1 + x^2 + 2x\,\cos(\xi - \varphi)}, \tag{43}$$

где $x = \frac{a_*}{r_p} = 0.0123 \ll 1$. С использованием теорем синусов и косинусов для треугольников «Звезда 1-экзо-Земля-центр масс» и «Звезда 2-экзо-Земля-центр масс» определим синусы и косинусы углов α_1 и α_2:

$$\frac{\sin\alpha_1}{a_*} = \frac{\sin(\xi-\varphi)}{r_1}, \;\Rightarrow\; \sin\alpha_1 = \frac{a_*}{r_1}\sin(\xi-\varphi) = \frac{x\,\sin(\xi-\varphi)}{\sqrt{1+x^2-2x\,\cos(\xi-\varphi)}},$$
$$\frac{\sin\alpha_2}{a_*} = \frac{\sin(\xi-\varphi)}{r_2}, \;\Rightarrow\; \sin\alpha_2 = \frac{a_*}{r_2}\sin(\xi-\varphi) = \frac{x\,\sin(\xi-\varphi)}{\sqrt{1+x^2+2x\,\cos(\xi-\varphi)}},$$
$$\cos\alpha_1 = \frac{r_1^2+r_p^2-a_*^2}{2\,r_1\,r_p} = \frac{1-x\,\cos(\xi-\varphi)}{\sqrt{1+x^2-2x\,\cos(\xi-\varphi)}},$$
$$\cos\alpha_2 = \frac{r_2^2+r_p^2-a_*^2}{2\,r_2\,r_p} = \frac{1+x\,\cos(\xi-\varphi)}{\sqrt{1+x^2+2x\,\cos(\xi-\varphi)}}.$$

В итоге система уравнений (44)-(45) запишется в виде (1 балл):

$$\ddot{r}_p - r_p\,\dot{\varphi}^2 = -a_0\left[\frac{1-x\,\cos(\xi-\varphi)}{(1+x^2-2x\,\cos(\xi-\varphi))^{3/2}} + \frac{1+x\,\cos(\xi-\varphi)}{(1+x^2+2x\,\cos(\xi-\varphi))^{3/2}}\right], \quad (44)$$
$$2\dot{r}_p\,\dot{\varphi} + r_p\,\ddot{\varphi} = a_0\left[\frac{x\,\sin(\xi-\varphi)}{(1+x^2-2x\,\cos(\xi-\varphi))^{3/2}} - \frac{x\,\sin(\xi-\varphi)}{(1+x^2+2x\,\cos(\xi-\varphi))^{3/2}}\right], \quad (45)$$

здесь $a_0 = G\,\mathfrak{M}_\odot/r_p^2 \approx G\,\mathfrak{M}_\odot/r_0^2$. Заметим, что при $x \to 1$ последняя система уравнений представляется в виде (1 балл):

$$\ddot{r}_0 - r_0\,\dot{\varphi}_0^2 = -2a_0, \quad (46)$$
$$2\dot{r}_0\,\dot{\varphi}_0 + r_0\,\ddot{\varphi}_0 = 0. \quad (47)$$

Последняя система уравнений определяет законы движения $(r_0(t),\, \varphi_0(t))$ экзопланеты в гравитационном поле точечной двойной звезды. Решение последней есть суть *нерелятивистской задачи Кеплера*, которое можно найти в учебной литературе[1]. Закон движения экзопланеты в случае круговой орбиты можно представить в виде:

$$r_0 = \text{const}, \;\; \varphi_0 = \omega_0\,t, \;\; \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}.$$

Введем новое представление для (r_p, φ):

$$r_p = r_0 + \rho, \;\; \rho \ll r_0, \;\; \varphi = \varphi_0 + \phi, \;\; \phi \ll \varphi. \quad (48)$$

В итоге левые части уравнений (44)-(45) можно упростить к виду (1 балл):

$$\ddot{\rho} - (r_0+\rho)\,(\omega_0+\dot{\phi})^2 = \ddot{\rho} - r_0\,\omega_0^2 - 2\,r_0\,\omega_0\,\dot{\phi} - r_0\,\dot{\phi}^2 - \rho(\omega_0+\dot{\phi})^2 \approx \ddot{\rho} - r_0\,\omega_0^2,$$
$$2\dot{\rho}(\omega_0+\dot{\phi}) + (r_0+\rho)\ddot{\phi} \approx r_0\,\ddot{\phi}, \quad (49)$$

[1] См., например, Филиппов, Ю. П. Задачи астрономических олимпиад Самарской области для учащихся 7-11 классов. 2018-2019: учебное пособие / Ю. П. Филиппов / – Самара: СДДЮТ, 2019. – 172 с.

здесь учтено, что ρ, ϕ и их первые производные являются малыми величинами, и удержаны лишь лидирующие слагаемые. Далее упростим правые части тех же уравнений с учетом малости параметра x. Рассмотрим первое слагаемое в правой части уравнения (44):

$$S_1 = (1-x\,\cos(\xi-\varphi))(1+x^2-2x\,\cos(\xi-\varphi))^{-3/2}.$$

Второй множитель последнего выражения представляет собой бином ньютона со структурой $(1+z)^\alpha$, которое при малости z ($z \ll 1$), можно приближенно записать в виде:

$$(1+z)^\alpha \approx 1+\alpha\, z+\frac{1}{2}(\alpha^2-\alpha)z^2.$$

Тогда слагаемое S_1 можно записать в виде:

$$S_1 \approx (1-x\,\cos(\xi-\varphi))\left(1-\frac{3}{2}(x^2-2x\,\cos(\xi-\varphi))+\frac{15}{8}(x^2-2x\,\cos(\xi-\varphi))^2\right)\approx$$

$$\approx 1+2\cos(\xi-\varphi)x+\left(-\frac{3}{2}+\frac{9}{2}\cos^2(\xi-\varphi)\right)x^2. \qquad (50)$$

В последнем выражении были удержаны лишь слагаемые первой и второй степени по малому параметру x. Аналогично рассуждая, получаем итоговое выражение для второго слагаемого:

$$S_2 \approx 1-2\cos(\xi-\varphi)x+\left(-\frac{3}{2}+\frac{9}{2}\cos^2(\xi-\varphi)\right)x^2. \qquad (51)$$

В итоге уравнение (44) можно записать в виде:

$$\ddot{\rho}-r_0\,\omega_0^2=-a_0\left(2+\left(-3+9\cos^2(\xi-\varphi)\right)x^2\right). \qquad (52)$$

Вычтем из последнего уравнения уравнение (46), с учетом $\ddot{r}=0$. В итоге получаем дифференциальное уравнение для переменной ρ (1 балл):

$$\ddot{\rho}=-a_0x^2\left(-3+9\cos^2(\xi-\varphi)\right),\ \Rightarrow\ \ddot{\rho}=-a_0x^2\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{2}\cos 2(\omega_*-\omega_p)t\right), \qquad (53)$$

здесь $\omega_*=2\pi/T_*$. Проинтегрируем последнее уравнение по времени, полагая, что $\dot{\rho}(0)=0$ (1 балл):

$$\int_{\dot{\rho}(0)}^{\dot{\rho}} d\dot{\rho}=-a_0x^2\int_0^t\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{2}\cos 2(\omega_*-\omega_p)t\right)dt,\ \Rightarrow\ \boxed{\dot{\rho}=-a_0x^2\left(\frac{3}{2}t+\frac{9}{4\omega_S}\sin 2\omega_S t\right)}, \qquad (54)$$

здесь $\omega_S=\omega_*-\omega_p=2\pi/S$, где $S=T_p\,T_*/(T_p-T_*)$ – синодический период движения двойной звезды с позиции гипотетического наблюдателя, расположенного на поверхности экзопланеты. Заметим, что $\dot{\rho}=V_r$ – радиальная

скорость экзопланеты, а результат (54) является законом изменения радиальной проекции орбитальной скорости экзопланеты. Еще раз проинтегрируем последний результат по времени в предположении $\rho(0) = \rho_0$:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} d\rho = -a_0 x^2 \int_0^t \left(\frac{3}{2}t + \frac{9}{4\omega_S}\sin 2\omega_S t\right) dt, \Rightarrow$$

$$\rho = \rho_0 - a_0 x^2 \left(\frac{3}{4}t^2 - \frac{9}{8\omega_S^2}(\cos 2\omega_S t - 1)\right). \tag{55}$$

Тогда закон изменения величины расстояния r_p от экзопланеты до центра масс двойной звезды с течением времени представляется в виде (1 балл):

$$\boxed{r_p = r_0 + \rho_0 - a_0 x^2 \left(\frac{3}{4}t^2 + \frac{9}{8\omega_S^2}(\cos 2\omega_S t - 1)\right)}. \tag{56}$$

Заметим, что искомое расстояние плавно уменьшается с течением времени по параболическому закону, при этом наблюдаются гармонические осцилляции. Уменьшение расстояния обусловлено «стягиванием» притяжением двойной звезды экзопланеты на стабильную орбиту, которая расположена ближе к звезде, чем исходное положение экзопланеты. Гармонические осцилляции обусловлены периодическим изменением гравитационного поля двойной звезды.

4. Тангенциальную проекцию скорости экзопланеты можно представить в виде (1 балл):

$$V_\tau \approx \omega_0 r_0 + r_0 \dot{\phi}. \tag{57}$$

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, преобразуем правую часть уравнения (45). В итоге данное уравнение, с учетом (49), можно представить так

$$r_0 \ddot{\phi} = 3a_0 x^2 \sin 2\omega_S t. \tag{58}$$

Проинтегрируем последнее уравнение по времени, предполагая, что $\dot{\phi}(0) = \upsilon$:

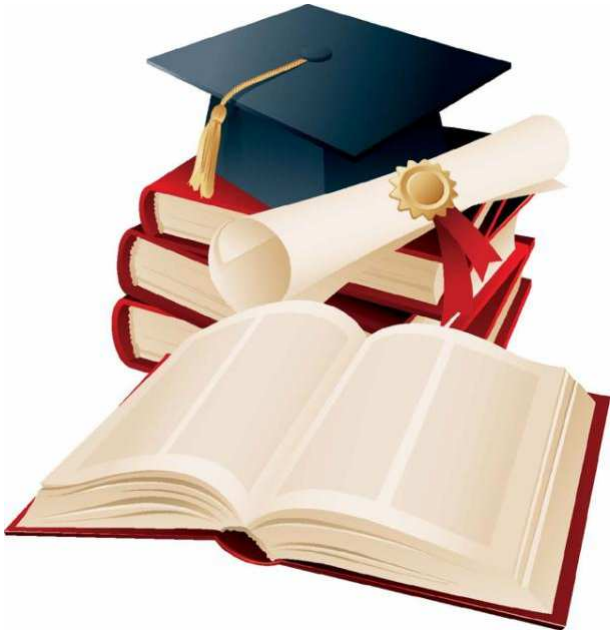
$$\int_{\upsilon}^{\dot{\phi}} d\dot{\phi} = 3\frac{a_0}{r_0} x^2 \int_0^t \sin 2\omega_S t dt, \Rightarrow \dot{\phi} = \upsilon - \frac{3a_0 x^2}{2r_0\,\omega_S}(\cos 2\omega_S t - 1). \tag{59}$$

В итоге закон изменения тангенциальной проекции орбитальной скорости экзопланеты представляется в виде (1 балл):

$$\boxed{V_\tau \approx (\omega_0 + \upsilon)\, r_0 - \frac{3a_0 x^2}{2\omega_S}(\cos 2\omega_S t - 1)}. \tag{60}$$

Очевидно, данная проекция скорости изменяется со временем по гармоническому закону относительно некоторой постоянной величины.

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ



А.1. Основные физические и астрономические постоянные

- *Гравитационная постоянная* – $G = 6.674 \cdot 10^{-11}$ м^3· кг$^{-1} \cdot c^{-2}$
- *Скорость света в вакууме* – $c = 2.998 \cdot 10^8$ м/с
- *Универсальная газовая постоянная* – $R = 8.31$ кг·м^2· с$^{-2}$·К$^{-1}$· моль$^{-1}$
- *Постоянная Стефана-Больцмана* – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ кг·с$^{-3}$·К$^{-4}$
- *Постоянная Авогадро* – $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
- *Масса протона* – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг
- *Масса электрона* – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ кг
- *Астрономическая единица* – 1 а.е. $= 1.496 \cdot 10^{11}$ м
- *Парсек* – 1 пк = 206265 а.е. $= 3.086 \cdot 10^{16}$ м
- *Постоянная Хаббла* – $H = 72$ км·с$^{-1}$·Мпк$^{-1}$

А.2. Данные о Солнце

- *Радиус* – $6.955 \cdot 10^5$ км
- *Масса* – $1.989 \cdot 10^{30}$ кг
- *Светимость* – $3.827 \cdot 10^{26}$ Вт
- *Спектральный класс* – G2
- *Видимая звездная величина* – -26.74^m
- *Абсолютная болометрическая звездная величина* – $+4.83^m$
- *Показатель цвета (B-V)* – $+0.67^m$
- *Эффективная температура* – 5778 К
- *Средний горизонтальный параллакс* – $8.794''$
- *Солнечная постоянная (во всем спектре) на расстоянии Земли* – 1361 Вт/м^2
- *Солнечная постоянная (в видимом свете) на расстоянии Земли* – 600 Вт/м^2

А.3. Данные о Земле

- *Эксцентриситет орбиты* – 0.017
- *Тропический год* – 365.24219 сут
- *Средняя орбитальная скорость* – 29.8 км/с
- *Период вращения* – 23 часа 56 минут 04 секунды
- *Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0* – $23^\circ\, 26'\, 21.45''$

- *Средний по объему радиус* – 6371.0 км
- *Средний экваториальный радиус* – 6378.14 км
- *Длина земного меридиана* – 20004.276 км
- *Полярный радиус* – 6356.77 км
- *Масса* – $5.974 \cdot 10^{24}$ кг
- *Средняя плотность* – 5.52 г·см$^{-3}$
- *Объемный состав атмосферы* – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim$ 1%)

А.4. Данные о Луне

- *Среднее расстояние от Земли* – 384400 км
- *Минимальное расстояние от Земли* – 356410 км
- *Максимальное расстояние от Земли* – 406700 км
- *Эксцентриситет орбиты* – 0.055
- *Наклон плоскости орбиты к эклиптике* – $5°09'$
- *Сидерический (звездный) период обращения* – 27.321662 сут
- *Синодический период обращения* – 29.530589 сут
- *Радиус* – 1738 км
- *Масса* – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или 1/81.3 массы Земли
- *Средняя плотность* – 3.34 г·см$^{-3}$
- *Визуальное геометрическое альбедо* – 0.12
- *Видимая звездная величина в полнолуние* -12.7^m

А.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin\alpha \pm x\,\cos\alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos\alpha \mp x\,\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg}\alpha \pm \frac{x}{\cos^2\alpha};$$

$$(1+x)^n \approx 1 + n\,x;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.

А.6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.		градусы		сут
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

А.7. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли	г·см$^{-3}$		градусы		
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут†	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час†	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;
† – обратное вращение.

А.8. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см$^{-3}$	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	−12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685†	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.9. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике и график для уравнения времени

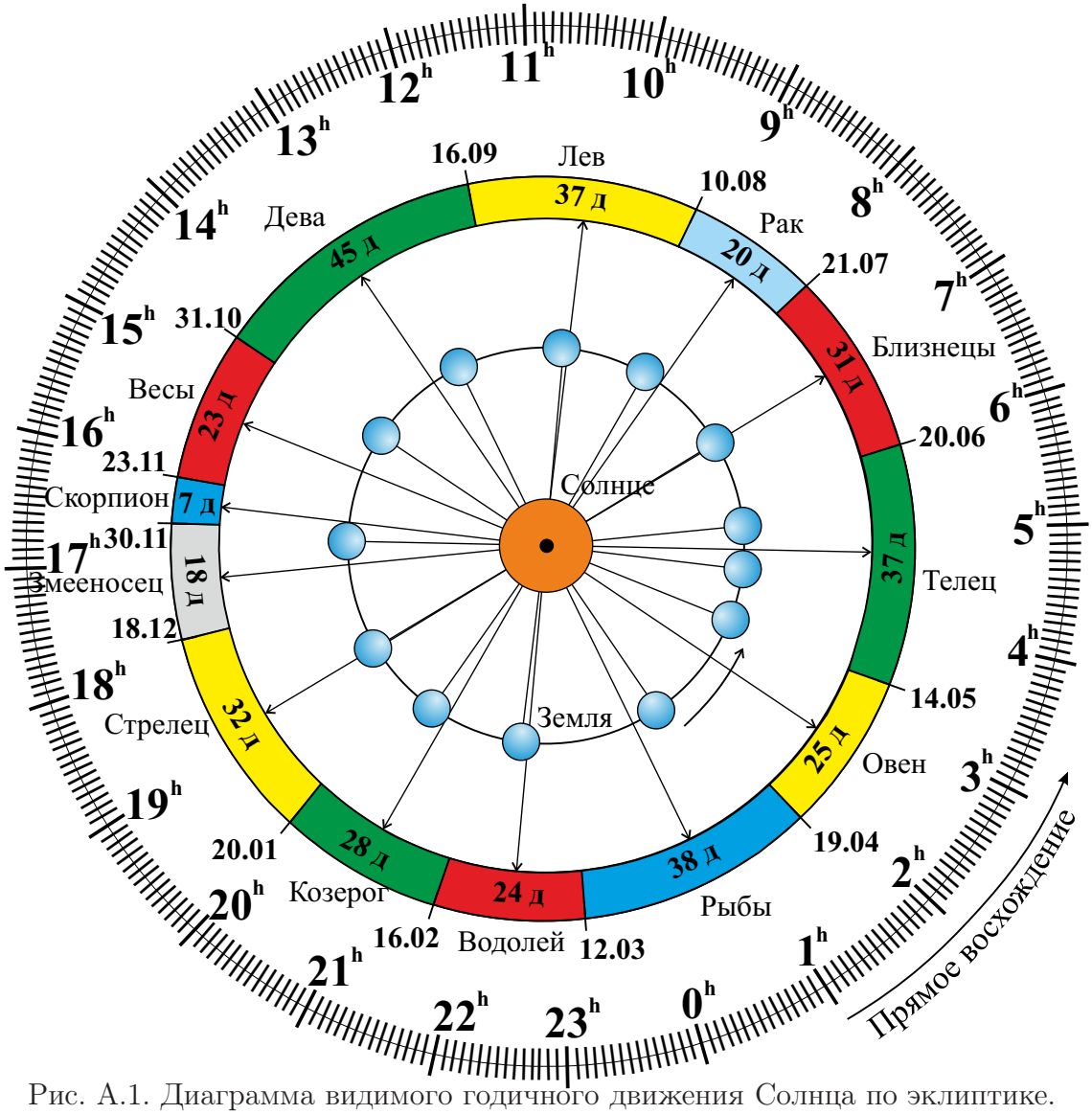


Рис. А.1. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике.

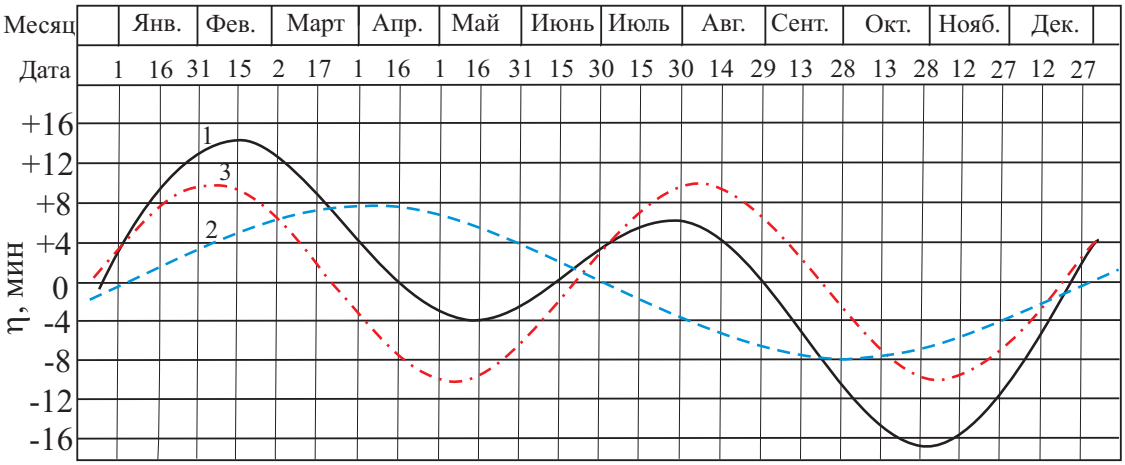


Рис. А.2. График уравнения времени: 1 – уравнение времени, 2 – уравнение центра, 3 – уравнение от наклона эклиптики.

А.10. Яркие звезды ночного небосвода

Топ-25 ярчайших звезд ночного небосвода

№	Название	α	δ	r, св.л.	m, ^{m}	M, ^{m}	Сп. кл.	Полушарие и № в нем
1	Сириус (α Большого Пса)	$06^h45^m9^s$	$-16°42'58''$	8.6	-1.46	1.4	A1Vm	Южное (01)
2	Канопус (α Киля)	$06^h23^m57^s$	$-52°41'45''$	310	-0.72	-5.53	A9II	Южное (02)
3	Ригил(A)/Толиман(B) (α Центавра AB)	$14^h39^m35^s$	$-60°50'15''$	4.3	-0.27	4.06	G2V + K1V	Южное (03)
4	Арктур (α Волопаса)	$14^h15^m40^s$	$19°10'57''$	36.7	-0.05	-0.3	K1.5IIIp	Северное (01)
5	Вега (α Лиры)	$18^h36^m56^s$	$38°47'01''$	25	0.03^v	0.6	A0Va	Северное (02)
6	Капелла (α Возничего)	$05^h16^m41^s$	$45°59'53''$	42.2	0,08	-0.5	G6III + G2III	Северное (03)
7	Ригель (β Ориона)	$05^h14^m32^s$	$-08°12'06''$	870	0.12^v	-7.84	B8Iae	Южное (04)
8	Процион (α Малого Пса)	$07^h39^m18^s$	$+05°13'30''$	11.4	0.38	2.6	F5IV-V	Северное (04)
9	Ахернар (α Эридана)	$01^h37^m43^s$	$-57°14'12''$	139	0.46	-1.3	B3Vnp	Южное (05)
10	Бетельгейзе (α Ориона)	$05^h55^m10^s$	$07°24'25''$	530	0.50^v	-5.14	M2Iab	Северное (05)
11	Хадар (β Центавра)	$14^h03^m49^s$	$-60°22'23''$	400	0.61^v	-5.4	B1III	Южное (06)
12	Альтаир (α Орла)	$19^h50^m47^s$	$08°52'06''$	16.8	0.77	2.3	A7Vn	Северное (06)
13	Акрукс (α Южного Креста)	$12^h26^m36^s$	$-63°05'57''$	321	0.77	-4.1	B0.5IV + B1Vn	Южное (07)
14	Альдебаран (α Тельца)	$04^h35^m55^s$	$16°30'33''$	65	0.85^v	-0.3	K5III	Северное (07)
15	Антарес (α Скорпиона)	$16^h29^m24^s$	$-26°25'55''$	610	0.96^v	-5.2	M1.5Iab	Южное (08)
16	Спика (α Девы)	$13^h25^m12^s$	$-11°09'41''$	250	0.98^v	-3.2	B1V	Южное (09)
17	Поллукс (β Близнецов)	$7^h45^m19^s$	$28°01'34''$	33.7	1.14	0.7	K0IIIb	Северное (08)
18	Фомальгаут (α Южной Рыбы)	$22^h57^m39^s$	$-29°37'20''$	25	1.16	2.0	A3Va	Южное (10)
19	Мимоза (β Южного Креста)	$12^h47^m43^s$	$-59°41'19''$	353	1.25^v	-4.0	B0.5III	Южное (11)

Топ-25 ярчайших звезд ночного небосвода (продолжение)

20	Денеб (α Лебедя)	$20^h41^m26^s$	$45°16'49''$	1550	1.25	−8.38	A2Ia	Северное (09)
21	Регул (α Льва)	$10^h08^m22^s$	$11°58'02''$	77	1.35	−0.5	B7Vn	Северное (10)
22	Адара (ε Большого Пса)	$06^h58^m38^s$	$-28°58'19''$	400	1.50	−4.8	B2II	Южное (12)
23	Кастор (α Близнецов)	$07^h34^m36^s$	$31°53'18''$	51.5	1.57	0.5	A1V + A2V	Северное (11)
24	Гакрукс (γ Южного Креста)	$12^h31^m10^s$	$-57°06'48''$	88	1.63^v	−1.2	M3.5III	Южное (13)
25	Шаула (λ Скорпиона)	$17^h33^m37^s$	$-37°06'13''$	365	1.63^v	−3.5	B1.5IV	Южное (14)

А.11. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела, болометрические поправки

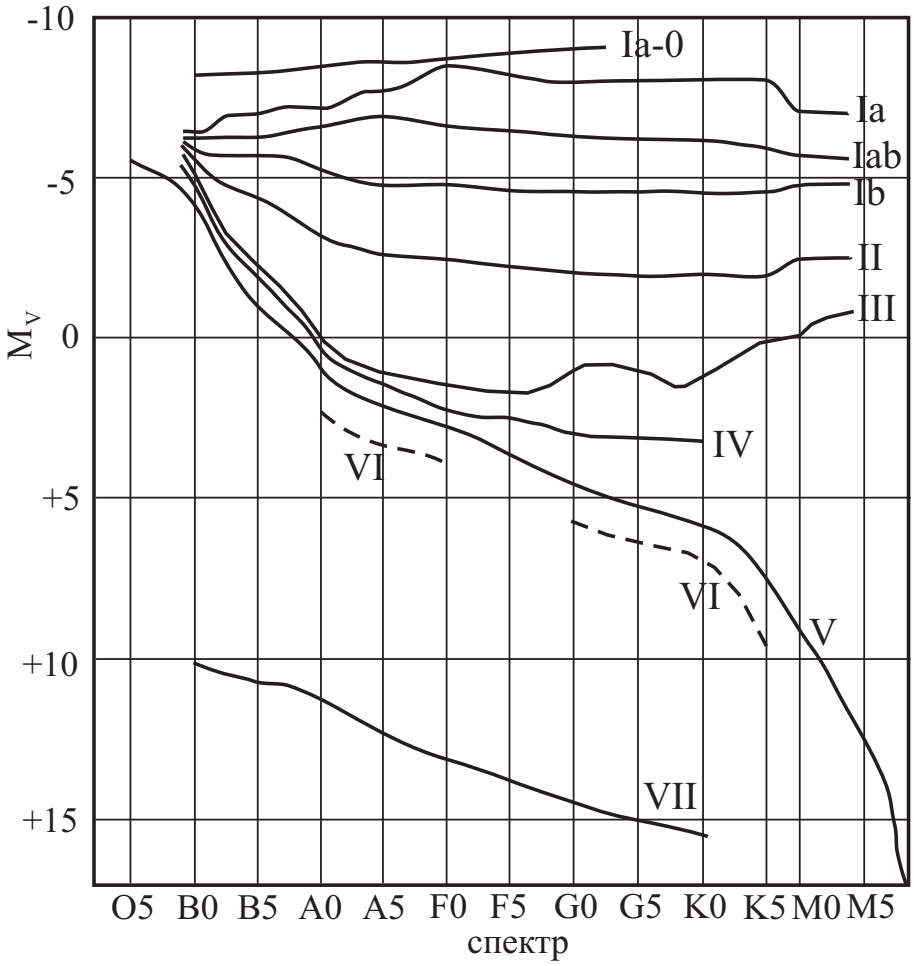


Рис. А.3. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.

Болометрические поправки ΔM_b

Спектр	ΔM_b	Спектр	ΔM_b		
			Гл. последовательность	Гиганты	Сверхгиганты
B0	– 2.70	F5	– 0.04	– 0.08	– 0.12
B5	– 1.58	F8	– 0.05	– 0.17	– 0.28
A0	– 0.72	G0	– 0.06	– 0.25	– 0.42
A5	– 0.31	G2	– 0.07	– 0.31	– 0.52
F0	– 0.09	G5	– 0.10	– 0.39	– 0.65
F2	– 0.04	G8	– 0.10	– 0.47	– 0.80
		K0	– 0.11	– 0.54	– 0.93
		K2	– 0.15	– 0.72	– 1.20
		K3	– 0.31	– 0.89	– 1.35
		K4	– 0.55	– 1.11	– 1.56
		K5	– 0.85	– 1.35	– 1.86
		M0	– 1.43	– 1.55	– 2.2
		M1	– 1.70	– 1.72	– 2.6
		M2	– 2.03	– 1.95	– 3.0
		M3	– 2.35	– 2.26	– 3.6
		M4	– 2.7	– 2.72	– 3.8
		M5	– 3.1	– 3.4	– 4.0

A.12. Статистика распределения звезд по звездным величинам

m	Кол-во звезд	m	Кол-во звезд	m	Кол-во звезд, $\times 10^6$	m	Кол-во звезд, $\times 10^6$
0^m	4	5^m	1602	10^m	0.340	15^m	36.9
1^m	15	6^m	4800	11^m	0.927	16^m	83.7
2^m	48	7^m	14000	12^m	2.46	17^m	182
3^m	171	8^m	42000	13^m	6.29	18^m	374
4^m	513	9^m	121000	14^m	15.5	19^m	733

Примечание: здесь указано количество звезд на всем небосводе, имеющих блеск ярче указанной звездной величины, согласно Star Numbers, 2001.

А.13. Таблица Менделеева

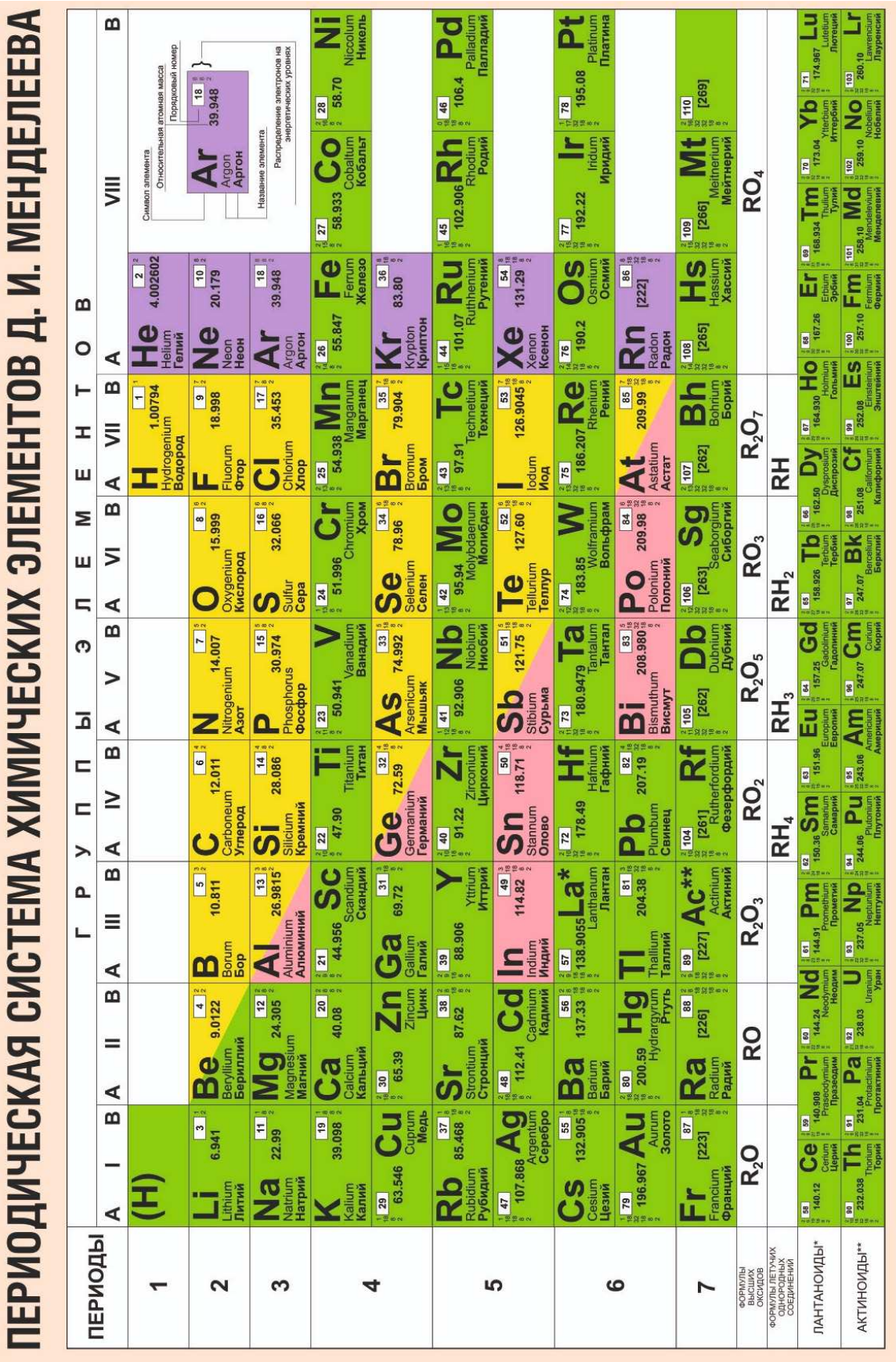


Рис. А.4. Таблица Менделеева.