

САМАРСКИЙ РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ДЛЯ ОДАРЕННЫХ ДЕТЕЙ  
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

---

---

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ  
КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ  
ОТКРЫТОЙ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ ОЛИМПИАДЫ  
ПО АСТРОНОМИИ им. Ф.А. БРЕДИХИНА  
СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ.  
СЕЗОН: 2023-2024, ТУР № 2

---

---



Самара, 2024 г.

## *Дорогие Друзья!*

Вашему вниманию в данном релизе представлены 10 оригинальных задач двух уровней сложности – «Новичок» (уровень А), «Знаток» (уровень В). Задачи составлены в соответствии с *Перечнем вопросов, рекомендуемых Центральной предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады школьников по астрономии для подготовки обучающихся 10-11 классов к решению задач ее различных этапов.*

**При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!**

**Ссылка:** «Условия и решения конкурсных задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2024 среди обучающихся 10-11 классов. Тур № 2». – <https://sites.google.com/site/samrasolimp/>

**Составитель:** – *Филиппов Юрий Петрович*, научный руководитель школы, методист СРЦОД, к.ф.-м.н., доцент кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева.

**Верстка в системе *ВТ<sub>E</sub>X*** – Филиппов Ю.П., Белозерская Л.Н.

**Памятка участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2024**

**1. Официальный сайт Астрошколы:**

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/>

**2. Официальная группа в VK:**

[vk.com/bredikhinolimp](https://vk.com/bredikhinolimp)

**3. Сроки подачи решений задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2024 тура № 2 на проверку:**

**15.02.2024-31.03.2024!!!**

**4. Электронный ящик ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2024:**

[samrasolimp@mail.ru](mailto:samrasolimp@mail.ru)

**5. Руководство зарегистрированного участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2024:**

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/maindocs>

ИЛИ

<https://vk.com/bredikhinolimp>

---

---

# УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

---

---



Дорогие Друзья!

Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2024, **внимательно** ознакомьтесь с «Руководством зарегистрированного участника ОМОА им Ф.А. Бредихина-2024»! Электронный адрес последнего указан в **Памятке участника.**

## Уровень «Новичок» (уровень А)

## №1. «О чудесной Капелле замолвите слово...»

1. Как известно, *Капелла* – одна из ярчайших звезд ночного небосвода. С использованием лишь экваториальных координат данной звезды ( $\alpha_* = 05^{\text{h}}17^{\text{m}}$ ,  $\delta_* = +46^{\circ}00'$ ) и карт звездного небосвода (см. приложение В), определите, какому созвездию она принадлежит? (1 балл)

## Варианты ответов:

а) Орион	б) Близнецы	в) Возничий
г) Кит	д) Большой Пес	е) Единорог

Является ли эта звезда заходящей в г. Самаре ( $\varphi_S = 53^{\circ}12'$ ,  $\lambda_S = 50^{\circ}06'$ ). (2 балла)

2. Капелла является физически кратной звездой, состоящей из четырех компонентов. Вторым по яркости компонентом (Капелла Ab) кратной системы является звезда желтого цвета с эффективной температурой поверхности 5730 К. К какому спектральному классу она относится? (1 балл)

## Варианты ответов:

а) O	б) B	в) A	г) F
д) G	е) K	ж) M	–

Оцените светимость компонента Капелла Ab (в светимостях Солнца), если его радиус составляет  $8.83 R_{\odot}$ , где  $R_{\odot}$  – радиус Солнца. (2 балла)

3. Звезде Капелла Ab приписывается индекс III при ее классификации по светимости. К какому классу светимости она относится? (1 балл)

## Варианты ответов:

а) Сверхгигант	б) Карлик	в) Субгигант	г) Субкарлик
д) Яркий гигант	е) Гигант	ж) Белый карлик	–

4. В какое время года условия наблюдений этой звезды являются оптимальными? Дайте развернутый ответ. (3 балла)

## Варианты ответов:

1. Весна	2. Лето	3. Осень	4. Зима
----------	---------	----------	---------

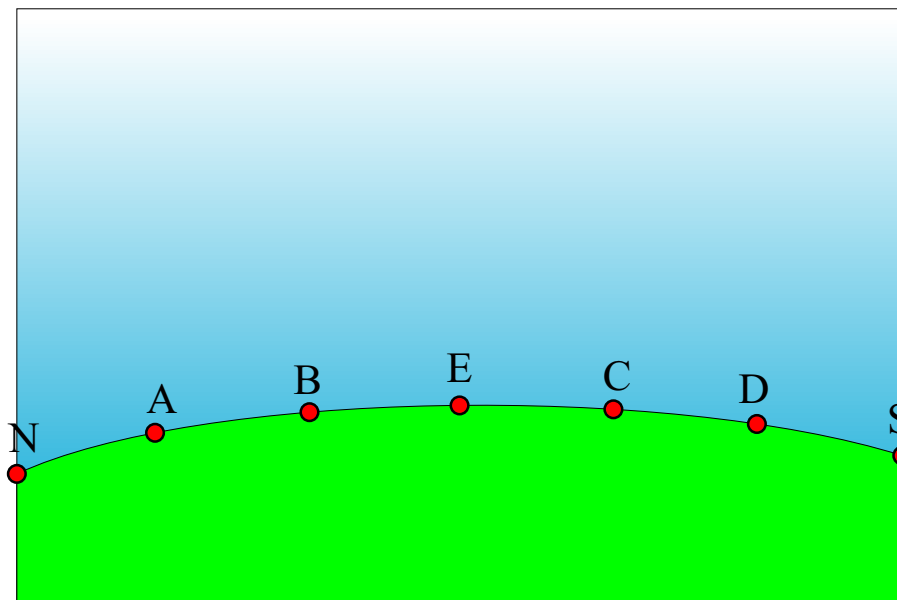


Рис. 1. К определению математического горизонта и его точек.

Следует отметить, что условия наблюдений небесного тела считаются *оптимальными*, если данное тело наблюдается в полночь (при этом Солнце опускается максимально глубоко под горизонт, т.е. находится в *нижней кульминации*) на наибольшей высоте над горизонтом (находится в своей *верхней кульминации*). Для ответа на данный вопрос Вам может оказаться полезной диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике (см. рис. А.1 приложения А).

### №2. «Точки восхода Солнца и его движение по небосводу»

На рис. 1 представлена восточная часть математического горизонта для жителя северного географического полушария с указанием сторон света: севера ( $N$ ), юга ( $S$ ), востока ( $E$ ) и четырех точек восхода Солнца (достигаемых последним в разные моменты года):  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , при этом две из них являются пограничными  $A$  и  $D$ . В какой точке математического горизонта восходит Солнце:

1. В день летнего солнцестояния? (1 балл)
2. В самый короткий день года в данной точке поверхности Земли? (1 балл)
3. 25 апреля каждого года? (1 балл)
4. Какой знак имеет склонение Солнце в тот момент, когда оно восходит в точке  $C$ ? (1 балл)
5. Чему равен азимут точки  $A$ , если полагать, что угловое расстояние между любыми двумя соседними точками горизонта одно и тоже? (1 балл)
6. Какому интервалу может принадлежать часовой угол Солнца в момент его восхода в точке  $B$ ? (1 балл)

#### Варианты ответов:

а) $0^h \div 6^h$	б) $6^h \div 12^h$	в) $12^h \div 18^h$	г) $18^h \div 24^h$
-------------------	--------------------	---------------------	---------------------

7. Оцените широту (в градусах) места наблюдения, где возможно такое

положение точек восхода Солнца. (2 балла)

8. Какова продолжительность пребывания Солнца над горизонтом, если оно восходит в точке  $C$ ? (1 балл)

**Варианты ответов:**

а) $0^h \div 6^h$	б) $6^h \div 12^h$	в) $12^h \div 18^h$	г) $18^h \div 24^h$
-------------------	--------------------	---------------------	---------------------

9. Какому интервалу должна принадлежать величина дуги суточной параллели, которую описывает Солнце над горизонтом, если она проходит через точку  $D$ ? (1 балл)

**Варианты ответов:**

а) $0^\circ \div 90^\circ$	б) $90^\circ \div 180^\circ$	в) $180^\circ \div 270^\circ$	г) $270^\circ \div 360^\circ$
----------------------------	------------------------------	-------------------------------	-------------------------------

### №3. «Кинематика движения планет в различных конфигурациях»

Как известно, классические планеты с поверхности Земли наблюдаются в различных конфигурациях. При этом в их движении есть ряд особенностей. Ответьте на следующие вопросы:

1. Какое движение имеет Меркурий относительно звезд в окрестности своей наибольшей восточной элонгации? (1 балл)

а) Прямое	б) Попытное
-----------	-------------

2. В какой конфигурации Венера находится в попытном движении относительно звезд? (1 балл)

а) Верхнее соединение	б) Нижнее соединение	в) Западная квадратура	г) Восточная элонгация
д) Соединение	е) Противостояние	ж) Восточная квадратура	з) Западная элонгация

Чему при этом равна ее геоцентрическая угловая скорость? Ответ представить в  $^\circ/\text{сут.}$  (2 балла)

3. В какой конфигурации Сатурн находится в попытном движении относительно звезд? (1 балл)

а) Верхнее соединение	б) Нижнее соединение	в) Западная квадратура	г) Восточная элонгация
д) Соединение	е) Противостояние	ж) Восточная квадратура	з) Западная элонгация

Чему при этом равна его геоцентрическая угловая скорость? Ответ представить в  $^\circ/\text{сут.}$  (2 балла)

4. Какое движение имеет Венера в верхнем соединении относительно Солнца? (1 балл)

а) Прямое	б) Попытное
-----------	-------------

Чему при этом равна ее геоцентрическая угловая скорость удаления от Солнца? Ответ представить в  $^\circ/\text{сут.}$  (2 балла)

5. Какое движение в соединении с Солнцем имеет Юпитер относительно центрального светила? (1 балл)

а) Прямое	б) Попытное
-----------	-------------

Чему при этом равна его геоцентрическая угловая скорость удаления от Солнца? Ответ представить в  $^{\circ}/\text{сут.}$  (2 балла)

#### №4. «Ночной астропейзаж»

На рис. 2 представлена фотография в стиле «ночной астропейзаж». Ответьте на следующие вопросы задачи.

1. Какие типы объектов космоса отчетливо просматриваются на фотографии? (1/3 балла за каждый правильно названный тип объекта)

а) Звезда	б) Астероид	в) Комета	г) Планета
д) Звездное скопление	е) Туманность	ж) Галактика	з) Скопление галактик

2. Оцените расстояние (в метрах) между автором фотографии и человеком в кадре в момент съемки. Заметим, что над каменным "островом" расположен Сатурн в окрестности своего противостояния (видимая звездная величина которого в этот момент составляла  $-0.24^m$ ). В руке позирующего человека лежал смартфон, который в момент получения кадра сделал вспышку в видимом свете мощностью в 1 Вт и продолжительностью  $10^{-2}$  с. При этом время выдержки кадра составило 30 с. (3 балла)

3. Определите высоту (в градусах) Сатурна над горизонтом, если рост позирующего человека составлял 1.92 м. (3 балла)

### Уровень «Знаток» (уровень В)

#### №5. «Минимальное количество кадров и область перехлестов»

Школьник, путешествуя по миру вместе с родителями, решил с помощью зеркальной фотокамеры (размеры прямоугольной матрицы которой –  $22.5 \times 15$  мм) выполнить ночную фотосъемку всего небосвода Земли. Вместе с камерой он использовал съемный объектив с фокусным расстоянием 135 мм. Определите:

1. Минимально возможное количество кадров  $N_{\min}$ , которые следует сделать школьнику на практике для достижения поставленной цели. (6 баллов)

2. При съемке небосвода неизбежно возникают перехлесты полей соседних кадров, когда на каждом из соседних кадров отображается один и тот же участок небосвода. Определите телесный угол, соответствующий суммарной области перехлестов всех  $N_{\min}$  кадров. Какую долю этот угол составляет от телесного угла, соответствующего всей небесной сфере? (5 баллов)

#### №6. «Луна на новой орбите»

На рис. 3 представлен коллаж, полученный простым наложением кадров. Кадр с городской панорамой был получен с помощью цифровой зеркальной





Рис. 2. Фоторабота «В погоне за звездами» от Ruben. Почетное место конкурса "Индийский астрофотограф 2023 года" в категории "Ночной пейзаж".

камеры с объективом, фокусное расстояние которого  $f_1 = 18$  мм. Кадр с Луной был получен с помощью той же камеры и объективом-телескопом с фокусным расстоянием  $f_2 = 1200$  мм. Предположим, что Луна приблизилась





Рис. 3. К определению коллажа "Фантастическая Луна над ночным городом". Автор: Александр Андреев.

к Земле (в результате внешнего воздействия) и ее угловые размеры в точности соответствуют представленному образу на фотографии. Ответьте на следующие вопросы. Определите:

1. Угловой диаметр Луны (в градусах) в этом случае. Какую часть небосвода при этом покрывает диск Луны? (3+1 балл)

2. Радиус (в км) новой круговой орбиты Луны и период (в часах) ее обращения вокруг центра масс системы «Земля-Луна», если полагать, что ее новый угловой диаметр соответствует ее наблюдению в подлунной точке. (2+2 балла)

3. Минимальный размер (в км) формы рельефа поверхности Луны, которая уже может быть разрешена невооруженным глазом, при ее наблюдении в подлунной точке (и надлежащем освещении солнечным светом), если разрешающая способность человеческого глаза равна  $1'$ . (2 балла)

4. Оцените, во сколько раз изменилось отношение освещенностей (при переходе Луны на новую орбиту), создаваемых областями поверхности Луны, непосредственно освещенными солнечным светом и видимыми в пепельном свете для земного наблюдателя? (2 балла)

#### **№7. «Приливы Солнца – источник разрушения двойных систем»**

Как известно, приливное действие массивного тела на протяженную физическую систему, благодаря неоднородности его гравитационного поля, может приводить к изменению формы последней и даже ее разрушению. Определи-

те, на каком минимальном гелиоцентрическом расстоянии (в км и а.е.) пара гравитирующих тел, еще сохранит свою целостность под действием приливных сил Солнца? В качестве такой пары рассмотрите: а) систему «Плутон-Харон», б) систему «Земля-Луна». (14 баллов)

### №8. «Эллипсоидальная планета и ее свойства»

Имеется планета массы  $\mathcal{M}_p$ , форма которой представляет собой эллипсоид вращения, вращающийся вокруг малой оси ( $OY$ , см. рис. 4) с периодом  $T$ . Доминирующая часть массы планеты сосредоточена в компактном ядре радиуса  $\mathcal{R}_N$  (см. рис. 4, здесь закрашенный кружок – компактное ядро), который существенно меньше известного значения экваториального радиуса планеты  $\mathcal{R}_e$ .

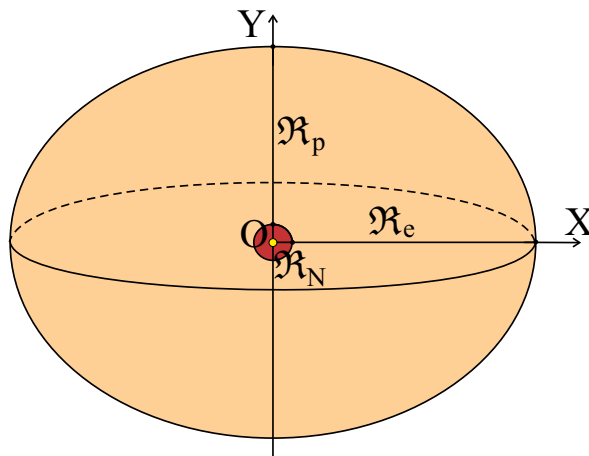


Рис. 4. К определению внутренней структуры

1. Определите полярный радиус тела планеты.

$\mathcal{R}_p$  планеты, как функцию известных параметров  $\mathcal{M}_p$ ,  $\mathcal{R}_e$ ,  $T$ . (6 баллов)

2. С использованием данных для экваториального и полярного радиусов восьми классических планет, представленных в табл. 1, вычислите экспериментальное значение  $k_{\text{exp}}$  сжатия планеты, определяемое по формуле: (2 балла)

$$k = \frac{\mathcal{R}_e - \mathcal{R}_p}{\mathcal{R}_e}. \quad (1)$$

3. Вычислите также модельное сжатие  $k_{\text{theor}}$ , полученное на основе данных значений  $\mathcal{R}_e$  и значений  $\mathcal{R}_p$ , вычисленных на основе результата 1-го пункта. Рассчитайте также относительное отклонение

$$\eta = \frac{|k_{\text{exp}} - k_{\text{theor}}|}{k_{\text{exp}}}. \quad (2)$$

Для какой классической планеты данная модель планеты дает наиболее точный прогноз для  $k_{\text{exp}}$ ? (3 балла)

4. Получите аналитическое выражение для средней массовой плотности планеты-эллипсоида  $\rho_{\text{el}}$  в терминах известных величин. Выполните численный анализ искомой величины для восьми классических планет. Для какой планеты ее осевое вращение приводит к наибольшему отклонению результата  $\rho_{\text{el}}$  от соответствующего значения плотности  $\rho_{\text{sh}}$  для планеты-шара радиуса  $\mathcal{R}_e$ ? Для ответа на последний вопрос следует проанализировать значения величины: (3 балла)

$$\xi = \frac{|\rho_{\text{el}} - \rho_{\text{sh}}|}{\rho_{\text{sh}}}. \quad (3)$$

Планета	$\mathcal{R}_e$ , км	$\mathcal{R}_p$ , км	$\mathcal{R}_p^{(\text{theor})}$ , км	$k_{\text{exp}}$	$k_{\text{theor}}$	$\eta$	$\rho_{\text{el}}$ , кг/м <sup>3</sup>	$\xi$
Меркурий	2439.7	2439.7						
Венера	6051.8	6051.8						
Земля	6378.1	6356.8						
Марс	3396.2	3376.2						
Юпитер	71492	66854						
Сатурн	60268	54364						
Уран	25559	24973						
Нептун	24764	24341						

Таблица 1. Основные экспериментальные/теоретические результаты для восьми классических планет.

Полученные результаты занесите в табл. 1.

### №9. «Съемка на азимутальной монтировке и "вращение поля"»

Один из самых бюджетных сетапов, используемых сегодня многими любителями в астрофотографии глубокого космоса, является астрокамера с кроп-матрицей размерами  $a \times b = 22.5 \times 15$  мм, объективом с фокусным расстоянием  $f = 135$  мм, установленная на азимутальной монтировке-роботе AZ Go-To, способной обеспечить длительное ведение/гидирование камеры за небесным объектом. Однако при съемке с монтировки именно такого типа возникает проблема "вращения поля". Суть данной проблемы в следующем. В результате суточного вращения Земли, протяженные участки небосвода с течением времени своего нахождения над горизонтом изменяют свою ориентацию по отношению к горизонту. Данная монтировка позволяет вести оптическую ось объектива камеры за снимаемым объектом, при этом ориентация матрицы не меняется по отношению к горизонту с течением времени. Это приводит к повороту снимаемого участка небосвода относительно оптической оси объектива камеры с течением времени. При съемке объектов глубокого космоса необходимо использование больших выдержек. Однако при длительной выдержке, поворот снимаемого участка небосвода в поле зрения камеры становится столь заметным, что точечные звезды превращаются в протяженные треки («потянутые звезды»). Последний феномен приводит к смазу всей картины и порче кадра. *Определите:*

1. Максимально возможное значение времени (в секундах) выдержки, при котором во всем поле кадра отсутствовали бы «потянутые звезды»? (7 баллов)

2. Угловой радиус (в градусах/угл. мин) круговой части поля зрения камеры, как функцию времени выдержки, в пределах которой отсутствуют «потянутые звезды». Постройте соответствующий график зависимости. (7 баллов)

Примечание. При решении задачи может оказаться полезным следствие теоремы Котельникова (Найквиста-Шеннона), согласно которому, для формирования элементарного цифрового изображения звезды необходимо использование не менее 3 пикселей матрицы.

**№10. «Луна на новой орбите-2»**

С использованием условия задачи №6 настоящего релиза и результатов ее решения

**Определите:**

1. Максимальную угловую скорость видимого перемещения Луны по небу для земного наблюдателя. (1 балл)

2. На каком расстоянии от центра Земли в этом случае должен располагаться центр масс данной пары тел? (1 балл)

3. Максимальную продолжительность полного солнечного затмения Луной на новой орбите. Здесь и далее следует полагать, что последняя лежит в плоскости эклиптики. (3 балла)

4. Максимальное возможное значение площадной фазы Луны (видимой с Земли), освещенной солнечным светом. (2 балла)

5. Максимальную продолжительность полного лунного затмения Землей на ее новой орбите. (3 балла)

**Оцените:**

6. Высоту приливного горба, возникающего в океане Земли под действием приливных сил Луны на новой орбите. (2 балла)

7. Предел Роша для Луны в гравитационном поле Земли. Выясните, способна ли Луна, в принципе, пребывать на таком расстоянии от Земли, не теряя своей целостности. (3 балла)

В расчетах следует полагать все орбиты круговыми, лежащими в одной плоскости. Продолжительность звездного года считать неизменной.

---

---

---

---

# РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

---

---





## Уровень «Новичок» (уровень А)

### №1. «О чудесной Капелле замолвите слово...»

1.1. С использованием экваториальных координат звезды и карты А.1 приложения А легко убедиться в том, что данная звезда принадлежит созвездию Возничего. (1 балл)

1.2. Чтобы данная звезда была заходящей в г. Самаре, необходимо, чтобы ее высота в верхней кульминации была больше нуля, а в нижней – меньше нуля. Проверим выполнение этого условия:

$$h_{\max} = 90^\circ - \varphi_S + \delta_* = 82^\circ 48', \quad h_{\min} = \varphi_S + \delta_* - 90^\circ = 9^\circ 12' > 0^\circ.$$

Из последнего результата следует, что высота звезды в нижней кульминации больше нуля, значит эта звезда в Самаре является незаходящей, значит она не является заходящей. (2 балла)

2.1. Звезда, имеющая преимущественно желтый цвет и температуру около 6000 К, согласно Гарвардской спектральной классификации, должна относиться к спектральному классу G. (1 балл)

2.2. Воспользуемся формулой для светимости  $L_*$  звезды радиуса  $\mathfrak{R}$  и с эффективной температурой поверхности  $T_{\text{eff}}$  (2 балла):

$$L_* = 4\pi \mathfrak{R}_*^2 \sigma T_{\text{eff}}^4, \quad L_\odot = 4\pi \mathfrak{R}_\odot^2 \sigma T_\odot^4, \quad \Rightarrow \quad \frac{L_*}{L_\odot} = \left(\frac{\mathfrak{R}_*}{\mathfrak{R}_\odot}\right)^2 \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T_\odot}\right)^4, \quad \Rightarrow$$

$$L_* = L_\odot \left(\frac{\mathfrak{R}_*}{\mathfrak{R}_\odot}\right)^2 \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T_\odot}\right)^4 = 75.0 L_\odot. \quad (4)$$

3. Третьим классом светимости является класс гигантов. Значит Капелла Ab является гигантом. (1 балл)

4. Достаточно заметить, что если Солнце и данная звезда находятся в разных кульминациях, значит они располагаются в противоположных сторонах небосвода, следовательно их прямые восхождения должны отличаться на 12 часов. Значит, прямое восхождение Солнца в момент достижения оптимальных условий наблюдений звезды будет

$$\alpha_\odot = \alpha_* + 12^{\text{h}} = 17^{\text{h}}17^{\text{m}}.$$

По диаграмме видимого годичного движения Солнца по эклиптике (см. рис. А.1 приложения А) определяем положение Солнца – оно должно находиться в созвездии Змееносца в начале декабря, т. е. искомое время года – зима. (3 балла)

### №2. «Точки восхода Солнца и его движение по небосводу»

1. В день летнего солнцестояния Солнце имеет максимальное положительное склонение ( $+23^\circ 26'$ ), и потому оно должно восходить в самой северной



точке горизонта среди всех точек, в которых оно может восходить, т. е. в пограничной точке А. (1 балл)

2. Самый короткий день года для жителя северного географического полушария достигается в сутки зимнего солнцестояния, т. е. 21-22 декабря, при этом склонение Солнца принимает минимальное возможное значение. Следовательно, в эти сутки Солнце должно восходить в пограничной точке D, наиболее близкой к точке юга (S). (1 балл)

3. Заметим, что 25 апреля на  $35 \div 36$  суток происходит позже дня весеннего равноденствия и на  $56 \div 57$  суток раньше дня летнего солнцестояния, при этом склонение Солнца в эти сутки должно удовлетворять неравенству:

$$0^\circ < \delta_\odot < 23^\circ 26'.$$

Следовательно, восход Солнца должен происходить между точками А и E, очевидно, в окрестности точки В. (1 балл)

4. Солнце восходит в точке востока (E) лишь в дни равноденствий, когда его склонение равно нулю. Если Солнце восходит в точках дуги  $\overset{\vee}{ED}$  горизонта, то Солнце пребывает в южной полусфере небосвода, где склонение любого светила является отрицательным, значит склонение Солнца должно иметь знак «-». (1 балла)

5. Как известно, точки севера (N) и юга (S) являются диаметрально противоположными на небесной сфере. Значит угол между ними равен  $180^\circ$ . Поскольку 7 точек горизонта разделены 6 одинаковыми промежутками, значит с позиции наблюдателя угол между направлениями на любые 2 соседние точки равен  $30^\circ$ . Поскольку азимут точки востока равен  $270^\circ$ , а точка А отстоит на 2 таких промежутка к северу, то азимут точки А будет (1 балл):

$$A_A = 270^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 210^\circ.$$

6. Как известно, часовой угол точки севера равен  $12^h$ , а точки востока –  $18^h$ . Поскольку точка В расположена между указанными точками, то ее часовой угол должен принадлежать интервалу:  $12^h \div 18^h$ . (1 балл)

7. Оценим широту места наблюдения. Для этого рассмотрим сферический треугольник  $\Delta_S EDF$  (см. рис. 5), образованный дугой небесного экватора  $EF$ , дугой математического горизонта  $ED$  ( $ED = \Delta A_\odot = 60^\circ$ ) и дугой круга склонения  $DF$ , проходящего через точку D. При этом  $DF = |\delta_\odot| =$

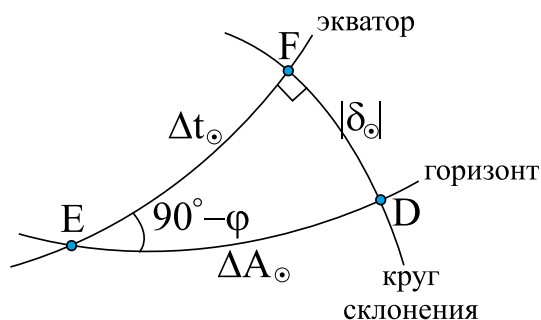


Рис. 5. К определению сферического треугольника  $\Delta_S EDF$ .

$23^{\circ}26'$ . (1 балл) Воспользуемся для него формулой синусов (1 балл):

$$\sin(90^{\circ} - \varphi) \sin \Delta A_{\odot} = \sin |\delta_{\odot}| \sin 90^{\circ}, \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\sin |\delta_{\odot}|}{\sin \Delta A_{\odot}} = 62.7^{\circ}.$$

Т. о., искомая широта близка по значению к широте полярного круга.

8. Рассмотрим сферический треугольник  $\Delta_S ECG$  (последний подобен треугольнику  $\Delta_S EDF$ , см. рис. 5, лишь дуга круга склонения  $CG$  проходит через точку  $C$ ). Воспользуемся для этого треугольника формулами синусов и косинусов:

$$\sin(90^{\circ} - \varphi) \sin \Delta A'_{\odot} = \sin |\delta'_{\odot}| \sin 90^{\circ}, \quad \cos \Delta A'_{\odot} = \cos \Delta t'_{\odot} \cos |\delta'_{\odot}|, \Rightarrow$$

$$\sin |\delta'_{\odot}| = \cos \varphi \sin \Delta A'_{\odot}, \quad \cos |\delta'_{\odot}| = \frac{\cos \Delta A'_{\odot}}{\cos \Delta t'_{\odot}} \Rightarrow$$

$$(\cos \varphi \sin \Delta A'_{\odot})^2 + \left( \frac{\cos \Delta A'_{\odot}}{\cos \Delta t'_{\odot}} \right)^2 = 1 \Rightarrow \cos \Delta t'_{\odot} = \frac{\cos \Delta A'_{\odot}}{\sqrt{1 - (\cos \varphi \sin \Delta A'_{\odot})^2}}, \Rightarrow$$

$$\Delta t'_{\odot} = \arccos \left[ \frac{\cos \Delta A'_{\odot}}{\sqrt{1 - (\cos \varphi \sin \Delta A'_{\odot})^2}} \right] = 1^{\text{h}}49^{\text{m}}. \quad (5)$$

В последнем выражении  $\Delta A'_{\odot} = 30^{\circ}$ ; величина  $\Delta t'_{\odot}$  выражает собой разность часовых углов (моментов восхода Солнца) точек восхода  $E$  и  $C$  Солнца. В дни равноденствий время пребывания Солнца над горизонтом составляет  $12^{\text{h}}$ , тогда время его пребывания над горизонтом в сутки, когда оно восходит в точке  $C$ , будет  $12^{\text{h}} - 2\Delta t'_{\odot} = 8^{\text{h}}22^{\text{m}}$ . Последнее значение принадлежит интервалу:  $6^{\text{h}} \div 12^{\text{h}}$ . (1 балл)

9. Для определения величины дуги суточной параллели, которую описывает Солнце над горизонтом, вновь необходимо рассмотреть сферический треугольник  $\Delta_S EDF$  (см. рис. 5) и вычислить для него, по аналогии с предыдущим пунктом, величину дуги  $\Delta t_{\odot}$ :

$$\Delta t_{\odot} = \arccos \left[ \frac{\cos \Delta A_{\odot}}{\sqrt{1 - (\cos \varphi \sin \Delta A_{\odot})^2}} \right] = 57.0^{\circ}. \quad (6)$$

В дни равноденствий Солнце описывает над горизонтом дугу протяженностью  $180^{\circ}$ . Значит в сутки, когда Солнце восходит в точке  $D$ , искомая величина дуги над горизонтом будет  $180^{\circ} - 2\Delta t_{\odot} = 66^{\circ}$ . Последнее значение принадлежит интервалу:  $0^{\circ} \div 90^{\circ}$ . (1 балл)

### №3. «Кинематика движения планет в различных конфигурациях»

1. Определим вектор (геоцентрической) скорости Меркурия относительно земного наблюдателя:

$$\vec{V}_{\text{rel}}^{(\text{☿})} = \vec{V}_{\text{☿}} - \vec{V}_{\oplus} = \vec{V}_{\text{☿}} + (-\vec{V}_{\oplus}),$$

здесь  $\vec{V}_{\text{☿}}$ ,  $\vec{V}_{\oplus}$  – гелиоцентрические скорости Меркурия и Земли соответственно. Как известно, вектор скорости планеты всегда направлен по касательной к траектории ее движения (эллипсу). Следовательно, в момент наибольшей восточной элонгации вектор  $\vec{V}_{\text{☿}}$  направлен строго на Землю, а вектор  $-\vec{V}_{\oplus}$  – направлен с запада на восток. С использованием правила треугольника (параллелограмма) для сложения двух векторов легко убедиться в том, что вектор  $\vec{V}_{\text{rel}}^{(\text{☿})}$  будет иметь положительную проекцию на направление "восток-запад" (см. диаграмму скоростей, представленную на рис. 6, синяя стрелка в конфигурации ВЭ). Значит Меркурий в данной конфигурации *должен иметь прямое движение*. (1 балл)

2. Очевидно, Венера в наибольшей восточной элонгации будет иметь прямое движение, аналогично Меркурию. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, можно показать, что в прямом видимом движении будет находиться Венера и в наибольшей западной элонгации (см. рис. 6, синяя стрелка в конфигурации ЗЭ).

В верхнем соединении, с использованием закона сложения скоростей, определим геоцентрическую скорость Венеры:

$$\vec{V}_{\text{rel}}^{(\text{♀})} = \vec{V}_{\text{♀}} - \vec{V}_{\oplus} = \vec{V}_{\text{♀}} + (-\vec{V}_{\oplus}),$$

здесь  $\vec{V}_{\text{♀}}$ ,  $\vec{V}_{\oplus}$  – гелиоцентрические скорости Венеры и Земли соответственно. Из рис. 6 (в конфигурации ВС) видно, что векторы  $\vec{V}_{\text{♀}}$ ,  $-\vec{V}_{\oplus}$  с точки зрения земного наблюдателя должны быть направлены с запада на восток, значит и их сумма также направлена с запада на восток (синяя стрелка в конфигурации ВС). Следовательно в верхнем соединении Венера находится в прямом движении.

В нижнем соединении скорость  $\vec{V}_{\text{♀}}$  направлена с востока на запад, а вектор  $-\vec{V}_{\oplus}$  ориентирован с запада на восток. Поскольку  $|\vec{V}_{\text{♀}}| > |\vec{V}_{\oplus}|$ , то вектор  $\vec{V}_{\text{rel}}^{(\text{♀})}$  будет направлен с востока на запад (синяя стрелка в конфигурации НС, см. рис. 6), следовательно, с позиции земного наблюдателя в нижнем соединении Венера движется с востока на запад, т. е. *находится в попятном движении*. (1 балл)

Угловая скорость попятного движения Венеры (относительно звезд) будет определяться как (2 балла)

$$\omega_{\text{♀}}^{(1)} = \frac{V_{\text{♀}} - V_{\oplus}}{a_{\oplus} - a_{\text{♀}}} = \frac{V_{\oplus}}{a_{\oplus}} \left( \frac{\sqrt{a_{\oplus}/a_{\text{♀}}} - 1}{1 - a_{\text{♀}}/a_{\oplus}} \right) = 0.63^{\circ}/\text{сут.}$$

3. Рассуждая аналогично пунктам 1-2, с использованием правил сложения векторов скоростей, можно легко убедиться в том, что в конфигурациях

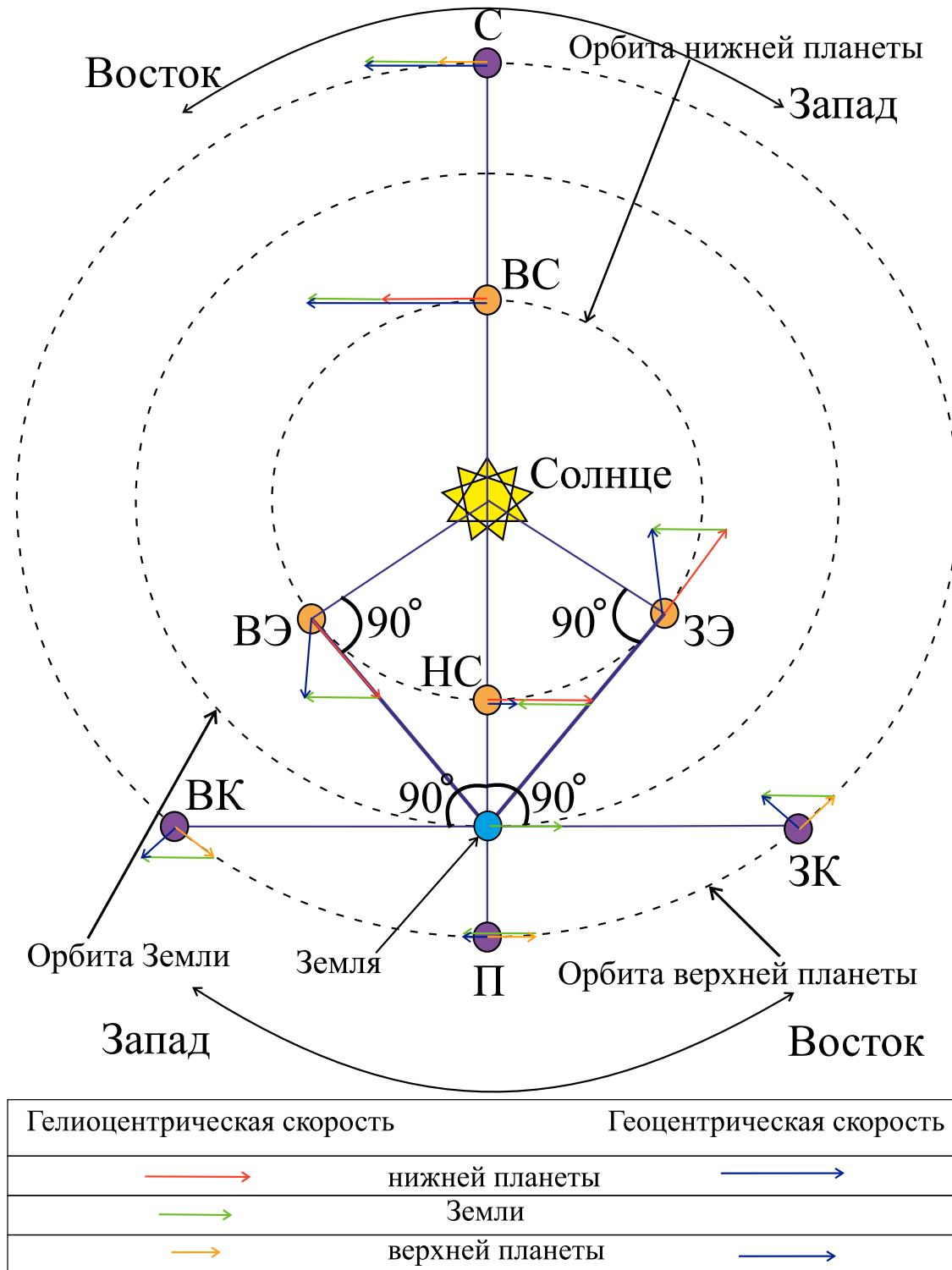


Рис. 6. К определению величин и направлений гелио- и геоцентрических скоростей планет Солнечной системы в их основных конфигурациях.

соединения, восточной и западной квадратурах Сатурн будет наблюдаться в прямом движении (см. рис. 6, синяя стрелка в конфигурациях С, ВК, ЗК). И лишь в *противостоянии* вектор его геоцентрической скорости будет направлен с востока на запад, т. е. в данной конфигурации *Сатурн будет находиться в попятном видимом движении.* (1 балл) При этом его геоцентрическая

угловая скорость (относительно звезд) будет (2 балла)

$$\omega_{\text{т}}^{(1)} = \frac{V_{\oplus} - V_{\text{т}}}{a_{\text{т}} - a_{\oplus}} = \frac{V_{\oplus}}{a_{\oplus}} \left( \frac{1 - \sqrt{a_{\oplus}/a_{\text{т}}}}{a_{\text{т}}/a_{\oplus} - 1} \right) = 0.078^{\circ}/\text{сут.}$$

4. В пункте 2 было показано, что Венера в верхнем соединении находится в прямом движении. При этом ее угловую геоцентрическую скорость (относительно звезд) можно представить в виде:

$$\omega_{\text{♀}}^{(2)} = \frac{V_{\text{♀}} + V_{\oplus}}{a_{\oplus} + a_{\text{♀}}} = \frac{V_{\oplus}}{a_{\oplus}} \left( \frac{\sqrt{a_{\oplus}/a_{\text{♀}}} + 1}{1 + a_{\text{♀}}/a_{\oplus}} \right) = 1.24^{\circ}/\text{сут.}$$

Геоцентрическая угловая скорость Солнца представляется в виде:

$$\omega_{\odot} = \frac{V_{\oplus}}{a_{\oplus}} = 0.986^{\circ}/\text{сут.}$$

При этом Солнце всегда движется относительно звезд в прямом направлении. Тогда угловая скорость видимого удаления Венеры от Солнца (2 балла):

$$\omega_{\text{♀}}^{(3)} = \omega_{\text{♀}}^{(2)} - \omega_{\odot} = 0.259^{\circ}/\text{сут.}$$

Поскольку угловая скорость удаления – положительная величина, то *Венера относительно Солнца движется в прямом направлении.* (1 балл)

5. По аналогии с пунктом 3 легко убедиться в том, что Юпитер в соединении будет иметь прямое видимое движение. При этом его геоцентрическая угловая скорость будет равна

$$\omega_{\text{♃}}^{(1)} = \frac{V_{\text{♃}} + V_{\oplus}}{a_{\oplus} + a_{\text{♃}}} = \frac{V_{\oplus}}{a_{\oplus}} \left( \frac{1 + \sqrt{a_{\oplus}/a_{\text{♃}}}}{1 + a_{\text{♃}}/a_{\oplus}} \right) = 0.228^{\circ}/\text{сут.}$$

Тогда угловая скорость видимого удаления Юпитера от Солнца (2 балла):

$$\omega_{\text{♃}}^{(2)} = \omega_{\text{♃}}^{(1)} - \omega_{\odot} = -0.758^{\circ}/\text{сут.}$$

Поскольку угловая скорость удаления – отрицательная величина, то *Юпитер относительно Солнца движется попятно*, т. е. удаляется к западу. (1 балл)

#### №4. «Ночной астропейзаж»

1. Очевидно, на фотографии представлены 1) планеты (Сатурн, Земля), 2) звезды, и 3) галактика (Млечный Путь). (1/3 балла за каждый правильно названный тип объекта)

2. Заметим, что фонарик и Сатурн на кадре представлены почти одинаковыми кружками засветки. Следовательно, количества световой энергии,

пришедшей от Сатурна за время выдержки  $\tau_0 = 30$  с и от фонарика за время его вспышки  $t_f = 0.01$  с должны быть одинаковыми, т. е. (1 балл)

$$W_h = W_f, \Rightarrow E_h S \tau_0 = E_f S t_f, \Rightarrow E_f = E_h \left( \frac{\tau_0}{t_f} \right).$$

Иначе освещенность, созданную фонариком в точке, где была расположена камера, можно представить так (1 балл):

$$E_f = \frac{P_f}{4 \pi r^2},$$

здесь  $P_f = 1$  Вт – мощность фонарика в видимом свете,  $r$  – расстояние от камеры до фонарика (человека в кадре) в момент съемки. Из двух последних уравнений следует, явное выражение для искомого расстояния:

$$r = \sqrt{\frac{P_f}{4 \pi E_f}} = \sqrt{\frac{P_f t_f}{4 \pi E_h \tau_0}}.$$

Далее воспользуемся формулой Погсона для определения освещенности, создаваемой Сатурном у объектива камеры:

$$E_h = f_{\odot}^{(v)} 10^{-0.4(m_h - m_{\odot})},$$

здесь  $f_{\odot}^{(v)}$  – солнечная постоянная в видимом диапазоне,  $m_h = -0.24^m$  – видимая звездная величина Сатурна на момент съемки,  $m_{\odot} = -26.74^m$  – видимая звездная величина Солнца в видимом диапазоне. В итоге искомое расстояние есть (1 балл)

$$r = \sqrt{\frac{P_f t_f}{4 \pi f_{\odot}^{(v)} \tau_0}} 10^{0.2(m_h - m_{\odot})} = 42 \text{ м.} \quad (7)$$

3. Для определения высоты Сатурна над горизонтом, определим угловой размер, соответствующий росту человека на кадре (1 балл):

$$h_{\text{ч}} = \frac{H_{\text{ч}} 180^{\circ}}{r \pi} = 2.62^{\circ}.$$

Далее определим по рис. 2 рост человека  $\lambda_{\text{ч}} = 29$  мм и высоту Сатурна над линией горизонта  $\lambda_h = 63$  мм. (1 балл) Тогда искомая угловая высота Сатурна  $h_h$  в момент съемки была (1 балл)

$$h_h = h_{\text{ч}} \frac{\lambda_h}{\lambda_{\text{ч}}} = 5.7^{\circ}.$$

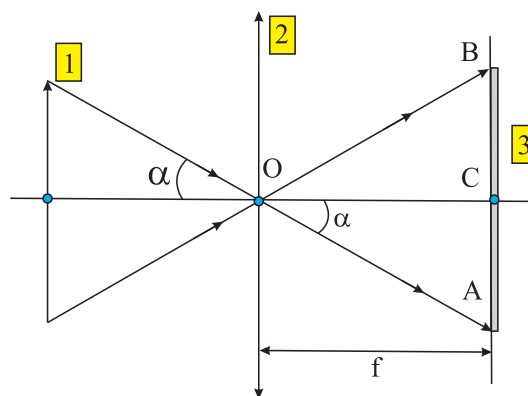


Рис. 7. К определению оптической схемы "объектив-фотокамера".



## Уровень «Знаток» (уровень В)

### №5. «Минимальное количество кадров и область пережестов»

1. Рассмотрим оптическую схему "объектив-фотокамера" (см. рис. 7). Здесь  $\boxed{1}$  – объект фотообзора, определяющий максимальную угловую высоту  $h$ , которую еще может запечатлеть матрица  $\boxed{3}$ ;  $\boxed{2}$  – объектив, в фокусе которого расположена матрица (в случае наблюдения небесного тела). Очевидно, что максимальная угловая высота  $h = 2\alpha$ , причем из  $\triangle OAC$  следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB/2}{f} = \frac{b}{2f}, \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \left[ \frac{b}{2f} \right], \quad (8)$$

здесь и далее  $a = 22.5$  мм,  $b = 15.0$  мм – линейные размеры матрицы камеры;  $f = 135$  мм – фокусное расстояние объектива. В итоге угловая высота и ширина кадра есть

$$h = 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{b}{2f} \right] = 6.36^\circ = 382', \quad \ell = 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{a}{2f} \right] = 9.53^\circ = 572'. \quad (9)$$

Иногда в качестве характерного углового размера поля зрения камеры используют угловой размер диагонали кадра:

$$d = 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2f} \right] = 11.44^\circ = 686'. \quad (10)$$

Т. о., угловые размеры поля зрения данной камеры+объектива есть  $\ell \times h = 572' \times 382'$ . (2 балла)

2. Определим телесный угол, соответствующий одному кадру. Для этого рассмотрим рис. 8. Здесь  $ABCD$  – прямоугольник, определяющий границы поля зрения камеры на расстоянии  $OF = r$  от последней. Телесный угол  $\Omega$  поля зрения камеры можно (приближенно) определить так

$$\Omega \approx \frac{S_{ABCD}}{r^2}, \quad (11)$$

здесь  $S_{ABCD}$  – площадь данного прямоугольника, которую можно записать так

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = EG \cdot JK = \left( 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{h}{2} \right) \left( 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{\ell}{2} \right) = 4r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{h}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\ell}{2},$$

здесь учтено, что

$$EG = 2EF = 2r \operatorname{tg} \frac{h}{2}, \quad JK = 2JF = 2r \operatorname{tg} \frac{\ell}{2}.$$

Из выражения (11) и последнего результата следует, что (1 балл)

$$\Omega_c = 4 \operatorname{tg} \left( \frac{h}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\ell}{2} \right) \approx 4 \sin \left( \frac{h}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\ell}{2} \right). \quad (12)$$

Последний результат является приближенным и, справедлив в случае малых значений углов  $\frac{h}{2}$  и  $\frac{\ell}{2}$ . Точная формула для данного телесного угла должна быть записана так (вывод последней очень сложен и приводится лишь для полноты картины задачи)

$$\Omega = 4 \arcsin \left[ \sin \left( \frac{h}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\ell}{2} \right) \right]. \quad (13)$$

Однако, в силу малости углов  $\frac{h}{2}$  и  $\frac{\ell}{2}$ , выражения (12) и (13) дают одинаковые значения  $\Omega_c = 1.84 \cdot 10^{-2}$  срад = 60.5 кв. град. (1 балл)

3. Поскольку поле зрения фотоаппарата определяется плоским прямоугольником, а небесная сфера является сферической поверхностью, выполнить съемку всего небосвода без пересечения полей соседних кадров в действительности невозможно.

Минимальное количество кадров, которое необходимо сделать на практике, чтобы сфотографировать весь ночной небосвод, можно определить отношением телесного угла, соответствующего прямоугольной площадке высотой  $180^\circ$  (соответствует протяженности круга склонения от северного до южного полюса мира) и шириной  $360^\circ$  (соответствует протяженности небесного экватора) к телесному углу поля зрения фотоаппарата, т. е. (2 балла)

$$N_{\min}^{(P)} = \left[ \frac{180^\circ \times 360^\circ}{\Omega_c} \right] + 1 = 1072 \text{ кадра.} \quad (14)$$

4. Телесный угол, соответствующий суммарной области переклестов всех  $N_{\min}^{(P)}$  кадров, можно представить как разность телесного угла величиной  $180^\circ \times 360^\circ$  и телесного угла всей небесной сферы,  $\Omega_{\text{сф}} = 41253$  кв. град. (3 балла):

$$\Omega_{\text{пер}} = 180^\circ \times 360^\circ - \Omega_{\text{сф}} = 23547 \text{ кв. град.}$$

Искомая доля есть (2 балла)

$$\eta = \frac{\Omega_{\text{пер}}}{\Omega_{\text{сф}}} = 0.57.$$

### №6. «Луна на новой орбите»

1. Пусть  $D''_{\zeta}$  – сегодняшней угловой диаметр Луны (при чем  $D''_{\zeta} \ll 1$  рад). Тогда на матрице фотоаппарата при использовании объектива с фокусным

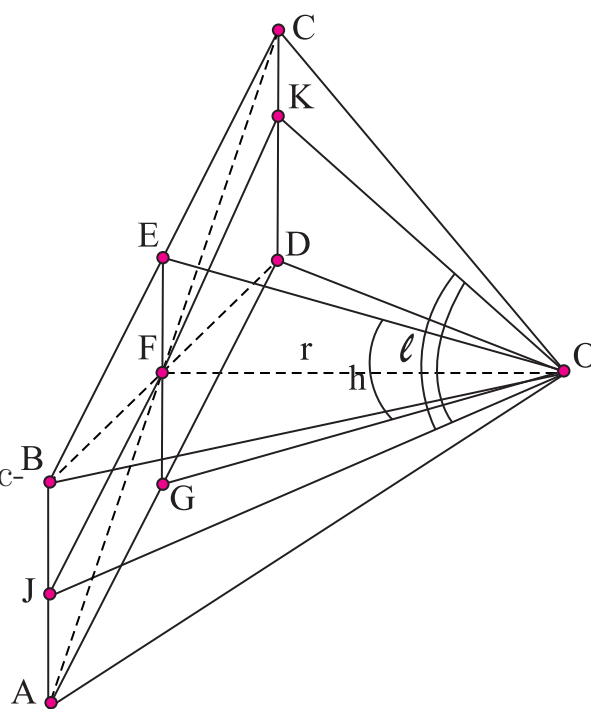


Рис. 8. К определению телесного угла  $\Omega$ .

расстоянием  $f_1$  и телескопа с фокусным расстоянием  $f_2$  изображения Луны будут иметь линейные размеры соответственно (1 балл):

$$\ell_{\zeta}^{(1)} = D_{\zeta}'' \cdot f_1, \quad \ell_{\zeta}^{(2)} = D_{\zeta}'' \cdot f_2, \quad \text{здесь } [D_{\zeta}''] = \text{рад.}$$

После приближения Луны к Земле ее угловой диаметр  $D_{\zeta}''$  должен быть существенно больше, при этом ее линейный размер на матрице должен быть как и прежде  $\ell_{\zeta}^{(2)}$ . В итоге можно записать выражение вида (2 балла):

$$\frac{\ell_{\zeta}^{(2)}}{2} = f_1 \operatorname{tg} \frac{D_{\zeta}''}{2}, \quad \Rightarrow \quad D_{\zeta}'' = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{f_2 D_{\zeta}''}{f_1 2} \right) = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{f_2 \mathfrak{R}_{\zeta}}{f_1 a_{\zeta}} \right) = 33.55^{\circ},$$

где  $\mathfrak{R}_{\zeta}, a_{\zeta}$  – настоящие значения радиусов Луны и ее круговой орбиты соответственно.

Телесный угол, соответствующий новому диску Луны, и его долю от телесного угла всего небосвода можно представить в виде (1 балл):

$$\Omega_{\zeta} = 2\pi(1 - \cos(D_{\zeta}''/2)), \quad \eta = \frac{\Omega_{\zeta}}{\Omega_{\text{сф}}} = \frac{1}{2}(1 - \cos(D_{\zeta}''/2)) = 0.021.$$

2. Определим расстояние, с которого Луна будет видна под углом  $D_{\zeta}''$  (1 балл):

$$\sin \frac{D_{\zeta}''}{2} = \frac{\mathfrak{R}_{\zeta}}{\Delta_{\zeta}^{(1)}}, \quad \Rightarrow \quad \Delta_{\zeta}^{(1)} = \frac{\mathfrak{R}_{\zeta}}{\sin \frac{D_{\zeta}''}{2}} = 6022 \text{ км.} \quad (15)$$

Согласно условию задачи, новый угловой диаметр Луны соответствует ее наблюдению в подлунной точке – ближайшей к Луне точке поверхности Земли. Тогда радиус новой круговой орбиты Луны будет (1 балл)

$$a_{\zeta}^{(1)} = \bar{\mathfrak{R}}_{\oplus} + \Delta_{\zeta}^{(1)} = 12393 \text{ км,} \quad (16)$$

здесь  $\bar{\mathfrak{R}}_{\oplus} = 6371$  км – средний радиус Земли. Сидерический период обращения Луны вокруг центра масс системы «Земля-Луна» определим с использованием 3-го закона Кеплера (2 балла):

$$T_{\zeta}^{(1)} = T_{\zeta} \left( \frac{a_{\zeta}^{(1)}}{a_{\zeta}} \right)^{3/2} = 3.796 \text{ час.} \quad (17)$$

3. Вычислим минимальный размер (в км) формы рельефа поверхности Луны, которая уже может быть разрешена невооруженным глазом, при ее наблюдении в подлунной точке: (2 балла):

$$L = \Delta_{\zeta}^{(1)} \frac{1'}{3438'} = 1.75 \text{ км.} \quad (18)$$

4. Выполним искомую оценку в приближении изотропного источника рассеяния солнечного излучения в фазе первой четверти Луны (последнее предположение используется лишь для упрощения рассуждений, но не скажется в итоге на общности итогового результата). Пусть освещенность, создаваемая Солнцем у поверхности Луны/Земли, есть

$$E_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi a_{\oplus}^2}, \quad (19)$$

где  $L_{\odot}$  – светимость Солнца,  $a_{\oplus}$  – большая полуось земной орбиты. Поток солнечного излучения, падающий на поверхность Луны, есть

$$\Phi_{\text{fall}} = E_{\odot} \pi \mathfrak{R}_{\zeta}^2.$$

Поток света, отраженного поверхностью Луны, будет

$$\Phi_{\text{ref}} = A_{\zeta} \Phi_{\text{fall}},$$

здесь  $A_{\zeta} = 0.067$  – сферическое альбедо Луны. Освещенность, создаваемая Луной в первой четверти у поверхности Земли, определяется выражением:

$$E_{\zeta}^{(1)} = \frac{\Phi_{\text{ref}} F}{4\pi a_{\zeta}^2} = \frac{F L_{\odot} A_{\zeta} \mathfrak{R}_{\zeta}^2}{16\pi a_{\oplus}^2 a_{\zeta}^2},$$

здесь  $F = 0.5$  фаза Луны/Земли в первой/последней четверти. Заметим, что Земля с поверхности Луны в этот момент будет видна в фазе последней четверти.

Как известно, пепельный свет Луны образуется в результате распространения солнечного излучения по пути "Солнце-Земля-Луна-Земля". Рассуждая аналогичным образом, можно записать освещенность, создаваемую неосвещенной половиной видимого диска Луны у поверхности Земли:

$$E_{\zeta}^{(2)} = \frac{F L_{\odot} A_{\oplus} \mathfrak{R}_{\oplus}^2}{16\pi a_{\oplus}^2 a_{\zeta}^2} \times \frac{F A_{\zeta} \mathfrak{R}_{\zeta}^2}{4 a_{\zeta}^2} = \frac{F^2 L_{\odot} A_{\oplus} A_{\zeta} \mathfrak{R}_{\oplus}^2 \mathfrak{R}_{\zeta}^2}{64\pi a_{\oplus}^2 a_{\zeta}^4}.$$

Найдем отношение освещенностей (1 балл):

$$\frac{E_{\zeta}^{(1)}}{E_{\zeta}^{(2)}} = \frac{4 a_{\zeta}^2}{F A_{\oplus} \mathfrak{R}_{\oplus}^2}. \quad (20)$$

Тогда искомое отношение изменится в результате перехода на новую орбиту (1 балл):

$$\left( \frac{E_{\zeta}^{(1)}}{E_{\zeta}^{(2)}} \right)_1 / \left( \frac{E_{\zeta}^{(1)}}{E_{\zeta}^{(2)}} \right)_2 = \left( \frac{a_{\zeta}}{a_{\zeta}^{(1)}} \right)^2 = 962. \quad (21)$$

Т. о., в результате перехода на новую орбиту, искомое отношение уменьшится в 962 раза, это приведет к увеличению видимой яркости неосвещенной

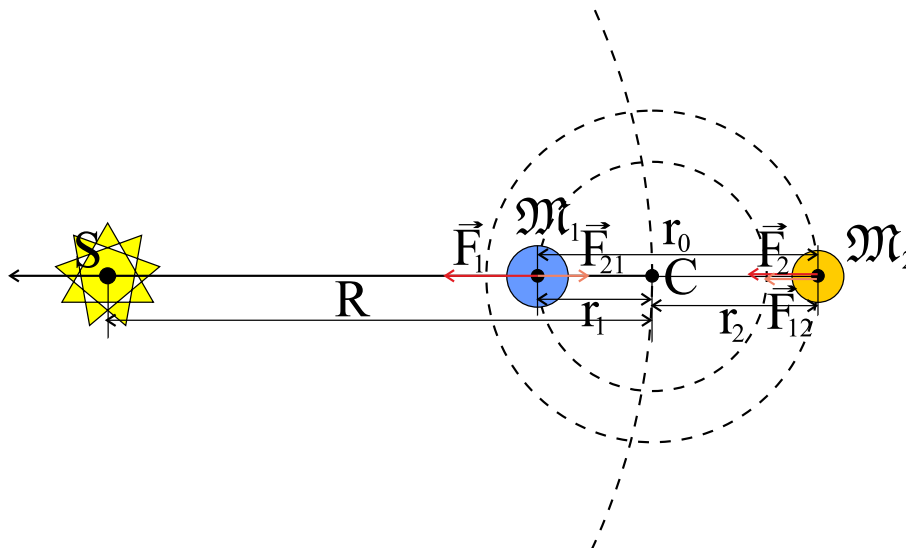


Рис. 9. К определению геометрических и динамических параметров двойной системы в гравитационном поле Солнца.

(пепельной) части видимого диска и к менее контрастной картинке между освещенной и неосвещенной Солнцем частями видимого диска Луны.

### №7. «Приливы Солнца – источник разрушения двойных систем»

1. Рассмотрим систему двух гравитирующих тел с массами  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  (см. рис. 9), обращающихся вокруг общего центра масс (точка С) по круговым орбитам радиусов  $r_1$  и  $r_2$ . В свою очередь данная точка движется вокруг Солнца по круговой орбите радиуса  $R$ . Радиус круговой орбиты компонента 2 относительно компонента 1 есть  $r_0$ . На каждое тело этой пары со стороны Солнца действуют силы притяжения  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  соответственно. Данные тела притягиваются друг к другу с силой  $F_{12}$ . (3 балла)

2. Запишем 2-й закон Ньютона для каждого тела (2 балла):

$$\mathcal{M}_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_{21}, \quad \mathcal{M}_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_{12}.$$

Спроецируем данные уравнения на координатную ось  $CS$ :

$$\mathcal{M}_1 a_{1s} = F_1 - F_{21}, \quad \mathcal{M}_2 a_{2s} = F_2 + F_{12},$$

или

$$a_{1s} = \frac{F_1}{\mathcal{M}_1} - \frac{F_{21}}{\mathcal{M}_1}, \quad a_{2s} = \frac{F_2}{\mathcal{M}_2} + \frac{F_{12}}{\mathcal{M}_2}.$$

С использованием закона всемирного тяготения, данные уравнения можно представить в виде (2 балла):

$$a_{1s} = \frac{G \mathcal{M}_\odot}{(R - r_1)^2} - \frac{G \mathcal{M}_2}{r_0^2}, \quad a_{2s} = \frac{G \mathcal{M}_\odot}{(R + r_2)^2} + \frac{G \mathcal{M}_1}{r_0^2}.$$

Данная пара гравитирующих тел сохранит свою целостность, если при взаимном расположении, представленном на рис. 9, проекции ускорений данных тел относительно Солнца будут равны (в данный момент данную пару тел

Система	$r_0$ , км	$\mathfrak{M}_1$ , кг	$\mathfrak{M}_2$ , кг	$R_0$ , а.е./млн км
«Земля-Луна»	384400	$5.972 \cdot 10^{24}$	$7.348 \cdot 10^{22}$	0.2235/35.435
«Плутон-Харон»	19591.4	$1.303 \cdot 10^{22}$	$1.520 \cdot 10^{21}$	0.0850/12.716

Таблица 2. К определению основных параметров систем: «Земля-Луна», «Плутон-Харон». можно рассматривать как два шара, надетых на жесткую спицу, и как единое целое (обращающихся вокруг Солнца), т. е.  $a_{1s} = a_{2s}$  или

$$\frac{G \mathfrak{M}_\odot}{(R - r_1)^2} - \frac{G \mathfrak{M}_\odot}{(R + r_2)^2} = \frac{G (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}{r_0^2},$$

заметим, что в левой части последнего уравнения присутствует ускорение, порожденное приливной силой Солнца, являющейся разностью двух сил тяготения, приложенных к одному пробному малому телу со стороны Солнца в двух разных точках пространства. Если полагать далее, что характерный размер двойной системы ( $r_0$ ) существенно меньше расстояния  $R$  до Солнца, т. е.  $r_0 \ll R$ , то последнее уравнение можно упростить к виду (2 балла):

$$\frac{\mathfrak{M}_\odot}{R^2} \left( \left(1 - \frac{r_1}{R}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{r_2}{R}\right)^{-2} \right) = \frac{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}{r_0^2}, \Rightarrow$$

$$\frac{\mathfrak{M}_\odot}{R^2} \left(1 + 2\frac{r_1}{R} - 1 + 2\frac{r_2}{R}\right) = \frac{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}{r_0^2}, \Rightarrow \frac{2\mathfrak{M}_\odot r_0}{R^3} = \frac{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}{r_0^2}.$$

Откуда следует искомое расстояние  $R_0$  (1 балл):

$$R_0 = r \sqrt[3]{\frac{2\mathfrak{M}_\odot}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}}. \quad (22)$$

3. Выполним численный анализ результата (22) на примере пар: а) «Плутон-Харон», б) «Земля-Луна». В табл. 2 представлены численные значения основных параметров указанных систем. Из таблицы видно, что система «Земля-Луна» сможет существовать на гелиоцентрических расстояниях, не меньших 0.2235 а.е. Система «Плутон-Харон» является более тесной, и потому она сможет существовать на гелиоцентрических расстояниях, не меньших 0.085 а.е. (4 балла)

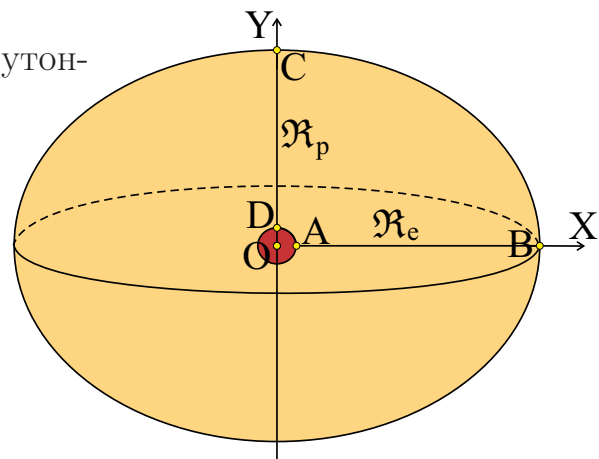


Рис. 10. К определению основных точек тела планеты.

### №8. «Эллипсоидальная планета и ее свойства»

1. Перейдем в неинерциальную систему отсчета (см. рис. 10), вращающуюся вместе с телом планеты ( $XOY$ ). В этой системе планетарное вещество



покоится. Рассмотрим малый элемент массы  $\Delta m$ . На данный элемент действуют сила притяжения ( $\vec{F}_{\text{at}}$ ), сила реакции ( $\vec{N}$ ) (со стороны других элементов) и центробежная сила ( $\vec{F}_c$ ) (обусловлена неинерциальностью СО). (1 балл)

2. Силы  $\vec{F}_{\text{at}}$  и  $\vec{F}_c$  являются потенциальными, следовательно их работа по любому замкнутому контуру равна нулю. Вычислим работу  $\vec{F}_{\text{at}} + \vec{F}_c$  при перемещении элемента  $\Delta m$  вдоль контура  $ABCD$  (см. рис. 10). Ее можно представить в виде (1 балл):

$$A_{\text{tot}} = A_{AB} + A_{BC} + A_{CD} + A_{DA} = 0. \quad (23)$$

При перемещении вдоль отрезка  $AB$  (1 балл):

$$A_{AB} = \int_{AB} (\vec{F}_{\text{at}} + \vec{F}_c) d\vec{r} = \int_{\mathfrak{R}_N}^{\mathfrak{R}_e} \left( -\frac{G \Delta m \mathfrak{M}_p}{x^2} + \Delta m \omega_p^2 x \right) dx = G \Delta m \mathfrak{M}_p \left[ \frac{1}{\mathfrak{R}_e} - \frac{1}{\mathfrak{R}_N} \right] + \frac{\Delta m \omega_p^2}{2} [\mathfrak{R}_e^2 - \mathfrak{R}_N^2]. \quad (24)$$

При перемещении вдоль  $BC$ :

$$A_{BC} = U_{pB} - U_{pC} = 0, \quad (25)$$

здесь  $U_p$  – суммарная потенциальная энергия данных сил в указанных точках. Потенциальная энергия на поверхности планеты  $BC$  постоянна. Иначе наблюдался переток вещества вдоль меридиана; сила реакции перпендикулярна поверхности  $\Rightarrow$  не может ему препятствовать. Работа на участке  $CD$  (1 балл):

$$A_{CD} = \int_{CD} \vec{F}_{\text{at}} d\vec{r} = - \int_{\mathfrak{R}_p}^{\mathfrak{R}_N} \frac{G \Delta m \mathfrak{M}_p}{y^2} dy = G \Delta m \mathfrak{M}_p \left[ \frac{1}{\mathfrak{R}_N} - \frac{1}{\mathfrak{R}_p} \right]. \quad (26)$$

Работа на участке  $DA$  (1 балл):

$$A_{DA} = \int_{DA} (\vec{F}_{\text{at}} + \vec{F}_c) d\vec{r} = U_{\text{atD}} - U_{\text{atA}} + \int_0^{\mathfrak{R}_N} \Delta m \omega_p^2 \vec{r} d\vec{r} = \Delta m \omega_p^2 \frac{\mathfrak{R}_N^2}{2}, \quad (27)$$

здесь  $U_{\text{at}}$  – потенциальная энергия силы притяжения в указанной точке, при этом  $U_{\text{atD}} = U_{\text{atA}} = -G \Delta m \mathfrak{M}_p / \mathfrak{R}_N$ ; в последнем интеграле  $\vec{r}$  направлен от оси вращения планеты  $OC$ , а  $d\vec{r}$  – по касательной к дуге в каждой точке. Подставляя (24)-(27) в (23), в результате получаем (1 балл):

$$G \Delta m \mathfrak{M}_p \left[ \frac{1}{\mathfrak{R}_p} - \frac{1}{\mathfrak{R}_e} \right] = \frac{\Delta m \omega_p^2}{2} \mathfrak{R}_e^2, \Rightarrow \mathfrak{R}_p = \frac{\mathfrak{R}_e}{1 + (\omega_p^2 \mathfrak{R}_e^3) / (2G \mathfrak{M}_p)} = \frac{\mathfrak{R}_e}{1 + (2\pi^2 \mathfrak{R}_e^3) / (G \mathfrak{M}_p T^2)}. \quad (28)$$

Планета	$\mathcal{R}_e$ , км	$\mathcal{R}_p$ , км	$\mathcal{R}_p^{(\text{theor})}$ , км	$k_{\text{exp}}$	$k^{\text{theor}}$	$\eta$	$\rho_{\text{el}}$ , кг/м <sup>3</sup>	$\xi$
Меркурий	2440.5	2438.3	2440.5	0.000902	$5.049 \cdot 10^{-7}$	0.999	5422	$5.049 \cdot 10^{-7}$
Венера	6051.8	6051.8	6051.8	0.000000	$3.039 \cdot 10^{-8}$	–	5243	$3.039 \cdot 10^{-8}$
Земля	6378.1	6356.8	6367.1	0.003364	0.001728	0.486	5504	0.001728
Марс	3396.2	3376.2	3388.4	0.005923	0.002293	0.613	3919	0.002293
Юпитер	71492	66854	68439	0.069375	0.042701	0.384	1295	0.042701
Сатурн	60268	54364	55937	0.108601	0.071861	0.338	667.7	0.071861
Уран	25559	24973	25187	0.023465	0.014555	0.380	1259	0.014555
Нептун	24764	24341	24445	0.017378	0.012874	0.259	1631	0.012874

Таблица 3. Основные экспериментальные/теоретические результаты для восьми классических планет.

Сжатие планеты по определению (1 балл):

$$k = \frac{\mathcal{R}_e - \mathcal{R}_p}{\mathcal{R}_e} = \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad \alpha = (2\pi^2 \mathcal{R}_e^3) / (G \mathcal{M}_p T^2). \quad (29)$$

3. Как известно, *средняя массовая плотность* планеты определяется отношением массы планеты  $\mathcal{M}_p$  к объему ее тела ( $V$ ):

$$\bar{\rho} = \frac{\mathcal{M}_p}{V}. \quad (30)$$

Объемы планеты в приближениях планеты-шара и планеты-эллипсоида вращения можно записать так

$$V_{\text{sh}} = \frac{4\pi}{3} \mathcal{R}_e^3, \quad V_{\text{el}} = \frac{4\pi}{3} \mathcal{R}_e^2 \mathcal{R}_p. \quad (31)$$

Следовательно, выражения для средней массовой плотности планеты в указанных приближениях можно записать так (1 балл):

$$\bar{\rho}_{\text{sh}} = \frac{3 \mathcal{M}_p}{4\pi \mathcal{R}_e^3}, \quad \bar{\rho}_{\text{el}} = \frac{3 \mathcal{M}_p}{4\pi \mathcal{R}_e^2 \mathcal{R}_p} = \frac{3 \mathcal{M}_p}{4\pi \mathcal{R}_e^3} \left( 1 + \frac{2\pi^2 \mathcal{R}_e^3}{G \mathcal{M}_p T^2} \right). \quad (32)$$

4. Выполним численный анализ полученных основных результатов. Численные значения искомых величин представлены в табл. 3. В частности, здесь вычислены экспериментальные значения  $k_{\text{exp}}$  сжатия планеты. (2 балла) Расчитаны теоретические значения полярного радиуса  $\mathcal{R}_p$  и сжатия планеты (1 балл) по формулам (28) и (29) соответственно. По формуле (2) вычислена величина  $\eta$ . Согласно численным данным для последнего параметра, в случае Нептуна данная модель планеты дает наиболее точный прогноз для  $k_{\text{exp}}$ . (1 балл) Здесь также вычислена средняя массовая плотность планеты  $\bar{\rho}_{\text{el}}$  (1 балл) по формуле (32) и выполнен расчет величины  $\xi$  по формуле (3). Опираясь на численные значения последнего параметра (представлены в последнем столбце табл. 3) для восьми классических планет, легко видеть, что

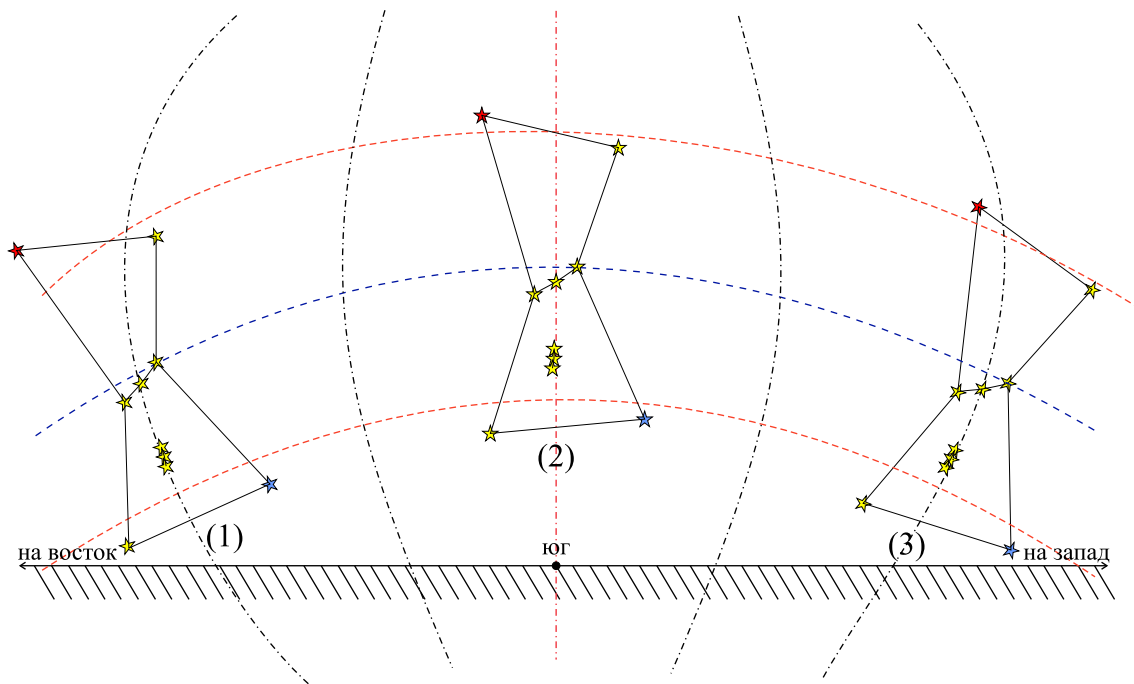


Рис. 11. К определению явления вращения поля зрения камеры, установленной на азимутальной монтировке.

осевое вращение приводит к наибольшему отклонению результата  $\rho_{el}$  от соответствующего значения плотности  $\rho_{sh}$  для планеты-шара радиуса  $\mathfrak{R}_e$  в случае Сатурна. (1 балл)

### №9. «Съемка на азимутальной монтировке и "вращение поля"»

1. Заметим, что угловые размеры поля зрения для такого сетапа были вычислены в задаче №5 настоящего релиза. Было показано, что поле зрения является относительно малым. (2 балла)

2. Далее определим угловую скорость, с которой поворачиваются небесные тела (прежде всего, звезды) в поле зрения такой камеры в результате суточного вращения небесной сферы. Для этого рассмотрим рис. 11. Здесь созвездие Ориона представлено в трех положениях относительно горизонта: (1) вскоре после восхода, (2) в верхней кульминации (в плоскости небесного меридиана) для жителя средних северных широт, (3) незадолго до захода за горизонт.

Из рисунка очевидно, что созвездие непрерывно изменяет свою ориентацию по отношению к горизонту (вертикалу). Нетрудно понять, что угол поворота зависит не только от угла поворота небесной сферы, но и от широты местности. Например, на географических полюсах вращение поля будет отсутствовать поскольку все светила будут двигаться параллельно горизонту, а значит не будут менять ориентацию по отношению к последнему. Напротив, на географическом экваторе вращение поля будет наиболее ярко выражено при этом темп вращения неравномер-

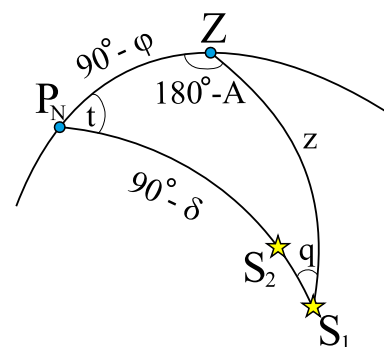


Рис. 12. К определению угла поворота звездной пары.

ный. Наиболее быстрое вращение происходит в окрестности зенита. Значит скорость вращения поля  $\omega_{\text{fr}}$  должна быть функцией угловой скорости вращения небесной сферы (Земли)  $\omega_{\oplus}$ , широты местности и горизонтальных  $(h, A)$ /экваториальных  $(\delta, t)$  координат небесного светила, на которое ориентирована оптическая ось объектива сетапа. (2 балла)

Выполним расчет угловой скорости  $\omega_{\text{fr}}$ . Для этого рассмотрим две близкие звезды  $S_1$  и  $S_2$  расположенные на одном круге склонения на небесной сфере (см. рис. 12), при этом их склонения удовлетворяют условию:  $\delta_1 < \delta_2$ . Изменение положения данной пары звезд относительно горизонта (или относительно вертикала) можно задать параллактическим углом  $q$  первой звезды – углом, под которым пересекаются ее круг склонения и вертикал.

Запишем формулы синусов и косинусов для сферического параллактического треугольника  $\triangle_S Z P_N S_1$  с участием параллактического угла (2 балла):

$$\sin q \sin z = \sin(90^\circ - \varphi) \sin t, \Rightarrow \sin q \cos h = \cos \varphi \sin t, \quad (33)$$

$$\sin q \sin(90^\circ - \delta) = \sin(90^\circ - \varphi) \sin(180^\circ - A), \Rightarrow$$

$$\sin q \cos \delta = \cos \varphi \sin A, \quad (34)$$

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \cos(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ - h) + \sin(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - h) \cos q, \Rightarrow$$

$$\sin \varphi = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos q. \quad (35)$$

Для того же треугольника справедливы формулы синусов и косинусов без участия параллактического угла (2 балла):

$$\cos \delta \sin t = \cos h \sin A, \quad (36)$$

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A, \quad (37)$$

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t. \quad (38)$$

Скорость вращения поля можно рассматривать как производную от параллактического угла по времени  $\tau$  наблюдений:

$$\omega_{\text{fr}} = \frac{dq}{d\tau}. \quad (39)$$

Представим данную величину как функцию угловой скорости ( $\omega_{\oplus}$ ) осевого вращения Земли, широты ( $\varphi$ ) места наблюдения и экваториальных координат  $(t, \delta)$  звезды  $S_1$ , т. е.  $\omega_{\text{fr}} = \omega_{\text{fr}}(\omega_{\oplus}, \varphi, t, \delta)$ . Из формулы (33) и (38) следует явное выражение для угла  $q$ :

$$\sin q = \frac{\cos \varphi \sin t}{\cos h} = \frac{\cos \varphi \sin t}{\sqrt{1 - (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t)^2}},$$

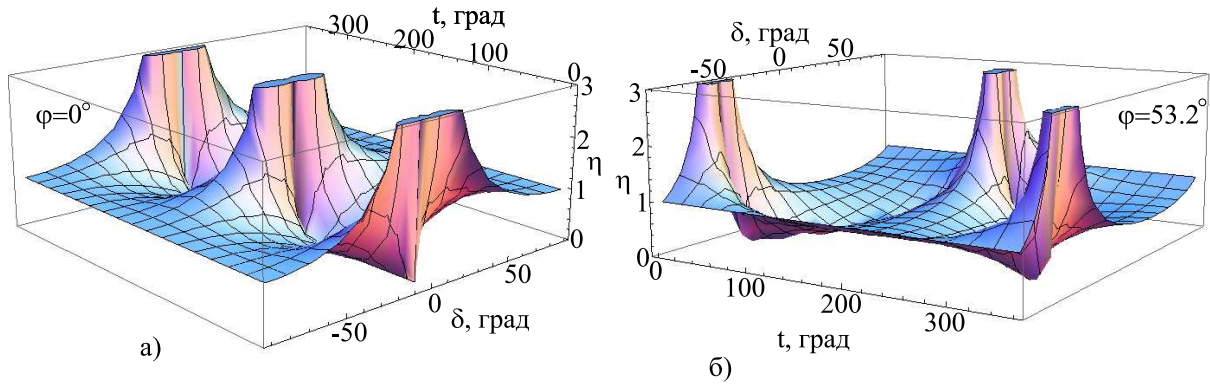


Рис. 13. К определению поверхностей зависимости параметра  $\eta$  от экваториальных координат центра поля зрения оптической системы "камера+объектив" в случае широты местности: а)  $\varphi = 0^\circ$ , б)  $\varphi = 53.2^\circ$  (г. Самара).

напомним, что здесь параметры  $\varphi, \delta, \omega_\oplus$  являются постоянными величинами с течением времени, а часовой угол можно представить как  $t = t_0 + \omega_\oplus \tau$ . Продифференцируем последнее уравнение по времени наблюдений (1 балл):

$$\begin{aligned} \cos q \cdot \omega_{\text{fr}} &= \omega_\oplus \cos \varphi \left( \frac{\cos t}{\sqrt{1 - \sin^2 h}} - \frac{\cos \varphi \cos \delta \sin h \sin^2 t}{(1 - \sin^2 h)^{3/2}} \right), \Rightarrow \\ \omega_{\text{fr}} &= \frac{\omega_\oplus \cos \varphi}{\cos q} \left( \frac{\cos t}{\sqrt{1 - \sin^2 h}} - \frac{\cos \varphi \cos \delta \sin h \sin^2 t}{(1 - \sin^2 h)^{3/2}} \right), \end{aligned} \quad (40)$$

здесь, с учетом (33), можно записать

$$\cos q = \sqrt{1 - \sin^2 q} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 t}{1 - \sin^2 h}}.$$

В последней формуле и в выражении (40)  $\sin^2 h$  определяется выражением (38).

В численном анализе результатов здесь и далее будем использовать функцию  $\eta = |\omega_{\text{fr}}/\omega_\oplus|$ . На рис. 13.а)-б) представлены поверхности зависимости параметра  $\eta$  от экваториальных координат центра поля зрения оптической системы "камера+объектив", в случае широты местности: а)  $\varphi = 0^\circ$ , б)  $\varphi = 53.2^\circ$  (широта г. Самары). Из рисунка очевидно, что данные зависимости имеют два максимума, расположенных в зените и надире наблюдателя. В данных точках рассматриваемая функция неограниченно стремится к бесконечности. В оставшейся области возможных значений независимых переменных данная функция изменяется плавно, при этом величина функции  $\eta$  может быть существенно меньше единицы.

Далее представим данную величину как функцию угловой скорости ( $\omega_\oplus$ ) осевого вращения Земли, широты ( $\varphi$ ) места наблюдения и горизонтальных координат ( $h, A$ ) звезды  $S_1$ , т. е.  $\omega_{\text{fr}} = \omega_{\text{fr}}(\omega_\oplus, \varphi, h, A)$ . Для этого перепишем формулу (40) в виде (1 балл):

$$\omega_{\text{fr}} = \frac{\omega_\oplus \cos \varphi}{\cos q} \left( \frac{\cos t}{\cos h} - \frac{\cos \varphi \cos \delta \sin h \sin^2 t}{\cos^3 h} \right), \quad (41)$$



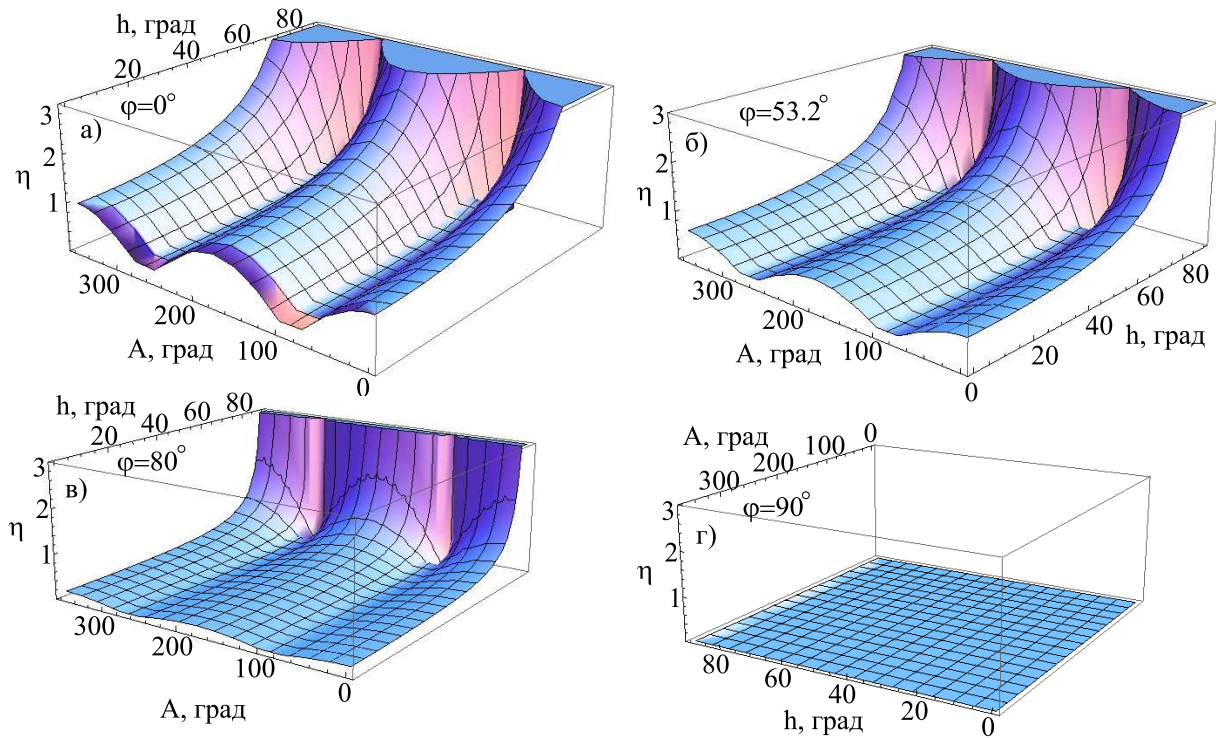


Рис. 14. К определению поверхностей зависимости параметра  $\eta$  от горизонтальных координат центра поля зрения оптической системы "камера+объектив" в случае широты места съемки: а)  $\varphi = 0^\circ$ , б)  $\varphi = 53.2^\circ$ , в)  $\varphi = 80^\circ$ , г)  $\varphi = 90.0^\circ$ .

здесь, с учетом (34), можно записать

$$\cos q = \sqrt{1 - \sin^2 q} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 A}{1 - \sin^2 \delta}}.$$

Из формул (36), (38) следуют явные выражения для  $\sin t$  и  $\cos t$ :

$$\sin t = \frac{\cos h \sin A}{\cos \delta}, \quad \cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}.$$

В последних формулах и в выражении (41)  $\sin \delta$  определяется выражением (37), а  $\cos \delta = \sqrt{1 - \sin^2 \delta}$ .

На рис. 14 представлены поверхности зависимости параметра  $\eta$  от горизонтальных координат центра поля зрения оптической системы "камера+объектив" в случае 4-х значений широты места съемки: а)  $\varphi = 0^\circ$ , б)  $\varphi = 53.2^\circ$ , в)  $\varphi = 80^\circ$ , г)  $\varphi = 90.0^\circ$ . Из рисунка видно, что наибольшая скорость вращения поля достигается на небесном меридиане (азимуты  $0^\circ$  и  $180^\circ$ , см. рис. 14.а), а наименьшая – на первом вертикале (азимуты  $90^\circ$  и  $270^\circ$ ). При этом наиболее ярко выраженная волнистость поверхности и самый широкий максимум данной величины (в зените) достигается на земном экваторе, в то время как на геолюсе наблюдается полное отсутствие поля вращения, что и следовало ожидать.

**3.** Поскольку, угловой диаметр  $d$  поля зрения оптической системы "камера+объектив" относительно небольшой, мы будем полагать что в пределах всего поля зрения угловая скорость вращения поля постоянна и равна скорости, определяемой для его центральной точки, т. е.  $\omega_{fr}$ . За время наблюдений



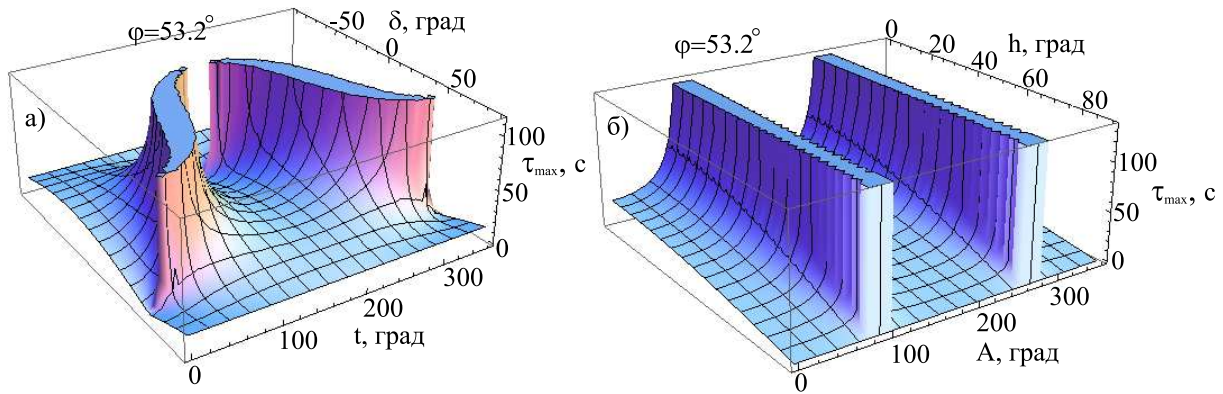


Рис. 15. К определению поверхностей зависимости  $\tau_{\max}$  (в секундах) от а) экваториальных, б) горизонтальных координат центра поля зрения оптической системы "камера+объектив" в случае широты места съемки  $\varphi = 53.2^\circ$  (для г. Самары).

$\tau$  звезда, располагающаяся на самой границе поля зрения данной оптической системы, опишет относительно центральной точки трек, линейная протяженность которого будет

$$L = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \omega_{\text{fr}} \tau.$$

С другой стороны, количество пикселей матрицы такого сетапа обычно составляет  $N = 18 \cdot 10^6$ . Следовательно, площадь одного пикселя должна быть

$$S_0 = \frac{a \times b}{N} = 1.875 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^2, \text{ иначе } S_0 = c^2, \Rightarrow c = \sqrt{S_0} = 4.33 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

В последнем выражении  $c$  – характерный размер одного пикселя. Согласно, следствию теоремы Котельникова, для формирования элементарного цифрового изображения звезды необходимо использование не менее 3 пикселей матрицы. Чтобы в кадре отсутствовали образы «потянутых звезд» необходимо, чтобы световой луч прошел на матрице путь не более  $c \sqrt{3.5^2 + 1} = 3.64 \cdot c$  (луч, покрывший меньше 3.5 пикселей, сможет активировать в работу лишь 3 пикселя; максимальный путь получается при движении по диагонали 3.5 пикселей). При этом линейная протяженность этого пути должна быть

$$\ell_0 = 3.64 \cdot c = 15.76 \text{ мкм.}$$

Из равенство величин  $L$  и  $\ell_0$  следует явное выражение для максимального времени выдержки (1 балл):

$$\tau_{\max} = \frac{2\ell_0}{\sqrt{a^2 + b^2} \omega_{\text{fr}}} \frac{1}{\eta} = \tau_0 \cdot \frac{1}{\eta}, \text{ где } \tau_0 = \frac{2\ell_0}{\sqrt{a^2 + b^2} \omega_{\oplus}} \frac{1}{\eta} = 16.0 \text{ с.} \quad (42)$$

На рис. 15 представлены поверхности зависимости  $\tau_{\max}$  от а) экваториальных, б) горизонтальных координат центра поля зрения оптической системы "камера+объектив", в случае широты места съемки  $\varphi = 53.2^\circ$  (для г. Самары). Из рисунка видно, что максимальное время выдержки может существенно превышать  $10^2$  секунд, если объект съемки находится в окрестности

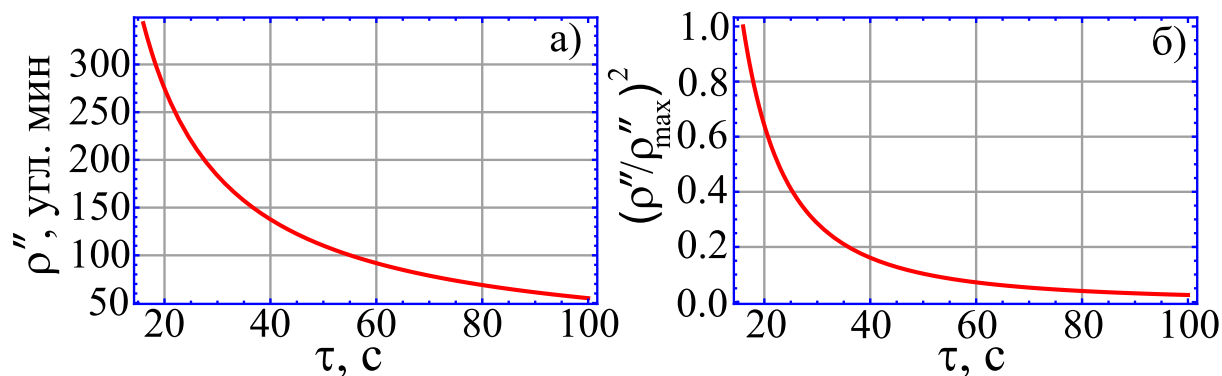


Рис. 16. К определению от времени выдержки  $\tau$  кривых зависимостей: а) углового радиуса  $\rho''$  (в угловых минутах) круговой части поля зрения камеры, б) отношения  $(\rho''/\rho''_{\max})^2$  (при  $\eta = 1$ ).

первого вертикала. При стремлении объекта съемки к зениту, время максимальной выдержки стремится к нулю. По мере удаления от зенита время выдержки плавно нарастает, достигая у горизонта величины порядка 30 секунд! (1 балл)

4. Пусть  $r_0$  – линейный радиус круговой области на матрице фотоаппарата, в пределах которой отсутствуют «потянутые звезды». Рассуждая аналогично предыдущему пункту, можем записать

$$r_0 \omega_{\text{fr}} \tau = \ell_0, \Rightarrow r_0 = \frac{\ell_0}{\omega_{\text{fr}} \tau} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \tau_{\max}}{2 \tau} = \frac{1}{\eta} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \cdot \frac{\tau_0}{\tau}.$$

Тогда искомым угловой радиус поля зрения будет (1 балл):

$$\operatorname{tg} \rho'' = \frac{r_0}{f}, \Rightarrow \rho'' = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\eta} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2f} \cdot \frac{\tau_0}{\tau} \right). \quad (43)$$

На рис. 16.а) представлена кривая зависимости углового радиуса  $\rho''$  круговой части поля зрения камеры, в пределах которой отсутствуют «потянутые звезды», от времени выдержки  $\tau$ . Очевидно, данная зависимость является гиперболической, поэтому искомая величина быстро уменьшается с увеличением времени выдержки. (1 балл) На рис. 16.б) представлена кривая зависимости отношения  $(\rho''/\rho''_{\max})^2$  (по сути, оно характеризует долю, которая составляет площадь искомой круговой части поля зрения камеры от максимальной площади кругового поля зрения камеры) от времени выдержки  $\tau$  при  $\eta = 1$ . Очевидно, что уже при выдержке в 25 секунд лишь 1/2 поля зрения камеры свободна от «потянутых звезд», а при выдержке в 35 секунд искомая доля составляет величину 0.2!

### №10. «Луна на новой орбите-2»

1. Очевидно, что максимального значения угловая скорость видимого перемещения Луны по небосводу будет достигать для наблюдателя в подлунной точке, поскольку именно в этом случае будет достигаться минимальное расстояние  $(\Delta_{\zeta}^{(1)})$  от Луны до наблюдателя, а угловая скорость, как известно,

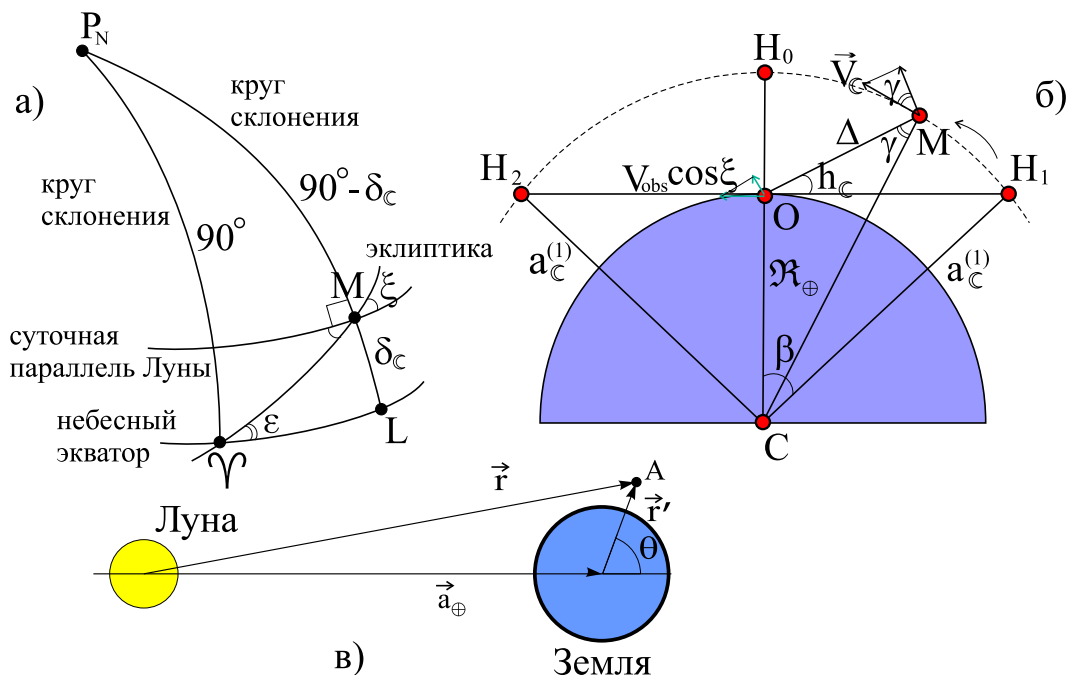


Рис. 17. К определению: а) вспомогательного сферического треугольника  $\Delta_S \Upsilon P_N M$ , б) собственного движения Луны, в) параметров  $r'$  и  $\theta$ , задающих выражение для потенциальной энергии приливной силы.

обратно пропорциональна ему. При этом центр видимого диска Луны для наблюдателя должен пройти через его зенит. Если полагать, что направление движения Луны относительно центра Земли совпадает с направлением осевого вращения Земли, то угловая скорость видимого движения Луны, расположенной для наблюдателя в окрестности зенита, есть модуль разности вектора орбитальной скорости движения Луны ( $\vec{V}_\zeta$ ) и вектора скорости суточного вращения наблюдателя относительно центра Земли ( $\vec{V}_{\text{obs}}$ ), деленная на расстояние между центром Луны и наблюдателем:

$$\omega_{\text{rel}} = \frac{|\vec{V}_\zeta - \vec{V}_{\text{obs}}|}{\Delta_\zeta^{(1)}}.$$

Величины данных скоростей определяются выражениями вида:

$$V_\zeta = \frac{2\pi a_\zeta^{(1)}}{T_\zeta^{(1)}} = 5.70 \text{ км/с}, \quad V_{\text{obs}} = V_{\text{eq}} \cos \varphi, \quad V_{\text{eq}} = \frac{2\pi \mathfrak{R}_\oplus}{T_\oplus} = 0.465 \text{ (км/с)},$$

$$|\vec{V}_\zeta - \vec{V}_{\text{obs}}| = \sqrt{V_\zeta^2 + V_{\text{obs}}^2 - 2V_\zeta V_{\text{obs}} \cos \xi},$$

здесь  $\xi$  – угол между векторами  $\vec{V}_\zeta$  и  $\vec{V}_{\text{obs}}$  или что тоже самое угол между дугой эклиптики и дугой суточной параллели в точке расположения центра диска Луны.

Рассмотрим вспомогательный сферический треугольник  $\Delta_S \Upsilon P_N M$  (см. рис. 17.а), образованный дугами  $P_N \Upsilon$  и  $P_N M$  кругов склонений, проходящих через точки весны  $\Upsilon$  и текущее положение Луны, а также дугой эклиптики  $\Upsilon M$ . Запишем для него формулу синусов:

$$\sin(90^\circ - \varepsilon) \sin 90^\circ = \sin(90^\circ - \delta_\zeta) \sin(90^\circ + \xi), \quad \Rightarrow$$

$$\cos \xi = \frac{\cos \varepsilon}{\cos \delta_{\zeta}}. \quad (44)$$

Поскольку видимый путь Луны проходит через зенит, то широта местоположения наблюдателя равна склонению Луны в данный момент, т. е.  $\varphi = \delta_{\zeta}$ . Тогда

$$|\vec{V}_{\zeta} - \vec{V}_{\text{obs}}| = \sqrt{V_{\zeta}^2 + V_{\text{eq}}^2 \cos^2 \varphi - 2V_{\zeta} V_{\text{eq}} \cos \varepsilon}.$$

Очевидно, последняя величина достигает максимума на геоэкваторе ( $\varphi = 0^\circ$ ). Тогда (1 балл)

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\Delta_{\zeta}^{(1)}} \sqrt{V_{\zeta}^2 + V_{\text{eq}}^2 - 2V_{\zeta} V_{\text{eq}} \cos \varepsilon} = 8.76 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с} = 3.0' / \text{с}. \quad (45)$$

2. Как известно, радиус-вектор центра масс определяется выражением вида:

$$\vec{R}_c = \frac{\mathfrak{M}_{\oplus} \vec{r}_{\oplus} + \mathfrak{M}_{\zeta} \vec{r}_{\zeta}}{\mathfrak{M}_{\oplus} + \mathfrak{M}_{\zeta}}.$$

В качестве начала отсчета выберем центр Земли, и спроецируем данное векторное выражение на ось, ориентированную от центра Земли к центру Луны. Тогда искомое расстояние будет (1 балл)

$$R_c = \frac{\mathfrak{M}_{\zeta} a_{\zeta}^{(1)}}{\mathfrak{M}_{\oplus} + \mathfrak{M}_{\zeta}} = 150.6 \text{ км}.$$

3. Будем полагать, что Солнце находится на среднем расстоянии от Земли, тогда его угловой диаметр будет

$$\mathcal{D}_{\odot}'' = \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_{\oplus}} \times 3438' = 32'.$$

Максимальная продолжительность полного солнечного затмения Луной на новой орбите, очевидно, будет достигаться в случае центрального затмения. Во время затмения, Луна должна переместиться относительно Солнца на угол, равный  $D_{\odot}'' + D_{\zeta}'' = 34.08^\circ$ . (1 балл) Очевидно, наблюдатель в этом случае должен быть расположен в плоскости орбиты Луны (эклиптики).

При этом, собственное движение Луны по небосводу, согласно рис. 17.б), представляется в виде:

$$\mu_{\zeta} = \frac{1}{\Delta_{\zeta}} (V_{\zeta} \cos \gamma - V_{\text{obs}} \cos \xi \sin h_{\zeta}) + \omega_{\oplus} \cos \delta_{\zeta} \cos \xi.$$

Минимальное значение  $\mu_{\zeta}$  будет достигаться в случае, когда Луна расположена на горизонте, т. е.  $h_{\zeta} = 0^\circ$  (1 балл):

$$\mu_{\zeta}^{(\min)} = \frac{V_{\zeta}}{a_{\zeta}^{(1)}} + \omega_{\oplus} \cos \delta_{\zeta} \cos \xi = \frac{2\pi}{T_{\zeta}^{(1)}} + \omega_{\oplus} \cos \varepsilon = 108.61^\circ / \text{час}. \quad (46)$$

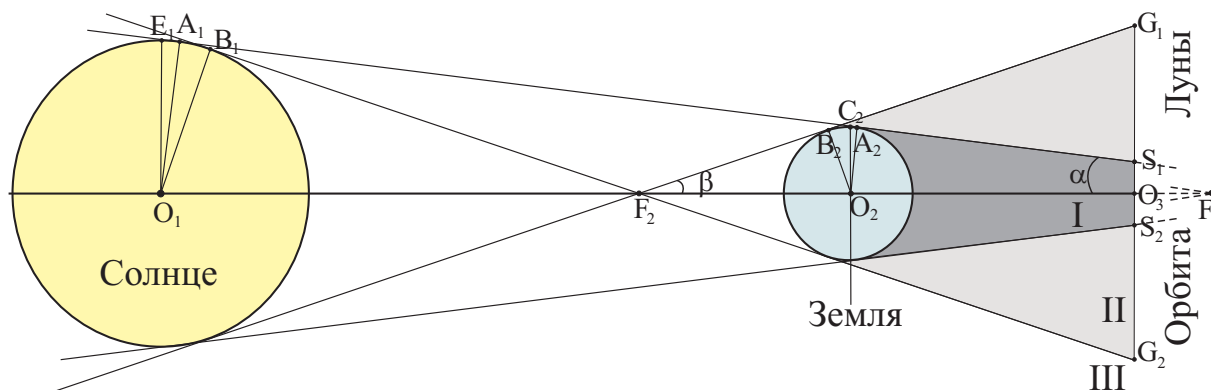


Рис. 18. К определению линейных размеров тени и полутени Земли.

В результате, продолжительность центрального затмения равна (1 балл)

$$\tau_{\text{eclipse}} = \frac{D_{\odot} + D_{\oplus}}{\mu_{\oplus}^{(\text{min})}} = 18.83 \text{ мин.}$$

5. Рассмотрим формирование тени/полутени Земли на орбите Луны. Поскольку Солнце много больше (в 109 раз!) Земли, то всегда существуют световые лучи (например,  $A_1A_2$ , на рис. 18), которые проходят по касательной к поверхностям данных тел (с одной стороны относительно прямой, проходящей через центры данных тел) и образуют внешнюю границу сходящегося к лунной орбите конуса тени Земли (область I за Землей).

Всегда существуют световые лучи, которые проходят в касательную, по разные стороны тел относительно прямой, проходящей через центры данных тел. Последние образуют внешнюю границу расходящегося конуса полутени (область II за Землей).

Определим угол  $\alpha$  при вершине  $F_1$  конуса тени и расстояние  $O_2F_1 = L$  от центра Земли до вершины. Для этого воспользуемся подобием треугольников  $\triangle O_1A_1F_1$  и  $\triangle O_2A_2F_1$ :

$$\frac{O_1A_1}{O_2A_2} = \frac{O_1F_1}{O_2F_1}, \Rightarrow O_2F_1 = O_1F_1 \left( \frac{O_2A_2}{O_1A_1} \right) = (O_1O_2 + L) \left( \frac{O_2A_2}{O_1A_1} \right).$$

Учтем далее, что  $O_1A_1 = \mathfrak{R}_{\odot} = 695500$  км – радиус Солнца,  $O_2A_2 = \mathfrak{R}_{\oplus} = 6371$  км – средний радиус Земли, тогда пусть

$$\nu = \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\odot}} = 9.160 \cdot 10^{-3}.$$

Расстояние от Земли до Солнца ( $O_1O_2 = r_{\oplus}$ ) изменяется в пределах:

$$a_{\oplus}(1 - \varepsilon_{\oplus}) \leq r_{\oplus} \leq a_{\oplus}(1 + \varepsilon_{\oplus}), \Rightarrow 147099586 \text{ км} \leq r_{\oplus} \leq 152096155 \text{ км.} \quad (47)$$

Тогда (1 балл)

$$L(1 - \nu) = \nu r_{\oplus}, \Rightarrow L = \frac{\nu r_{\oplus}}{1 - \nu}. \quad (48)$$

В итоге

$$1359877 \text{ км} \leq L \leq 1406100 \text{ км.} \quad (49)$$

Тогда синус угла  $\alpha$  есть

$$\sin \alpha = \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{L}, \Rightarrow \alpha = \arcsin \left[ \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{L} \right] \approx \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{r_{\oplus}}(1 - \nu).$$

Тогда диаметр пятна земной тени на лунной орбите есть

$$\begin{aligned} D_{\text{Sh}} &= S_1 S_2 = 2 O_3 F_1 \operatorname{tg} \alpha \approx 2(L - a_{\zeta}^{(1)}) \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{r_{\oplus}}(1 - \nu) = 2 \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{r_{\oplus}}(1 - \nu) \times \\ &\times \left( \frac{\nu r_{\oplus}}{1 - \nu} + r_{\oplus} - a_{\zeta}^{(1)} - r_{\oplus} \right) = 2 \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{r_{\oplus}}(1 - \nu) \left( \frac{r_{\oplus}}{1 - \nu} - a_{\zeta}^{(1)} - r_{\oplus} \right) = \\ &= 2 \mathfrak{R}_{\odot} (1 - (1 - \nu)(1 + x)) = 2 \mathfrak{R}_{\odot} (\nu - x(1 - \nu)), \quad x = \frac{a_{\zeta}^{(1)}}{r_{\oplus}}. \end{aligned}$$

В итоге (1 балл)

$$D_{\text{Sh}} = 2 \mathfrak{R}_{\odot} (\nu - x(1 - \nu)), \quad x = \frac{a_{\zeta}^{(1)}}{r_{\oplus}}. \quad (50)$$

Из последнего результата следует, что диаметр пятна достигает максимального значения, в случае, когда параметр  $x$  принимает минимальное значение (т. е. когда Земля находится в афелии своей орбиты). При  $x = \nu/(1 - \nu)$  диаметр пятна лунной тени становится равным нулю! Поскольку  $x$  может принимать значения из интервала:

$$8.148 \cdot 10^{-5} \leq x \leq 8.425 \cdot 10^{-5}, \quad (51)$$

то диаметр пятна лунной тени может принимать значения из интервала

$$12625 \text{ км} \leq D_{\text{Sh}} \leq 12629 \text{ км}, \Rightarrow 3.632 \leq \frac{D_{\text{Sh}}}{2 \mathfrak{R}_{\zeta}} \leq 3.633, \quad (52)$$

где  $\mathfrak{R}_{\zeta} = 1738$  км – средний радиус Луны. Тень Земли движется по эклиптике с той же скоростью ( $\omega_{\odot} = 0.041^\circ/\text{час}$ ) и в том же направлении, что и Солнце. Поскольку  $\omega_{\odot} \ll \omega_{\zeta}$ , то земную тень можно считать неподвижной. Очевидно, максимальная продолжительность  $\tau_{\text{max}}$  полного лунного затмения Землей будет достигаться в случае центрального затмения, и будет наблюдаться в точках поверхности Земли, расположенных "под эклиптикой". При этом ее величина, согласно рис. 19, составляет (1 балл)

$$\begin{aligned} \tau_{\text{max}} &= \frac{2\psi}{\omega_{\zeta}} = \frac{2 \arcsin \left( (D_{\text{Sh}}^{(\text{max})}/2 + \mathfrak{R}_{\zeta})/a_{\zeta}^{(1)} \right)}{\omega_{\zeta}}, \Rightarrow \\ \tau_{\text{max}} &= \frac{T_{\zeta}^{(1)}}{\pi} \arcsin \left( (D_{\text{Sh}}^{(\text{max})}/2 + \mathfrak{R}_{\zeta})/a_{\zeta}^{(1)} \right) = 51.28 \text{ мин.} \end{aligned} \quad (53)$$



Полученное значение существенно меньше максимальной продолжительности видимости Луны над горизонтом (1.683 часа, см. решение задачи №10 в параллели 7-9 классы), значит из одной точки неосвещенной поверхности Земли можно полностью пронаблюдать центральное лунное затмение.

4. Согласно определению, *площадной фазой планеты* называется отношение площади освещенной части поверхности планеты, видимой непосредственно наблюдателю, к площади ее главного поперечного сечения, ориентированного к наблюдателю, т. е.

$$\Phi_S = \frac{S_{\text{obs}}}{S_{\text{mcs}}}.$$

Из рис. 19 видно, что наибольшая фаза Луны будет обозреваться из точки  $F$  поверхности Земли в момент, когда центр Луны располагается на орбите в точке  $D$  (1 балл), поскольку в более поздние моменты времени Луна будет погружаться в земную тень и площадь освещенной части будет падать. Очевидно, площадь главного поперечного сечения Луны есть  $S_{\text{mcs}} = \pi \mathfrak{R}_\zeta^2$ . Наблюдатель из точки  $F$  видит лишь малое сечение Луны диаметром  $BE = d$ . Очевидно, что  $d/2 = \mathfrak{R}_\zeta \cos \rho_\zeta$ , здесь  $\rho_\zeta$  – угловой радиус Луны, видимой из точки  $F$ . Из треугольника  $\triangle FBD$  следует, что  $\text{tg } \rho_\zeta = BD/AF = \mathfrak{R}_\zeta/CA$ . В свою очередь  $CA$  можно определить из треугольника  $\triangle CAD$ :  $CA = a_\zeta^{(1)} \cos \psi$ . В итоге получаем (1 балл)

$$\begin{aligned} \Phi_S^{(\max)} &= \frac{\pi d^2/4}{\pi \mathfrak{R}_\zeta^2} = \cos^2 \rho_\zeta = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 \rho_\zeta} = \frac{1}{1 + (\mathfrak{R}_\zeta/a_\zeta^{(1)} \cos \psi)^2}, \Rightarrow \\ \Phi_S^{(\max)} &= \frac{(a_\zeta^{(1)})^2(1 - \sin^2 \psi)}{(a_\zeta^{(1)})^2(1 - \sin^2 \psi) + \mathfrak{R}_\zeta^2} = \frac{(a_\zeta^{(1)})^2 - (D_{\text{Sh}}^{(\max)}/2 + \mathfrak{R}_\zeta)^2}{(a_\zeta^{(1)})^2 + \mathfrak{R}_\zeta^2 - (D_{\text{Sh}}^{(\max)}/2 + \mathfrak{R}_\zeta)^2}, \\ \Phi_S^{(\max)} &= 0.967. \end{aligned} \quad (54)$$

6. Рассчитаем высоту приливного горба, возникающего в океане Земли под действием приливных сил Луны на новой орбите. Рассмотрим упрощенную ситуацию в отношении Земли: ради сокращения выкладок будем полагать, что Земля не имеет осевого вращения, и потому, действующая на нее приливообразующая сила Луны фактически не зависит от времени. В случае

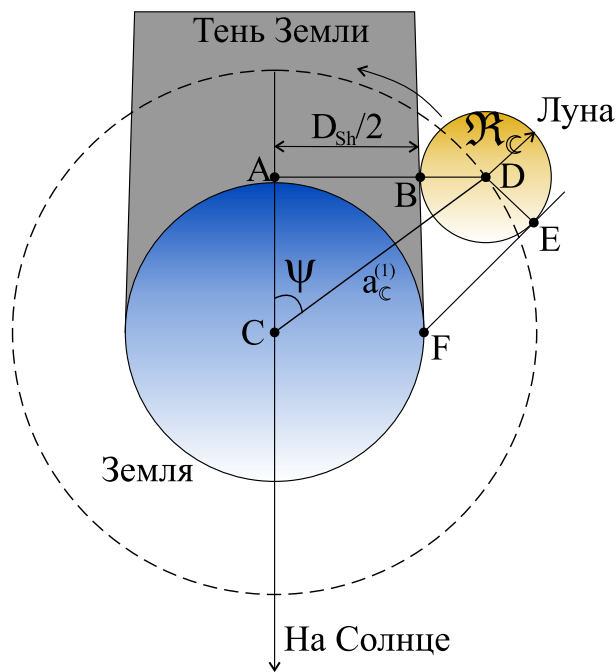


Рис. 19. К определению параметров задачи в случае лунного затмения.

невращающейся Земли, полная потенциальная энергия пробного тела массы  $m$  у ее поверхности определяется суммой двух слагаемых: энергией поля силы тяжести Земли  $U_g$  и энергией приливной силы Земли  $U_t$  (1 балл):

$$U_{\text{tot}}(r', \theta) = U_g + U_t = mg_{\zeta} r' - \frac{3}{4}U_0 \left( \frac{r'}{a_{\zeta}^{(1)}} \right)^2 \cos 2\theta, \quad (55)$$

здесь  $U_t$  – потенциальная энергия приливного взаимодействия для пробного тела массы  $m$ , которая определяется (см. например, литературу<sup>1</sup>) выражением вида:

$$U_t = -\frac{3}{4}U_0 \left( \frac{r'}{\Delta_i} \right)^2 \cos 2\theta, \quad \text{где } U_0 = \frac{G m \mathfrak{M}_i}{\Delta_i}, \quad (56)$$

здесь  $r'$  – величина геоцентрического радиус-вектора пробного тела (см. рис. 17.в),  $\Delta_i$  – геоцентрическое расстояние до приливообразующего тела,  $\mathfrak{M}_i$  – его масса (в нашем случае – это Луна);  $\theta$  – полярный угол, откладываемый от продолжения прямой "приливообразующее тело-Земля". С использованием явного выражения для приливной силы, можно легко убедиться в том, что последняя стремится растянуть сферическое тело Луны вдоль прямой "приливообразующее тело-Земля" и сдавить в направлениях, перпендикулярных к данному. В результате этого тело Земли приобретает форму слабо вытянутого эллипсоида, большая полуось которого равна  $a_E = \mathfrak{R}_{\oplus} + \delta a_{\oplus}$ , а малая полуось –  $b_E = \mathfrak{R}_{\oplus} - \delta a_{\oplus}$ , где  $\mathfrak{R}_{\oplus}$  – радиус сферического, невозмущенного тела Земли;  $\delta a_{\oplus}$  – высота приливного горба поверхности Земли, обусловленная действием приливообразующей силы Луны.

Поскольку форма Земли в равновесном состоянии не меняется, то потенциальная энергия  $U_{\text{tot}}$  во всех точках ее поверхности должна быть величиной постоянной. Следовательно, потенциальные энергии в ближайшей к Луне точке поверхности Земли и в точке, лежащей на малой оси, перпендикулярной направлению "приливообразующее тело-Земля" равны между собой

$$\begin{aligned} U_{\text{tot}}(a_E, \pi) &= U_{\text{tot}}(b_E, \pi/2), \Rightarrow \\ mg_{\oplus} a_E - \frac{3}{4}U_0 \left( \frac{a_E^2}{a_{\oplus}^2} \right) &= mg_{\oplus} b_E + \frac{3}{4}U_0 \left( \frac{b_E^2}{a_{\oplus}^2} \right), \Rightarrow \\ mg_{\oplus} (a_E - b_E) &= \frac{3}{4}U_0 \left( \frac{a_E^2 + b_E^2}{a_{\oplus}^2} \right), \Rightarrow mg_{\oplus} \delta a_{\oplus} \approx \frac{3}{4}U_0 \left( \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}^2}{a_{\oplus}^2} \right). \end{aligned}$$

В последнем выражении  $a_{\oplus} = a_{\zeta}^{(1)}$  – большая полуось лунной орбиты, определенной относительно центра Земли. Учитывая, что ускорение свободного

<sup>1</sup>Бутиков Е.И. Физика океанских приливов в компьютерных моделях. Учебное пособие и методические материалы к комплексу моделирующих программ. – С.-П.: СПбГУ. – 2007. – 16с.

падения на поверхности Земли есть

$$g_{\oplus} = \frac{G \mathcal{M}_{\oplus}}{\mathcal{R}_{\oplus}^2},$$

тогда высота горба на поверхности Земли представляется в виде (1 балл):

$$\delta a_{\oplus} = \frac{3}{4} \left( \frac{\mathcal{M}_{\zeta}}{\mathcal{M}_{\oplus}} \right) \left( \frac{R_{\oplus}}{a_{\zeta}^{(1)}} \right)^3 R_{\oplus} = 7.98 \text{ км.} \quad (57)$$

Т. о., по поверхности Земли будут блуждать гигантские приливные волны.

7. Далее получим аналитическое выражение для предела Роша Луны. В случае ее пребывания на орбите на минимальном расстоянии от Земли, последняя должна еще сохранять свою целостность. Следовательно центробежные ускорения для двух малых элементов тела Луны массы  $\Delta m$  (самого близкого и самого далекого относительно Земли) должны быть равны (см. рис. 20):

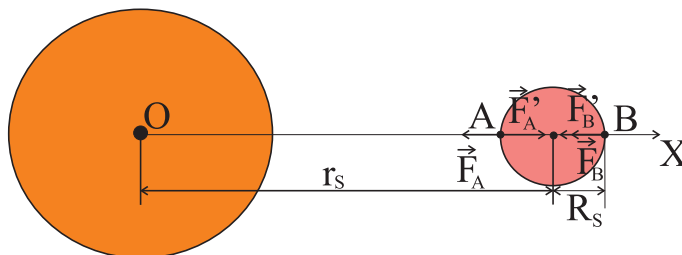


Рис. 20. К определению сил, действующих на Луну (радиуса  $R_s = \mathcal{R}_{\zeta}$ ) в поле тяготения Земли, расположенной на расстоянии  $r_s = a_{\zeta}^{(1)}$  от последней.

$$\left. \begin{aligned} \Delta m a &= F_A - F'_A \\ \Delta m a &= F_B + F'_B \end{aligned} \right\}, \Rightarrow F_A - F_B = 2 F'. \quad (58)$$

В выражениях (58)  $F_A, F_B$  – силы притяжения, действующие со стороны Земли на малые элементы Луны, расположенные в точках A и B ее поверхности;  $F'_A = F'_B = F'$  – силы притяжения, действующие на те же элементы со стороны Луны. Запишем (58) в явном виде (1 балл):

$$\frac{G \Delta m \mathcal{M}_{\oplus}}{(a_{\zeta}^{(1)} - \mathcal{R}_{\zeta})^2} - \frac{G \Delta m \mathcal{M}_{\oplus}}{(a_{\zeta}^{(1)} + \mathcal{R}_{\zeta})^2} = \frac{2 G \Delta m \mathcal{M}_{\zeta}}{\mathcal{R}_{\zeta}^2},$$

здесь  $\mathcal{M}_{\oplus}, \mathcal{M}_{\zeta}$  – масса Земли и Луны соответственно;  $a_{\zeta}^{(1)}, \mathcal{R}_{\zeta}$  – искомое минимальное расстояние и радиус Луны соответственно. Последнее уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{1}{(a_{\zeta}^{(1)} - \mathcal{R}_{\zeta})^2} - \frac{1}{(a_{\zeta}^{(1)} + \mathcal{R}_{\zeta})^2} = \frac{2\eta}{\mathcal{R}_{\zeta}^2}, \text{ здесь } \eta = \frac{\mathcal{M}_{\zeta}}{\mathcal{M}_{\oplus}}.$$

Поскольку  $\mathcal{R}_{\zeta} \ll a_{\zeta}^{(1)}$ , то можно воспользоваться приближением (1 балл)

$$(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x, \quad x \ll 1, \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(a_{\zeta}^{(1)})^2} \left( 1 - \frac{\mathcal{R}_{\zeta}}{a_{\zeta}^{(1)}} \right)^{-2} - \frac{1}{(a_{\zeta}^{(1)})^2} \left( 1 + \frac{\mathcal{R}_{\zeta}}{a_{\zeta}^{(1)}} \right)^{-2} = \frac{2\eta}{\mathcal{R}_{\zeta}^2}, \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(a_{\zeta}^{(1)})^2} \left( 1 + \frac{2\mathfrak{R}_{\zeta}}{a_{\zeta}^{(1)}} - 1 + \frac{2\mathfrak{R}_{\zeta}}{a_{\zeta}^{(1)}} \right) = \frac{2\eta}{\mathfrak{R}_{\zeta}^2}, \Rightarrow \frac{4\mathfrak{R}_{\zeta}}{(a_{\zeta}^{(1)})^3} = \frac{2\eta}{\mathfrak{R}_{\zeta}^2}, \Rightarrow \quad (59)$$

$$a_{\text{Roche}} = \mathfrak{R}_{\zeta} \sqrt[3]{\frac{2}{\eta}} = \mathfrak{R}_{\zeta} \sqrt[3]{\frac{2\mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{M}_{\zeta}}} = 9.490 \cdot 10^3 \text{ км.}$$

Отметим, что последний результат определяет *предел Роша* – минимальный радиус круговой орбиты Луны, обращающейся вокруг Земли, на которой приливные силы, вызванные гравитацией Земли, равны силам самогравитации этой Луны и последняя еще может сохранять целостность своего тела. На меньших расстояниях от Земли Луна будет разрушена приливными силами. Очевидно, полученное значение меньше радиуса орбиты Луны, следовательно на орбите радиуса  $a_{\zeta}^{(1)}$  Луна сможет существовать сохраняя свою целостность! (1 балл)

---



---

---

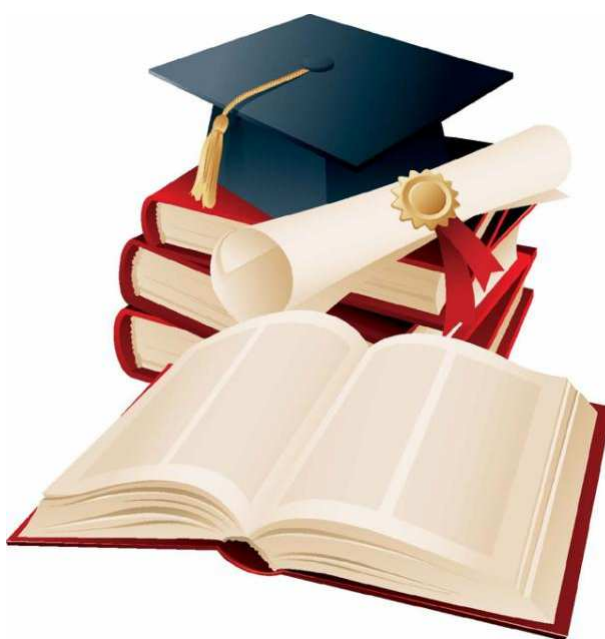
---

---

# СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ

---

---



## А.1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная –  $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме –  $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная –  $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана –  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Постоянная Авогадро –  $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
- Масса протона –  $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона –  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица –  $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек –  $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла –  $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

## А.2. Данные о Солнце

- Радиус –  $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса –  $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость –  $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина –  $-26.74^m$
- Абсолютная болометрическая звездная величина –  $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) –  $+0.67^m$
- Эффективная температура –  $5778 \text{ К}$
- Средний горизонтальный параллакс –  $8.794''$
- Солнечная постоянная (во всем спектре) на расстоянии Земли –  $1361 \text{ Вт/м}^2$
- Солнечная постоянная (в видимом свете) на расстоянии Земли –  $600 \text{ Вт/м}^2$

## А.3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты –  $0.017$
- Тропический год –  $365.24219 \text{ сут}$
- Средняя орбитальная скорость –  $29.8 \text{ км/с}$
- Период вращения –  $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 –  $23^\circ 26' 21.45''$



- Средний по объему радиус – 6371.0 км
- Средний экваториальный радиус – 6378.14 км
- Длина земного меридиана – 20004.276 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Масса –  $5.974 \cdot 10^{24}$  кг
- Средняя плотность –  $5.52 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы –  $\text{N}_2$  (78%),  $\text{O}_2$  (21%), Ar ( $\sim 1\%$ )

#### А.4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике –  $5^\circ 09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса –  $7.348 \cdot 10^{22}$  кг или  $1/81.3$  массы Земли
- Средняя плотность –  $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние –  $-12.7^m$
- Видимая звездная величина в первой/последней четверти –  $-10.0^m$

#### А.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx;$$

здесь  $x \ll 1$ , все углы выражаются в радианах.

## А.6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

## А.7. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альbedo	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	$-26.8^m$
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	$-0.1$
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут <sup>†</sup>	177.36	0.65	$-4.4^m$
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	$-2.0^m$
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	$-2.7^m$
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	$0.4^m$
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час <sup>†</sup>	97.86	0.51	$5.7^m$
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	$7.8^m$

\* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

## А.8. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см <sup>-3</sup>	км	сут		
<b>Земля</b>							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
<b>Марс</b>							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
<b>Юпитер</b>							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
<b>Сатурн</b>							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
<b>Уран</b>							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
<b>Нептун</b>							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 <sup>†</sup>	0.7	13.5

\* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

### А.9. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике и график для уравнения времени

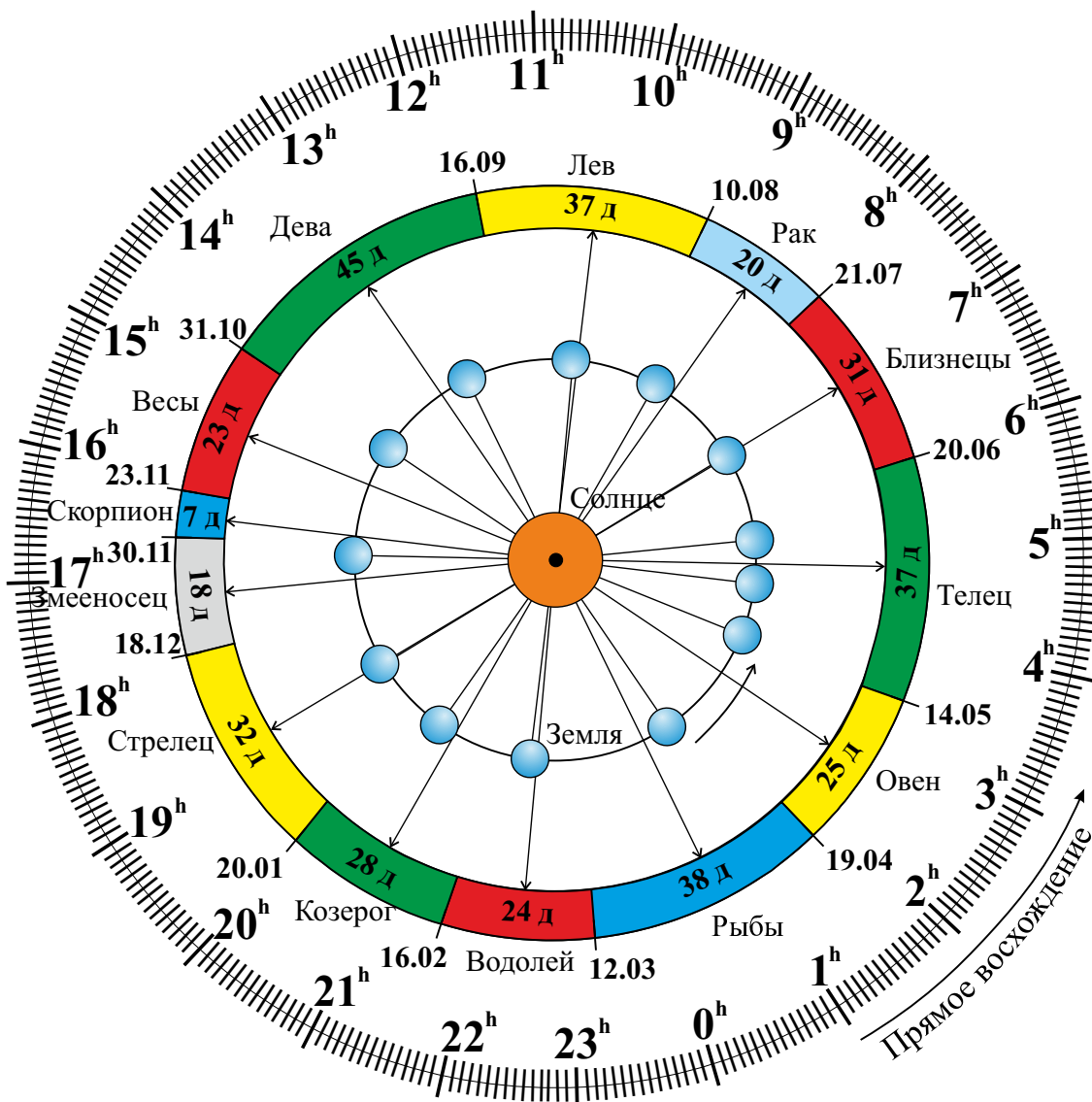


Рис. А.1. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике.

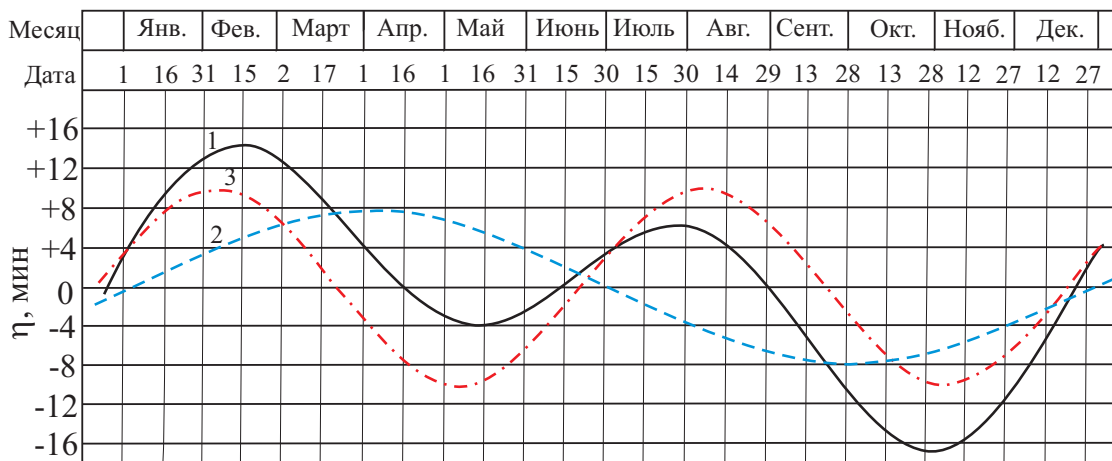


Рис. А.2. График уравнения времени: 1 – уравнение времени, 2 – уравнение центра, 3 – уравнение от наклона эклиптики.

## А.10. Яркие звезды ночного небосвода

### Топ-25 ярчайших звезд ночного небосвода

№	Название	$\alpha$	$\delta$	$r$ , св.л.	$m$ , <sup>m</sup>	$M$ , <sup>m</sup>	Сп. кл.	Полушарие и № в нем
1	Сириус ( $\alpha$ Большого Пса)	06 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> 9 <sup>s</sup>	-16°42'58"	8.6	-1.46	1.4	A1Vm	Южное (01)
2	Канопус ( $\alpha$ Киля)	06 <sup>h</sup> 23 <sup>m</sup> 57 <sup>s</sup>	-52°41'45"	310	-0.72	-5.53	A9II	Южное (02)
3	Ригил(A)/Толлиман(B) ( $\alpha$ Центавра АВ)	14 <sup>h</sup> 39 <sup>m</sup> 35 <sup>s</sup>	-60°50'15"	4.3	-0.27	4.06	G2V + K1V	Южное (03)
4	Арктур ( $\alpha$ Волопаса)	14 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> 40 <sup>s</sup>	19°10'57"	36.7	-0.05	-0.3	K1.5IIIp	Северное (01)
5	Вега ( $\alpha$ Лир)	18 <sup>h</sup> 36 <sup>m</sup> 56 <sup>s</sup>	38°47'01"	25	0.03 <sup>v</sup>	0.6	A0Va	Северное (02)
6	Капелла ( $\alpha$ Возничего)	05 <sup>h</sup> 16 <sup>m</sup> 41 <sup>s</sup>	45°59'53"	42.2	0,08	-0.5	G6III + G2III	Северное (03)
7	Ригель ( $\beta$ Ориона)	05 <sup>h</sup> 14 <sup>m</sup> 32 <sup>s</sup>	-08°12'06"	870	0.12 <sup>v</sup>	-7.84	B8Iae	Южное (04)
8	Процион ( $\alpha$ Малого Пса)	07 <sup>h</sup> 39 <sup>m</sup> 18 <sup>s</sup>	+05°13'30"	11.4	0.38	2.6	F5IV-V	Северное (04)
9	Ахернар ( $\alpha$ Эридана)	01 <sup>h</sup> 37 <sup>m</sup> 43 <sup>s</sup>	-57°14'12"	139	0.46	-1.3	B3Vnp	Южное (05)
10	Бетельгейзе ( $\alpha$ Ориона)	05 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup> 10 <sup>s</sup>	07°24'25"	530	0.50 <sup>v</sup>	-5.14	M2Iab	Северное (05)
11	Хадар ( $\beta$ Центавра)	14 <sup>h</sup> 03 <sup>m</sup> 49 <sup>s</sup>	-60°22'23"	400	0.61 <sup>v</sup>	-5.4	B1III	Южное (06)
12	Альтаир ( $\alpha$ Орла)	19 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup> 47 <sup>s</sup>	08°52'06"	16.8	0.77	2.3	A7Vn	Северное (06)
13	Акрукс ( $\alpha$ Южного Креста)	12 <sup>h</sup> 26 <sup>m</sup> 36 <sup>s</sup>	-63°05'57"	321	0.77	-4.1	B0.5IV + B1Vn	Южное (07)
14	Альдебаран ( $\alpha$ Тельца)	04 <sup>h</sup> 35 <sup>m</sup> 55 <sup>s</sup>	16°30'33"	65	0.85 <sup>v</sup>	-0.3	K5III	Северное (07)
15	Антарес ( $\alpha$ Скорпиона)	16 <sup>h</sup> 29 <sup>m</sup> 24 <sup>s</sup>	-26°25'55"	610	0.96 <sup>v</sup>	-5.2	M1.5Iab	Южное (08)
16	Спика ( $\alpha$ Девы)	13 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup> 12 <sup>s</sup>	-11°09'41"	250	0.98 <sup>v</sup>	-3.2	B1V	Южное (09)
17	Поллукс ( $\beta$ Близнецов)	7 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> 19 <sup>s</sup>	28°01'34"	33.7	1.14	0.7	K0IIIb	Северное (08)
18	Фомальгаут ( $\alpha$ Южной Рыбы)	22 <sup>h</sup> 57 <sup>m</sup> 39 <sup>s</sup>	-29°37'20"	25	1.16	2.0	A3Va	Южное (10)
19	Мимоза ( $\beta$ Южного Креста)	12 <sup>h</sup> 47 <sup>m</sup> 43 <sup>s</sup>	-59°41'19"	353	1.25 <sup>v</sup>	-4.0	B0.5III	Южное (11)

## Топ-25 ярчайших звезд ночного небосвода (продолжение)

20	Денеб ( $\alpha$ Лебедя)	20 <sup>h</sup> 41 <sup>m</sup> 26 <sup>s</sup>	45°16'49"	1550	1.25	-8.38	A2Ia	Северное (09)
21	Регул ( $\alpha$ Льва)	10 <sup>h</sup> 08 <sup>m</sup> 22 <sup>s</sup>	11°58'02"	77	1.35	-0.5	B7Vn	Северное (10)
22	Адара ( $\epsilon$ Большого Пса)	06 <sup>h</sup> 58 <sup>m</sup> 38 <sup>s</sup>	-28°58'19"	400	1.50	-4.8	B2II	Южное (12)
23	Кастор ( $\alpha$ Близнецов)	07 <sup>h</sup> 34 <sup>m</sup> 36 <sup>s</sup>	31°53'18"	51.5	1.57	0.5	A1V + A2V	Северное (11)
24	Гакрукс ( $\gamma$ Южного Креста)	12 <sup>h</sup> 31 <sup>m</sup> 10 <sup>s</sup>	-57°06'48"	88	1.63 <sup>v</sup>	-1.2	M3.5III	Южное (13)
25	Шаула ( $\lambda$ Скорпиона)	17 <sup>h</sup> 33 <sup>m</sup> 37 <sup>s</sup>	-37°06'13"	365	1.63 <sup>v</sup>	-3.5	B1.5IV	Южное (14)

## А.11. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела, болометрические поправки

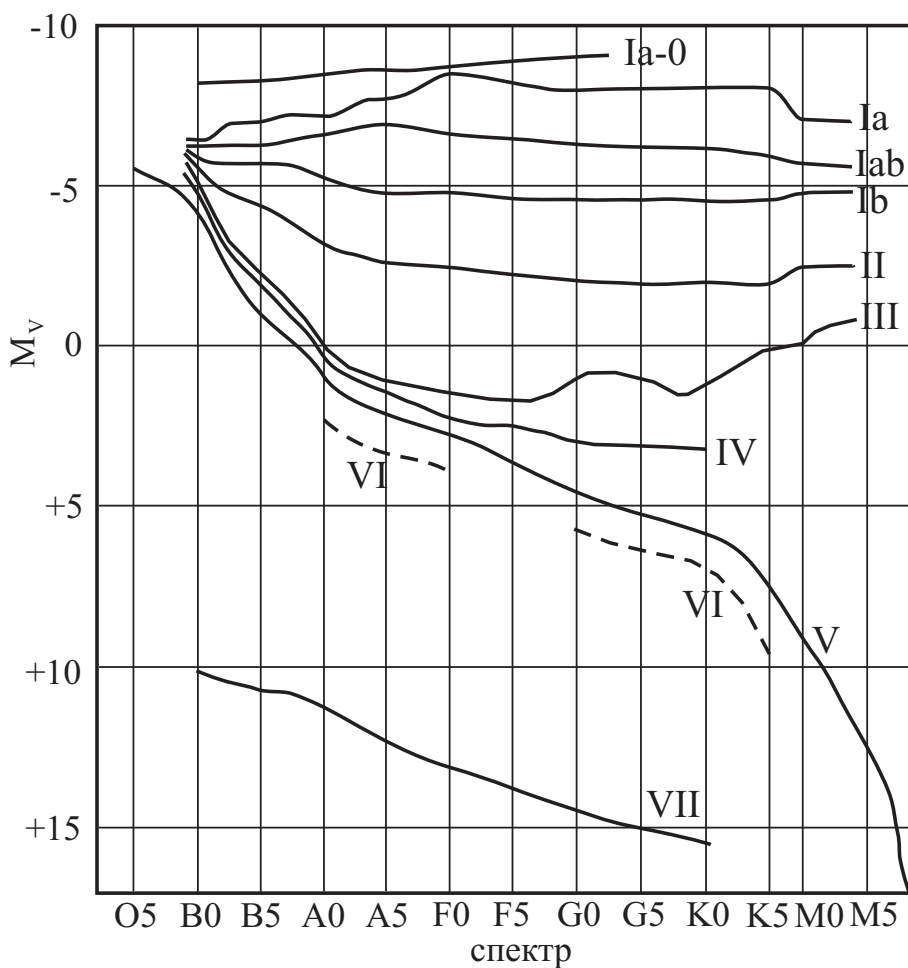


Рис. А.3. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.



Болометрические поправки  $\Delta M_b$ 

Спектр	$\Delta M_b$	Спектр	$\Delta M_b$		
			Гл. последовательность	Гиганты	Сверхгиганты
B0	- 2.70	F5	- 0.04	- 0.08	- 0.12
B5	- 1.58	F8	- 0.05	- 0.17	- 0.28
A0	- 0.72	G0	- 0.06	- 0.25	- 0.42
A5	- 0.31	G2	- 0.07	- 0.31	- 0.52
F0	- 0.09	G5	- 0.10	- 0.39	- 0.65
F2	- 0.04	G8	- 0.10	- 0.47	- 0.80
		K0	- 0.11	- 0.54	- 0.93
		K2	- 0.15	- 0.72	- 1.20
		K3	- 0.31	- 0.89	- 1.35
		K4	- 0.55	- 1.11	- 1.56
		K5	- 0.85	- 1.35	- 1.86
		M0	- 1.43	- 1.55	- 2.2
		M1	- 1.70	- 1.72	- 2.6
		M2	- 2.03	- 1.95	- 3.0
		M3	- 2.35	- 2.26	- 3.6
		M4	- 2.7	- 2.72	- 3.8
		M5	- 3.1	- 3.4	- 4.0

### А.12. Статистика распределения звезд по звездным величинам

$m$	Кол-во звезд	$m$	Кол-во звезд	$m$	Кол-во звезд, $\times 10^6$	$m$	Кол-во звезд, $\times 10^6$
$0^m$	4	$5^m$	1602	$10^m$	0.340	$15^m$	36.9
$1^m$	15	$6^m$	4800	$11^m$	0.927	$16^m$	83.7
$2^m$	48	$7^m$	14000	$12^m$	2.46	$17^m$	182
$3^m$	171	$8^m$	42000	$13^m$	6.29	$18^m$	374
$4^m$	513	$9^m$	121000	$14^m$	15.5	$19^m$	733

Примечание: здесь указано количество звезд на всем небосводе, имеющих блеск ярче указанной звездной величины, согласно Star Numbers, 2001.

# А.13. Таблица Менделеева

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

ПЕРИОДЫ	A I		II		III		IV		V		VI		VII		VIII		B			
	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne	Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar		He		
1	3 6.941 Lithium Литий	4 9.0122 Beryllium Бериллий	5 10.811 Boron Бор	6 12.011 Carbonium Углерод	7 14.007 Nitrogenium Азот	8 15.999 Oxygenium Кислород	9 18.998 Fluorium Фтор	10 20.179 Neon Неон	11 22.99 Sodium Натрий	12 24.305 Magnesium Магний	13 26.9815 Aluminium Алюминий	14 28.086 Silicium Кремний	15 30.974 Phosphorus Фосфор	16 32.066 Sulfur Сера	17 35.453 Chlorium Хлор	18 39.948 Argon Аргон	19 39.948 Argon Аргон	20 4.002602 Helium Гелий		
2	19 39.098 Potassium Калий	20 40.08 Calcium Кальций	21 44.956 Scandium Скандий	22 47.90 Titanium Титан	23 50.941 Vanadium Ванадий	24 51.996 Chromium Хром	25 54.938 Manganese Марганец	26 55.847 Iron Железо	27 58.933 Cobaltum Кобальт	28 58.70 Niccolum Никель	29 63.546 Cuprum Медь	30 65.39 Zincum Цинк	31 69.72 Gallium Галлий	32 72.59 Germanium Германий	33 74.992 Arsenicum Мышьяк	34 78.96 Selenium Селен	35 79.904 Kryptonum Криптон	36 83.80 Kryptonum Криптон	37 85.468 Rubidium Рубидий	
3	37 85.468 Rubidium Рубидий	38 87.62 Strontium Стронций	39 88.906 Yttrium Иттрий	40 91.22 Zirconium Цирконий	41 92.906 Niobium Нйбий	42 95.94 Molybdenum Молибден	43 97.91 Technetium Технеций	44 101.07 Ruthenium Рутений	45 102.905 Rhodium Родий	46 106.4 Palladium Палладий	47 107.868 Argentum Серебро	48 112.41 Cadmium Кадмий	49 114.82 Indium Индий	50 118.71 Tinnum Олово	51 121.75 Antimony Сурьма	52 127.60 Tellurium Теллур	53 126.9045 Xenonum Ксенон	54 131.29 Xenonum Ксенон	55 132.905 Cesiumum Цезий	
4	79 196.967 Aurum Золото	80 200.59 Hydrargyrum Ртуть	81 204.38 Thallium Таллий	82 207.19 Plumbum Свинец	83 208.980 Bismuthum Висмут	84 209.99 Polonium Полоний	85 209.99 Astatium Астат	86 190.2 Osmiumum Осмий	87 192.22 Iridiumum Иридий	88 195.08 Platinumum Платина	89 196.967 Aurum Золото	90 200.59 Hydrargyrum Ртуть	91 204.38 Thallium Таллий	92 207.19 Plumbum Свинец	93 208.980 Bismuthum Висмут	94 209.99 Polonium Полоний	95 210 Mendeleviumum Мейтнерий	96 210 Mendeleviumum Мейтнерий	97 211 Franciumum Франций	
5	107.868 Argentum Серебро	112.41 Cadmium Кадмий	114.82 Indium Индий	118.71 Tinnum Олово	121.75 Antimony Сурьма	127.60 Tellurium Теллур	126.9045 Xenonum Ксенон	131.29 Xenonum Ксенон	132.905 Cesiumum Цезий	137.33 Bariumum Барий	138.9055 Lanthanumum Лантан	140.12 Ceriumum Церий	140.908 Praseodymiumum Прозачдий	141.904 Neodymiumum Неодим	144.24 Promethiumum Прометий	144.91 Europiumum Европий	151.96 Gadoliniumum Гадолиний	157.25 Terbiumum Тербий	158.926 Dysprosiumum Диспрозий	
6	132.905 Cesiumum Цезий	137.33 Bariumum Барий	138.9055 Lanthanumum Лантан	140.12 Ceriumum Церий	140.908 Praseodymiumum Прозачдий	141.904 Neodymiumum Неодим	144.24 Promethiumum Прометий	144.91 Europiumum Европий	151.96 Gadoliniumum Гадолиний	157.25 Terbiumum Тербий	158.926 Dysprosiumum Диспрозий	162.50 Holmiumum Гольмий	164.930 Erbiumum Эрбий	167.26 Thuliumum Тулий	168.934 Ytterbiumum Иттербий	173.04 Lucentiumum Лютеций	174.967 Ytterbiumum Иттербий	175.04 Lucentiumum Лютеций	175.04 Lucentiumum Лютеций	175.04 Lucentiumum Лютеций
7	196.967 Aurum Золото	200.59 Hydrargyrum Ртуть	204.38 Thallium Таллий	207.19 Plumbum Свинец	208.980 Bismuthum Висмут	209.99 Polonium Полоний	209.99 Astatium Астат	190.2 Osmiumum Осмий	192.22 Iridiumum Иридий	195.08 Platinumum Платина	210 Mendeleviumum Мейтнерий	210 Mendeleviumum Мейтнерий	211 Franciumum Франций	223 Franciumum Франций	226 Radiumum Радий	227 Actiniumum Актиний	227 Actiniumum Актиний	227 Actiniumum Актиний	227 Actiniumum Актиний	227 Actiniumum Актиний
формлы летучих оксидов	R <sub>2</sub> O		RO		R <sub>2</sub> O <sub>3</sub>		RO <sub>2</sub>		R <sub>2</sub> O <sub>5</sub>		RH <sub>2</sub>		RH <sub>3</sub>		R <sub>2</sub> O <sub>7</sub>		RO <sub>4</sub>			
формлы летучих соединений	R <sub>2</sub> O		RO		R <sub>2</sub> O <sub>3</sub>		RO <sub>2</sub>		R <sub>2</sub> O <sub>5</sub>		RH <sub>2</sub>		RH <sub>3</sub>		R <sub>2</sub> O <sub>7</sub>		RO <sub>4</sub>			
ЛАНТАНОИДЫ*	59 140.12 Ceriumum Церий	60 140.908 Praseodymiumum Прозачдий	61 141.904 Neodymiumum Неодим	62 144.24 Promethiumum Прометий	63 151.96 Gadoliniumum Гадолиний	64 157.25 Terbiumum Тербий	65 158.926 Dysprosiumum Диспрозий	66 162.50 Holmiumum Гольмий	67 164.930 Erbiumum Эрбий	68 167.26 Thuliumum Тулий	69 168.934 Ytterbiumum Иттербий	70 173.04 Lucentiumum Лютеций	71 174.967 Ytterbiumum Иттербий	72 175.04 Lucentiumum Лютеций	73 175.04 Lucentiumum Лютеций	74 175.04 Lucentiumum Лютеций	75 175.04 Lucentiumum Лютеций	76 175.04 Lucentiumum Лютеций	77 175.04 Lucentiumum Лютеций	78 175.04 Lucentiumum Лютеций
АКТИНОИДЫ**	89 223.038 Franciumum Франций	90 226.025 Radiumum Радий	91 227.028 Actiniumum Актиний	92 227.028 Thoriumum Торий	93 227.028 Protactiniumum Протактиний	94 238.028 Uraniumum Уран	95 238.028 Neptuniumum Нептуний	96 237.043 Plutoniumum Плутоний	97 244.063 Americiumum Америций	98 244.063 Curiumum Кюрий	99 247.07 Berkeliumum Берклиний	100 251.08 Californiumum Калифорний	101 252.08 Einsteiniumum Эйнштейний	102 252.08 Fermiumum Фермий	103 257.10 Mendeleviumum Менделеев	104 258.10 Nobeliumum Нобелий	105 259.10 Lawrenciumum Лавренсий	106 260.10 Lawrenciumum Лавренсий	107 261.10 Lawrenciumum Лавренсий	108 261.10 Lawrenciumum Лавренсий

Рис. А.4. Таблица Менделеева.

## В.1. Карты звездного неба

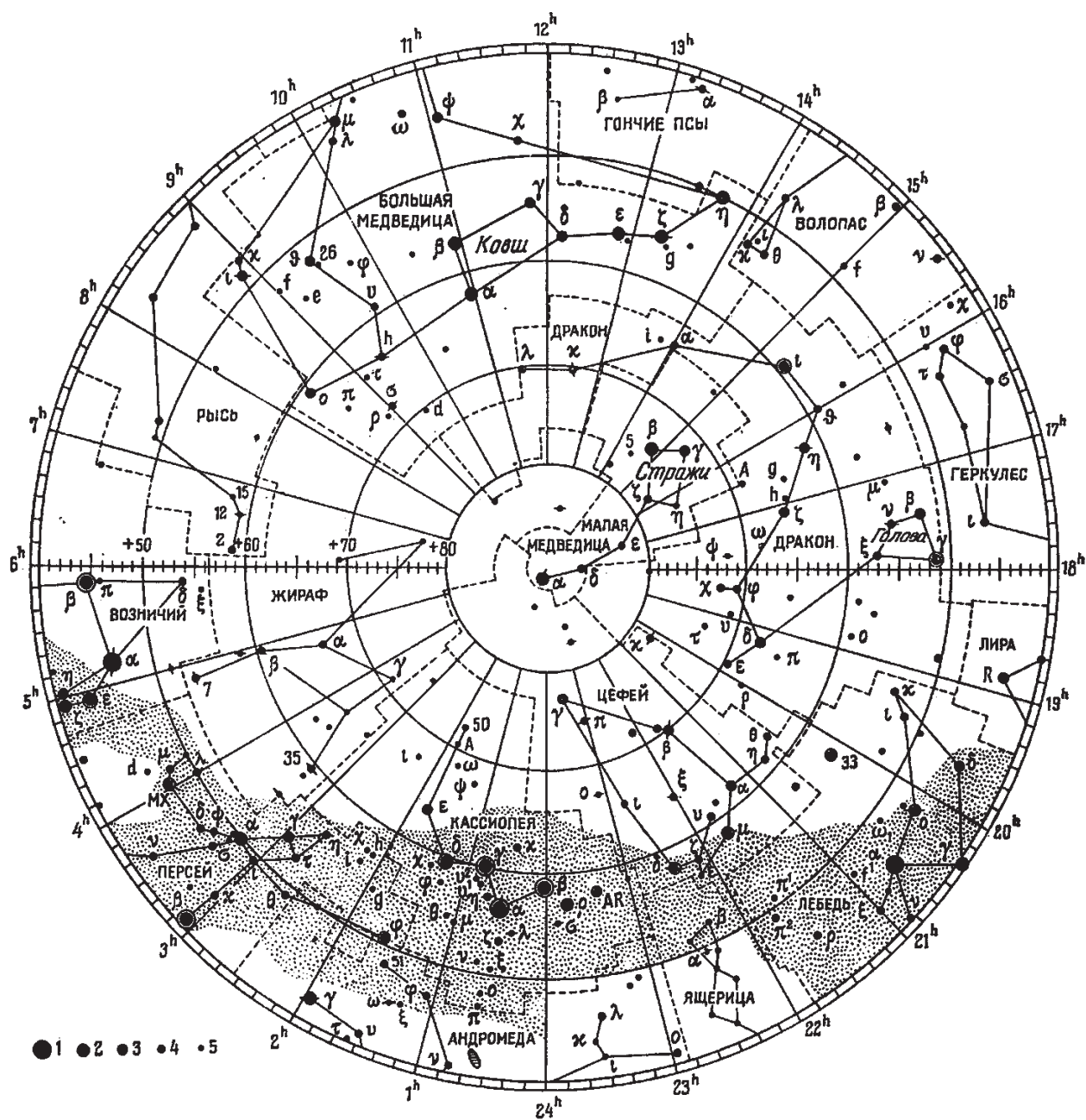


Рис. В.1. Карта северной околополярной области.





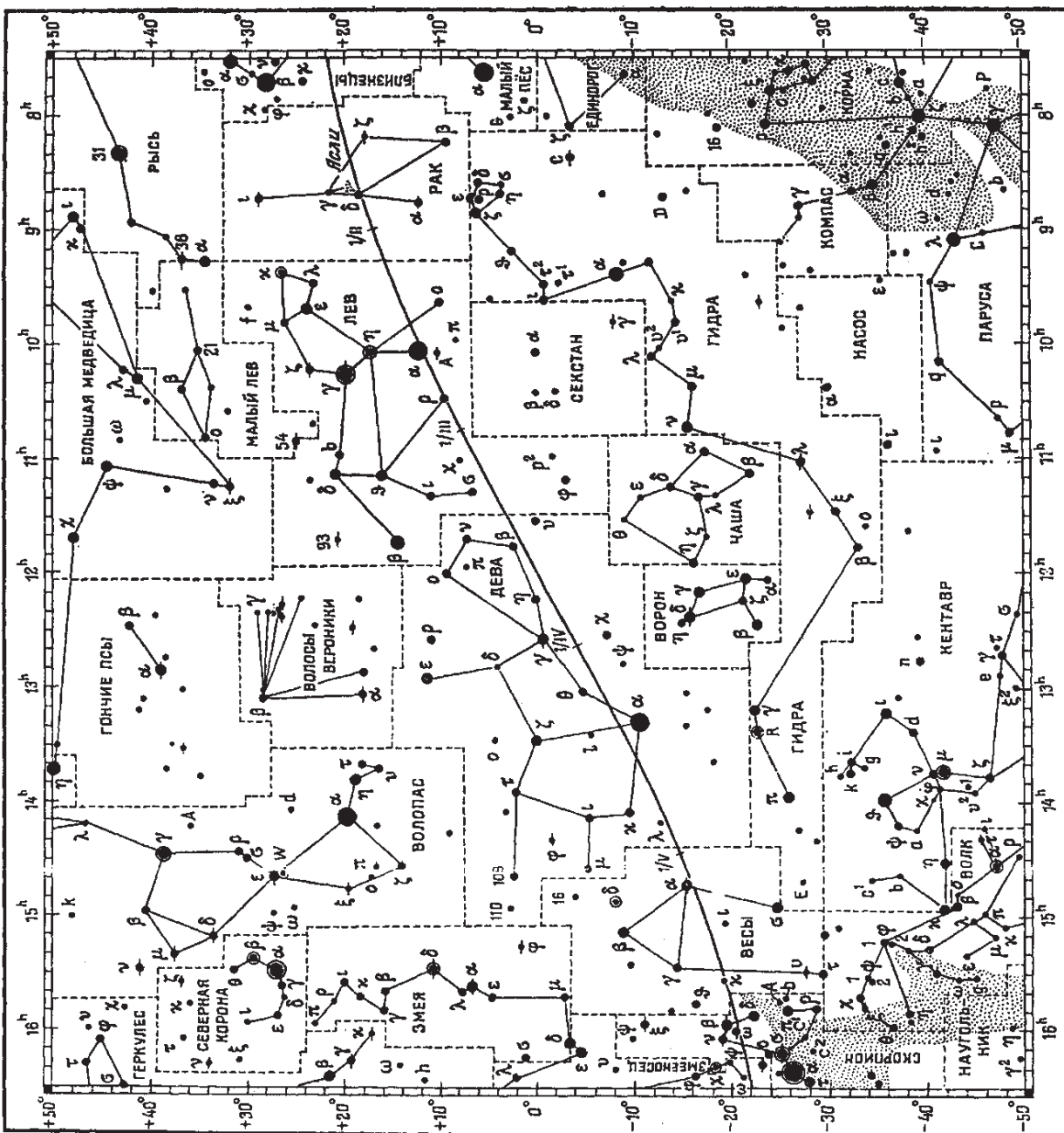


Рис. В.3. Карта зимне-весеннего небосвода.

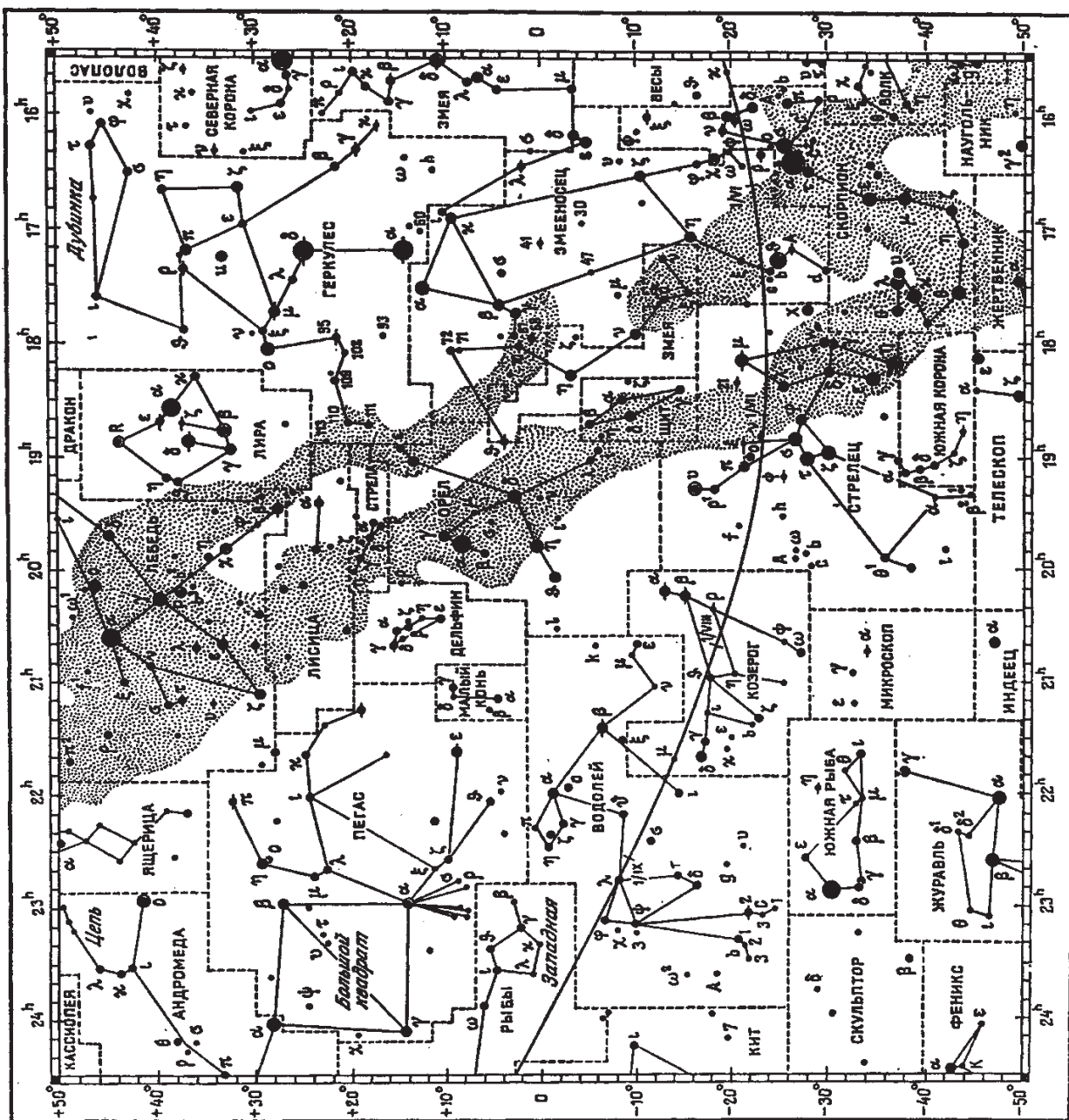


Рис. В.4. Карта летне-осеннего небосвода.



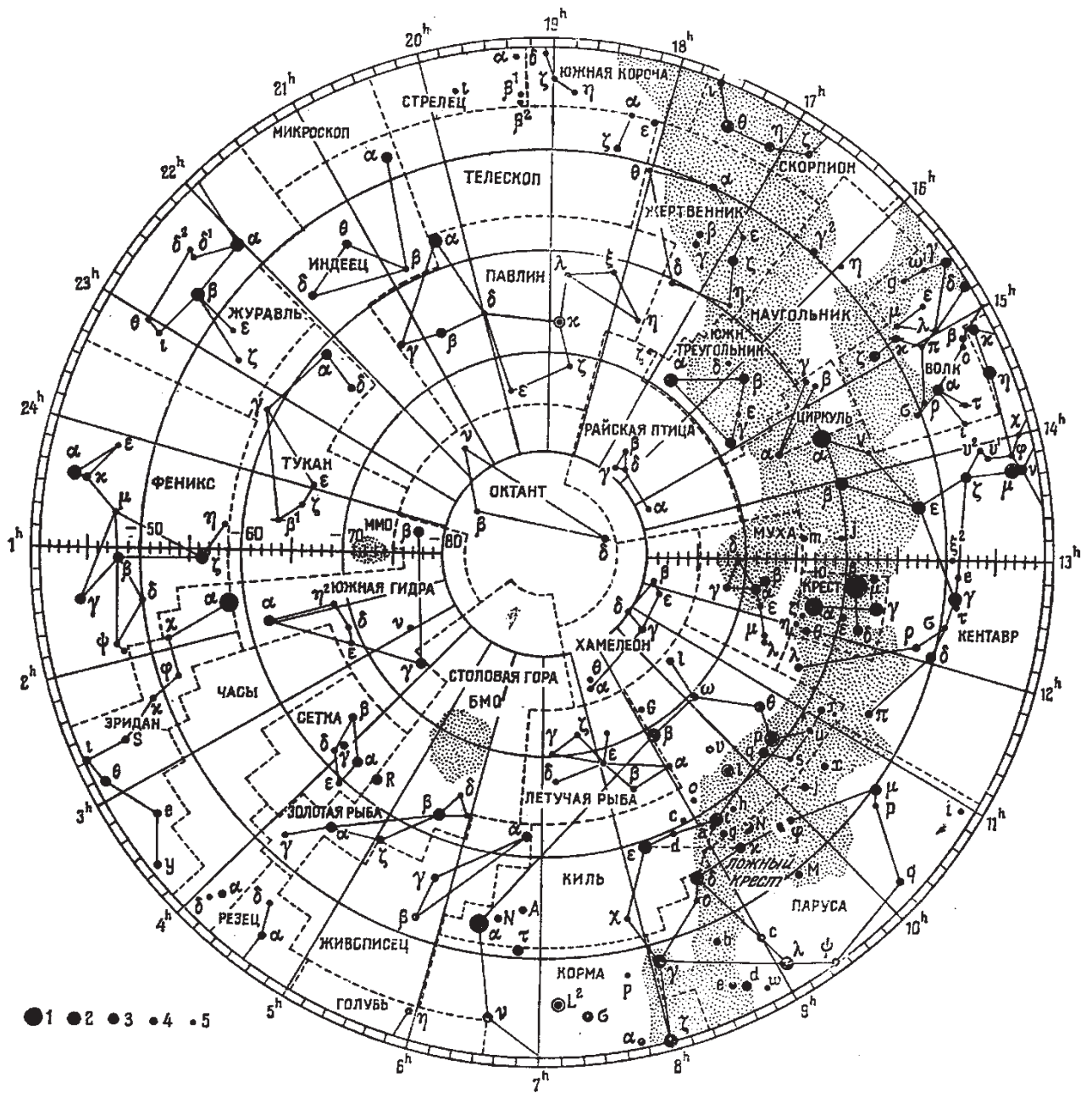


Рис. В.5. Карта южной околополярной области.