

Решения задач
Открытой межрегиональной олимпиады
по астрономии имени Ф.А. Бредихина
9 класс

№1. «Ярчайшие звезды и их положение на небосводе»

Условие. Вашему вниманию в табл. 1 представлены 6 ярчайших звезд ночного небосвода Земли.

№	Название	α	δ	r , св.л.
1	Сириус (α Большого Пса)	$06^{\text{h}}45^{\text{m}}9^{\text{s}}$	$-16^{\circ}42'58''$	8.6
2	Канопус (α Киля)	$06^{\text{h}}23^{\text{m}}57^{\text{s}}$	$-52^{\circ}41'45''$	310
3	Ригил(А)/Толиман(В) (α Центавра АВ)	$14^{\text{h}}39^{\text{m}}35^{\text{s}}$	$-60^{\circ}50'15''$	4.3
4	Арктур (α Волопаса)	$14^{\text{h}}15^{\text{m}}40^{\text{s}}$	$19^{\circ}10'57''$	36.7
5	Вега (α Лиры)	$18^{\text{h}}36^{\text{m}}56^{\text{s}}$	$38^{\circ}47'01''$	25
6	Капелла (α Возничего)	$05^{\text{h}}16^{\text{m}}41^{\text{s}}$	$45^{\circ}59'53''$	42.2

Примечание: α – прямое восхождение светила, δ – склонение светила, r – гелиоцентрическое расстояние звезды, выраженное в световых годах.

Таблица 1. Шесть ярчайших звезд ночного небосвода Земли.

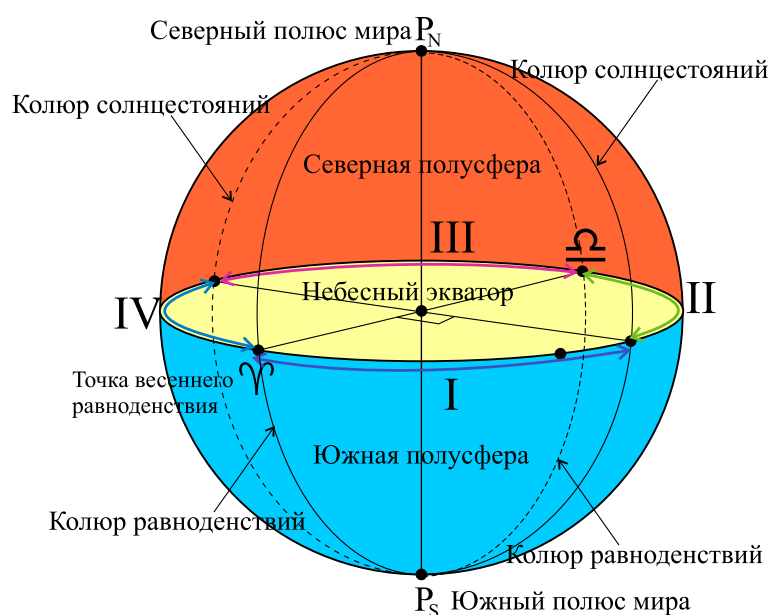


Рис. 1. К определению северной и южной полусферы и четвертей небесного экватора.

1. Как известно, небесный экватор делит всю небесную сферу на две полусферы. Полусфера, в которой находится северный полюс мира, называется *северной*. Вторая полусфера называется *южной* (см. рис. 1). В какой части небесной сферы располагается каждая из указанных звезд? Ответ представьте парой: (цифра, буква). (1 балл за каждую правильно определенную пару)

А. Северная полусфера	Б. Южная полусфера	В. Небесный экватор
-----------------------	--------------------	---------------------

2. Какие из перечисленных звезд можно в принципе наблюдать с южного географического полюса? (1 балл за каждую правильно названную звезду; штраф –1 балл за каждый ложный ответ)

3. Круги склонений каких звезд пересекают небесный экватор (см. рис. 1) в III-й и IV-й четверти? (2 балла за каждую правильно названную звезду; штраф –2 балла за каждый ложный ответ)

4. Какая из перечисленных звезд является наиболее далекой от Земли? (1 балл)

5. Оцените угловое расстояние между Ригилом/Толлиманом и Арктуром на небесной сфере. (4 балла)

Решение. 1. Согласно рис. 1, склонение звезд, расположенных в северной полусфере небосвода всегда больше нуля, а для звезд, расположенных в южной полусфере, данный параметр является отрицательным. Следовательно, имеем следующие пары звезд: (1,Б); (2,Б); (3,Б); (4,А); (5,А); (6,А).

2. Наблюдатель может видеть те звезды, которые расположены выше горизонта. На южном географическом полюсе математический горизонт совпадает с небесным экватором. Следовательно, из данной точки поверхности можно наблюдать все звезды, расположенные в южной полусфере небосвода, т. е. *Сириус, Канопус, Ригил/Толлиман*.

3. Согласно рис. 1, небесный экватор можно условно разделить на четыре равные части – четверти, каждая протяженностью в 6 часов, нумерация которых начинается от точки весеннего равноденствия в сторону увеличения прямого восхождения. Имеем следующее соответствие между номерами четвертей и интервалами прямых восхождений.

Четверти небесного экватора			
I	II	III	IV
Полуинтервалы прямых восхождений			
[0 ^h , 6 ^h)	[6 ^h , 12 ^h)	[12 ^h , 18 ^h)	[18 ^h , 24 ^h)

Согласно табл. 1, круги склонений *Ригила/Толлимана, Арктура, Веги* пересекают небесный экватор (см. рис. 1) в III-й и IV-й четверти.

4. Самая далекая звезда от Солнца является и наиболее далекой от Земли. Следовательно, согласно табл. 1, такой звездой является *Канопус*.

5. При расчете углового расстояния между указанными звездами заметим, что их прямые восхождения близки друг другу по значению, следовательно искомое угловое расстояние определяется дугой большого круга, соединяющей данные точки и при этом расположенной на узком сферическом двуугольнике (с вершинами в полюсах мира), который можно считать плоским (1 балл). Значит искомое расстояние можно определить приближенно формулой Пифагора как длину вектора на плоскости, заданного в ортогональных координатах (3 балла):

$$\ell = \sqrt{(\delta_R - \delta_A)^2 + 15^2(\alpha_R - \alpha_A)^2} = 80.2^\circ.$$

Рекомендации для жюри.

Пункт	Выполненная часть решения задачи	Балл
1	За каждую правильно определенную пару	1(6)
2	За каждую правильно названную звезду/за каждый ложный ответ	1(3)/- 1(-3)
3	За каждую правильно названную звезду/за каждый ложный ответ	2(6)/- 2(-6)
4	За правильно названную звезду	1
5	Корректная оценка углового расстояния между звездами	4

№2. «Кометы и их свойства»

Условие 1. На рис. 2 представлена фотография кометы с указанием основных элементов ее структуры. В табл. 2 даны названия этих элементов. Ответы на вопросы представьте: в пункте №1,5 парами: (цифра, буква); в пунктах № 2-4 – буквой/цифрой или названием термина из таблицы/рисунка.

А) Кома	Б) Ионный хвост	В) Пылевой хвост
Г) Водородная корона	Д) Ядро	Е) Голова

Таблица 2. Основные элементы в структуре кометы.

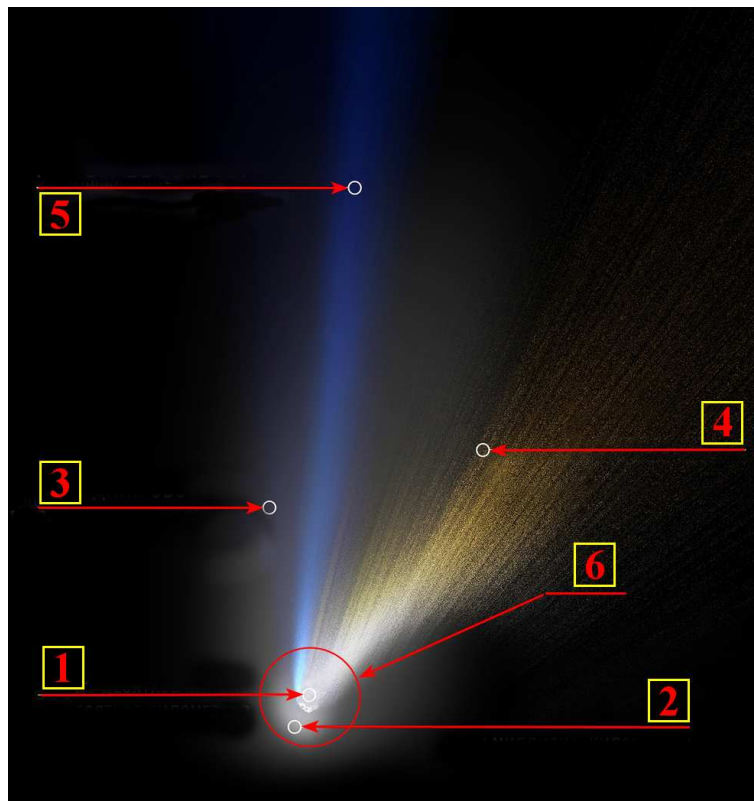


Рис. 2. К определению основных элементов структуры кометы.

1. Установите соответствие между основными элементами в структуре кометы (отмеченными цифрами на рис. 2) и их названиями (представленными в табл. 2). (1 балл за каждую правильно названную пару)

2. Как известно, *великими кометами* называют кометы, которые становятся особенно яркими и заметными для земного наблюдателя. Какой элемент (см. табл. 2) в структуре великих комет имеет, как правило, наибольшие угловые размеры, фиксируемые невооруженным глазом с Земли? (2 балла)

3. Какой элемент структуры кометы представлен, главным образом, атомами и ионами самого легкого химического элемента Вселенной? (2 балла)

Условие 2. Вашему вниманию в табл. 3 представлены несколько периодических комет с их некоторыми орбитальными характеристиками.

№	Название	a , а.е.	T , год	ε	i , град.
1	1P/Halley	17.834	75.3	0.96658	161.96
2	C/2020 F3 (NEOWISE)	710	6800	0.99921	128.93
3	55P/Tempel-Tuttle	10.46	33.83	0.9078	162.57
4	C/1995 O1 Hale-Bopp	177	2400	0.99498	89.30
5	67P/Churyumov-Gerasimenko	3.457	6.43	0.64989	3.87
6	8P/Tuttle	5.707	13.6	0.8202	54.91

Примечание: a – большая полуось эллиптической орбиты, T – сидерический период обращения, ε – ее эксцентриситет, i – наклонение орбиты к плоскости эклиптики (в град).

Таблица 3. Некоторые кометы Солнечной системы и их орбитальные характеристики.

4. Какие из указанных комет являются *короткопериодическими*? (0.5 балла за каждую правильно названную комету; штраф –1 балл за каждый ложный ответ)

Условие 3. В астрономии короткопериодические кометы принято классифицировать на несколько семейств. Название каждого семейства определяется названием классической планеты (или

пояса ледяных тел – пояса Койпера), к орбите которой ближе всего расположен афелий орбиты данной кометы. Традиционно выделяют семейства Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Койпера (последний располагается на среднем расстоянии 55 а.е. от Солнца).

5. Сопоставьте все короткопериодические кометы их семействам. Свой ответ обоснуйте математически. (2 балла за каждую правильно названную пару)

Основные семейства комет Солнечной системы				
А) Юпитера	В) Сатурна	С) Урана	Д) Нептуна	Е) Койпера

Решение. 1. Имеем следующее соответствие между основными элементами в структуре кометы и их названиями:

№ эл-та	Название	Пара	№ эл-та	Название	Пара
1	Ядро (Д)	(1, Д)	4	Пылевой хвост (В)	(4, В)
2	Кома (А)	(2, А)	5	Ионный хвост (Б)	(5, Д)
3	Водородная корона (Г)	(3, Г)	6	Голова (Е)	(6, Е)

2. *Пылевой хвост (4)* великой кометы имеет, как правило, наибольшие угловые размеры, фиксируемые невооруженным глазом с Земли.

3. Как известно, самым легким химическим элементом во Вселенной является водород. Очевидно, *водородная корона (3)* кометы состоит, главным образом, из атомов и ионов водорода.

4. Комета называется *короткопериодической*, если ее сидерический период обращения вокруг Солнца не превышает 200 лет. К кометам данного класса, согласно табл. 3, можно отнести 1P/Halley (1), 55P/Tempel-Tuttle (3), 67P/Churyumov-Gerasimenko (5), 8P/Tuttle (6). Заметим, что у всех указанных комет в названии присутствует префикс «Р», который присваивается лишь короткопериодическим. Поэтому данную выборку комет можно выполнить лишь по их названию, не опираясь на численные значения их периодов.

5. Для сопоставления всех короткопериодических комет их семействам необходимо вычислить гелиоцентрические расстояния до афелиев их орбит. Данная величина рассчитывается по формуле:

$$Q = a(1 + \varepsilon).$$

Численные значения искомого расстояния представлены в следующей таблице. Сопоставляя полученные значения с значениями больших полуосей орбит планет-гигантов (см. справочные данные) и среднего радиуса пояса Койпера, получаем следующее распределение данных комет по семействам и соответствующие пары.

Комета	1P/Halley	55P/Tempel-Tuttle	67P/Churyumov-Gerasimenko	8P/Tuttle
Q , а.е.	35.07	19.96	5.70	10.39
Семейство	Нептуна	Урана	Юпитера	Сатурна
Пара	(1,Д)	(3,С)	(5,А)	(6,В)

Рекомендации для жюри.

Пункт	Выполненная часть решения задачи	Балл
1	За каждую правильно определенную пару	1(6)
2	За правильно определенный элемент структуры	2
3	За правильно определенный элемент структуры	2
4	За каждую правильно названную комету/за каждый ложный ответ	0.5(2)/ -1(-2)
5	За каждую правильно определенную пару	2(8)

№ 3. «Наблюдатель в море»

Условие 1. Наблюдатель находится в море на большой плавучей платформе вдали от береговой линии в полный штиль. Высота его глаз над уровнем моря равна $h_0 = 2.0$ метра.

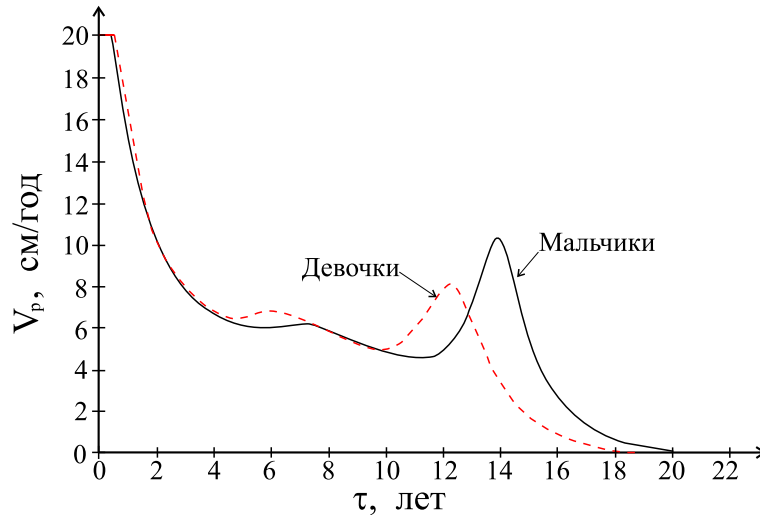


Рис. 3. Зависимость скорости изменения роста тела человека V_p от его возраста τ .

1. Какой из горизонтов (математический или видимый) расположен ближе к надиру? (1 балл)
2. Определите угол (в угловых секундах) между плоскостью математического горизонта и направлением на видимый горизонт с позиции наблюдателя. (2 балла)
3. Оцените линейный радиус + длину всей дуги (в км, до сотых) видимого горизонта для наблюдателя. (3+2 балла)

Условие 2. Наблюдатель начал регулярно подпрыгивать вдоль отвесной линии. Его скорость в момент отрыва от платформы равна 1.5 м/с. Время соприкосновения его стоп с платформой между прыжками 0.5 секунды. Изменением положения платформы относительно воды и влиянием разбегающихся волн на положение видимого горизонта пренебречь. Определите:

4. Период T изменения дальности прямой видимости. (2 балла)
5. Интервал возможных значений для дальности прямой видимости наблюдателя во время прыжков. (4 балла)
6. Постройте график зависимости дальности прямой видимости наблюдателя от времени на интервале $(0, 3T)$. (2 балла)

Условие 3. В течение жизни рост человека меняется, а следовательно меняется и дальность прямой видимости. На рис. 3 представлен график зависимости скорости изменения роста человека (для мальчиков/девочек) от возраста.

7. Получите формулу для скорости изменения дальности прямой видимости наблюдателя с изменением его возраста. (2 балла) Определите значения этой скорости (в м/год), если Вы являетесь: а) мальчиком – по кривой $V_p(\tau)$ для мальчиков, б) девочкой – по кривой $V_p(\tau)$ для девочек, в моменты t , указанные в следующей таблице (1 балл за каждый верный численный ответ):

Некоторые моменты жизни человека			
Мальчики		Девочки	
1. Младенчество (0.4 года, рост 65 см)	2. Подростковый период (14.0 лет, рост 170 см)	1. Младенчество (0.4 года, рост 65 см)	2. Подростковый период (12.3 лет, рост 155 см)

Решение. 1. Согласно определению, *математический горизонт* – большой круг небесной сферы, плоскость которого перпендикулярна отвесной линии, проходящей через центр небесной сферы (который совмещен со сетчаткой глаза наблюдателя). *Видимый горизонт* на море – это малый круг небесной сферы, являющийся линией раздела небосвода и водной поверхности Земли (см. рис. 4) с позиции наблюдателя. Из рисунка очевидно, что математический горизонт расположен выше видимого, а значит последний ближе к надиру.

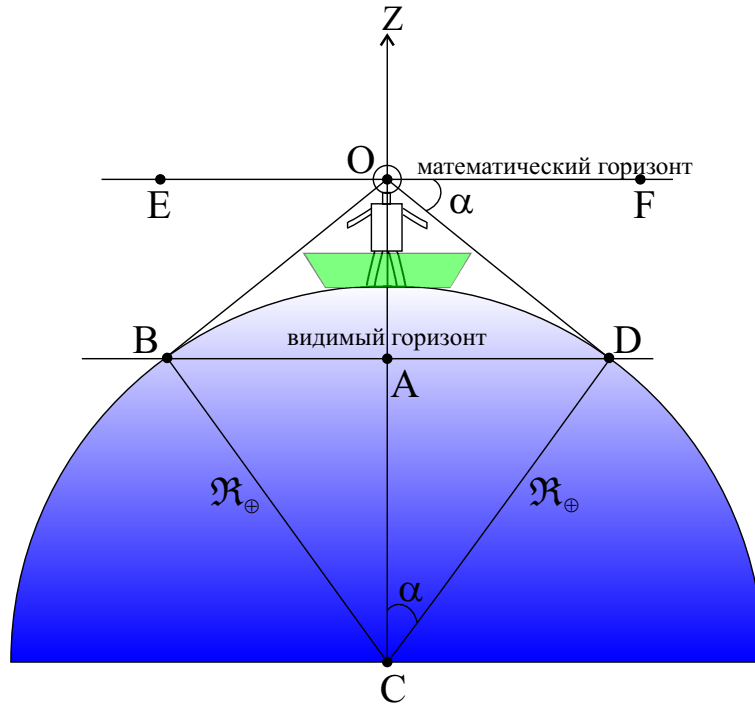


Рис. 4. К определению положений математического и видимого горизонтов.

2. Согласно рис. 4, необходимо найти угол $\alpha = \angle FOD$. Именно данный угол определяет разность высот положений данных горизонтов. Согласно теореме о равенстве углов со взаимно перпендикулярными сторонами, угол $\angle FOD$ равен углу $\angle OCD$. Из прямоугольного треугольника $\triangle OCD$ следует, что

$$\cos \alpha = \cos \angle OCD = \frac{CD}{CO} = \frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + h_0}, \Rightarrow \alpha = \arccos \left[\frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + h_0} \right] = 163'', \quad (1)$$

здесь $R_{\oplus} = 6371$ км – средний (по объему) радиус Земли.

Значение искомого угла можно получить, не прибегая к использованию функции арккосинус. Для этого заметим, что $h \ll R_{\oplus}$, тогда

$$\cos \alpha = \frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + h_0} = \left(1 + \frac{h_0}{R_{\oplus}} \right)^{-1} \approx 1 - \frac{h_0}{R_{\oplus}},$$

при записи последнего использовано приближение вида: $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha \cdot x$, при $x \ll 1$. С другой стороны, при малых значениях угла α справедливо приближенное выражение вида:

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \text{ при } \alpha \ll 1.$$

Из двух последних выражений следует, что

$$\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{h_0}{R_{\oplus}}, \Rightarrow \alpha = 206265''/\text{рад} \sqrt{\frac{2h_0}{R_{\oplus}}} = 163''. \quad (2)$$

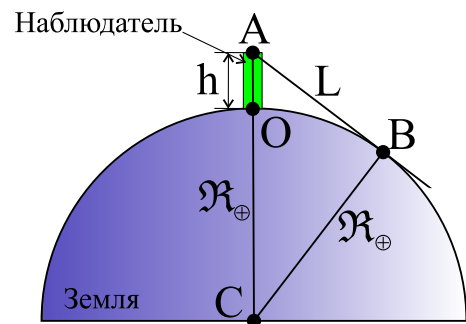


Рис. 5. К определению дальности прямой видимости для земного наблюдателя.

3. Очевидно, видимый горизонт представляет собой окружность, радиус которой равен $AD = r$. Из прямоугольного треугольника $\triangle CAD$ получаем его значение r и длину этой окружности:

$$r = R_{\oplus} \sin \alpha = 5.05 \text{ км}, \quad \mathcal{L} = 2\pi r = 31.72 \text{ км}. \quad (3)$$

4. Рассмотрим рис. 5 с указанием Земли-шара, наблюдателя в полный рост и отрезка длины L , соответствующего дальности прямой видимости (ДПВ). (1 балл) Получим аналитическую

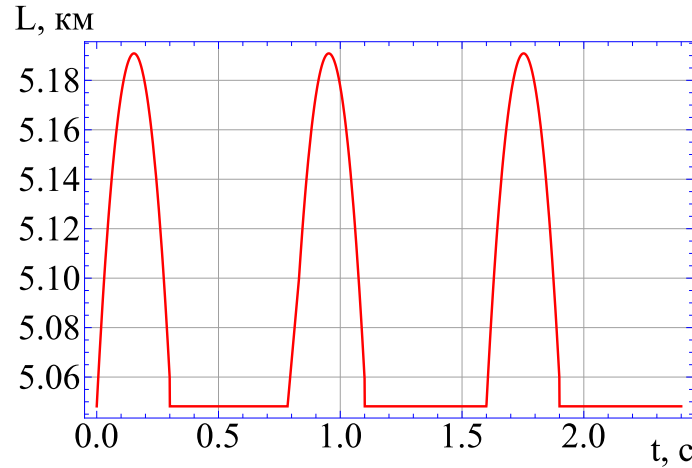


Рис. 6. К определению зависимости дальности прямой видимости прыгающего наблюдателя от времени на интервале $(0, 3T)$.

формулу для дальности прямой видимости для земного наблюдателя. Для этого заметим, что треугольник $\triangle ABC$, в вершинах которого расположены глаза наблюдателя (A), точка на видимом горизонте (B) и центр Земли (C), является прямоугольным, (1 балл) поскольку луч (AB), пришедший из точки на горизонте, касается поверхности Земли, а значит должен быть перпендикулярен радиусу Земли (BC). Применим для данного треугольника теорему Пифагора (2 балла):

$$(\mathfrak{R}_{\oplus} + h)^2 = \mathfrak{R}_{\oplus}^2 + L^2, \Rightarrow L = \sqrt{(\mathfrak{R}_{\oplus} + h)^2 - \mathfrak{R}_{\oplus}^2} = \sqrt{2h\mathfrak{R}_{\oplus} + h^2} \approx \sqrt{2h\mathfrak{R}_{\oplus}}. \quad (4)$$

При записи последнего приближенного результата учтено, что рост человека много меньше радиуса Земли, т. е. $h \ll \mathfrak{R}_{\oplus}$. Очевидно, с изменением высоты положения глаз наблюдателя относительно поверхности воды будет изменяться и дальность его прямой видимости.

Вычислим время свободного полета наблюдателя: в верхней точки его траектории свободного полета скорость равна нулю, т. е.

$$V = V_0 - gt_1 = 0, \Rightarrow t_1 = V_0/g, \Rightarrow \tau = 2t_1 = 2V_0/g = 0.3 \text{ с},$$

здесь t_1, τ – время полета наблюдателя вверх и полное время его свободного полета соответственно. Значит период изменения дальности его прямой видимости равен $T = \tau_0 + \tau = 0.8 \text{ с}$.

5. Определим максимальную высоту глаз наблюдателя относительно платформы:

$$H_{\max} = h_0 + \frac{V_0^2}{2g} = 2.11 \text{ м}. \quad (5)$$

Значит высота глаз наблюдателя над водой меняется в пределах: (h_0, H_{\max}) . Тогда дальность прямой видимости будет заключена в интервале:

$$5.048 \text{ км} \leq L \leq 5.185 \text{ км}. \quad (6)$$

6. График зависимости дальности прямой видимости наблюдателя от времени на интервале $(0, 3T)$ представлен на рис. 6.

7. Пусть в начальный момент времени t_0 рост человека составляет величину h_0 . Спустя малый промежуток времени Δt его рост увеличивается на малую величину Δh . Тогда скорость изменения дальности прямой видимости будет

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = (\sqrt{2(h_0 + \Delta h)\mathfrak{R}_{\oplus}} - \sqrt{2h_0\mathfrak{R}_{\oplus}}) / \Delta t = \frac{\sqrt{2h_0\mathfrak{R}_{\oplus}}}{\Delta t} \left(\sqrt{1 + \frac{\Delta h}{h_0}} - 1 \right) \approx \frac{\sqrt{2h_0\mathfrak{R}_{\oplus}}}{\Delta t} \left(1 + \frac{\Delta h}{2h_0} - 1 \right),$$

$$V_L = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{\sqrt{2h_0\mathfrak{R}_{\oplus}}}{\Delta t} \frac{\Delta h}{2h_0} = V_h \sqrt{\frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{2h_0}}, \text{ где } V_h = \frac{\Delta h}{\Delta t}, \quad (7)$$

здесь V_h – скорость изменения роста человека. Выполняя численный расчет искомой величины для указанных моментов времени, в результате получаем

Некоторые моменты жизни человека			
Мальчики		Девочки	
1. Младенчество	2. Подростковый период	1. Младенчество	2. Подростковый период
$t_0 = 0.4$ года, $h_0 = 65$ см	$t_0 = 14.0$ лет, $h_0 = 170$ см	$t_0 = 0.4$ года, $h_0 = 65$ см	$t_0 = 12.3$ года, $h_0 = 155$ см
Скорость изменения роста человека, V_h			
20 см/год	10 см/год	20 см/год	8 см/год.
Скорость изменения дальности прямой видимости человека			
443 м/год	137 м/год	443 м/год	115 м/год

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Корректно определен горизонт, ближайший к надиру	1
Правильно определен угол между плоскостью математического горизонта и направлением на видимый горизонт	2
Выполнена корректная оценка линейного радиуса + длины всей дуги видимого горизонта	3+2
Верный расчет периода изменения дальности прямой видимости	2
Получен интервал возможных значений для дальности прямой видимости наблюдателя во время прыжков	4
Правильно построен график зависимости дальности прямой видимости наблюдателя от времени	2
Получена формула для скорости изменения дальности прямой видимости наблюдателя + вычислены значения этой скорости в два момента времени	2+1+1

№ 4. «Луна и планеты-гиганты»

Условие. На рис. 7 представлена фотография-коллаж Луны и двух планет-гигантов Солнечной системы, полученная жителем северного географического полушария. Ответьте на следующие вопросы:

1. В какой фазе запечатлена Луна в кадре? (1 балл) В какую часть суток, вероятнее всего, могла быть выполнена съемка данных объектов? (1 балл)

Основные части суток			
А) Утро	Б) День	В) Вечер	Г) Ночь
Местное время суток			
06.00-12.00	12.00-18.00	18.00-00.00	00.00-06.00

2. Над какими частями горизонта, вероятнее всего, располагались данные объекты в момент съемки, если последняя состоялась незадолго до дня зимнего солнцестояния? (1 балл за каждую правильно названную часть; штраф –1 балл за каждый ложный ответ)

Основные части горизонта			
А) Восток-Юг	Б) Юг-Запад	В) Запад-Север	Д) Север-Восток

3. Если полагать, что видимое перемещение Луны совершалось по прямой «Юпитер-Сатурн», то какой промежуток времени отделял начало покрытия Юпитера от начала покрытия Сатурна? Собственным движением планет в указанный промежуток пренебречь. (4 балла)

4. Оцените линейное расстояние (в астрономических единицах) между Юпитером и Сатурном в момент съемки. (3 балла)

5. Оцените угловую скорость (в угловых минутах в сутки) видимого сближения планет-гигантов в момент съемки. (5 баллов)



Рис. 7. Луна и планеты-гиганты Солнечной системы.

6. Оцените дату съемки, если угловое расстояние между планетами в момент (21.12.2020) их великого соединения¹ составило 6 угловых минут. Орбиты всех классических планет и Луны считать круговыми и лежащими приблизительно в одной плоскости. (4 балла)

Решение. 1. Очевидно, Луна запечатлена жителем северного географического полушария в фазе первой четверти. (1 балл) В указанной фазе Луна, как правило, видна после захода Солнца и до полуночи. Следовательно, вероятнее всего, съемка данных объектов выполнена *вечером* (В), в интервале 18.00-00.00. (1 балл)

2. Съемка велась незадолго до дня зимнего солнцестояния в северном географическом полушарии. При этом Луна в фазе первой четверти отстояла от Солнца приблизительно на 90° , то, очевидно, она располагалась восточнее Солнца, уже зашедшего за горизонт. Солнце заходит за горизонт в день зимнего солнцестояния в юго-западной части горизонта. Значит Луна и планеты могли наблюдаться как над *юго-восточной* так и над *юго-западной* частями горизонта. (1+1 балл)

3. Определим по рисунку линейный диаметр Луны $d_\zeta = 49$ мм и расстояние между Сатурном и Юпитером – $d_{JS} = 137$ мм. (1 балл) Тогда угловое расстояние между планетами составляет значение (1 балл):

$$\left\{ \begin{array}{l} d_\zeta \rightarrow \mathcal{D}_\zeta, \\ d_{JS} \rightarrow \Psi_{JS} \end{array} \right\}, \Rightarrow \Psi_{JS} = \mathcal{D}_\zeta \left(\frac{d_{JS}}{d_\zeta} \right) = 2 \left(\frac{d_{JS}}{d_\zeta} \right) \frac{\mathfrak{R}_\zeta}{a_\zeta} \times 3438' = 86.9', \quad (8)$$

здесь \mathcal{D}_ζ , \mathfrak{R}_ζ , a_ζ – угловой диаметр Луны с позиции земного наблюдателя, ее линейный радиус и радиус орбиты соответственно. Учитывая, что угловая скорость видимого движения Луны по небосводу составляет $\omega_\zeta = 360^\circ/T_\zeta = 13.2^\circ/\text{год}$, (1 балл) в результате получаем время между началами покрытий Юпитера и Сатурна: $\Delta t = \Psi_{JS}/\omega_\zeta = 0.110$ сут или 2.6 часа. (1 балл)

4. Поскольку на фотографии запечатлено тесное сближение Луны, Сатурна и Юпитера, при этом Луна запечатлена в фазе первой четверти, значит планеты-гиганты так же как и Луна

¹ *Великое соединение* – соединение планет Юпитера и Сатурна, когда видимое положение этих двух планет на небесной сфере наиболее близко друг к другу.

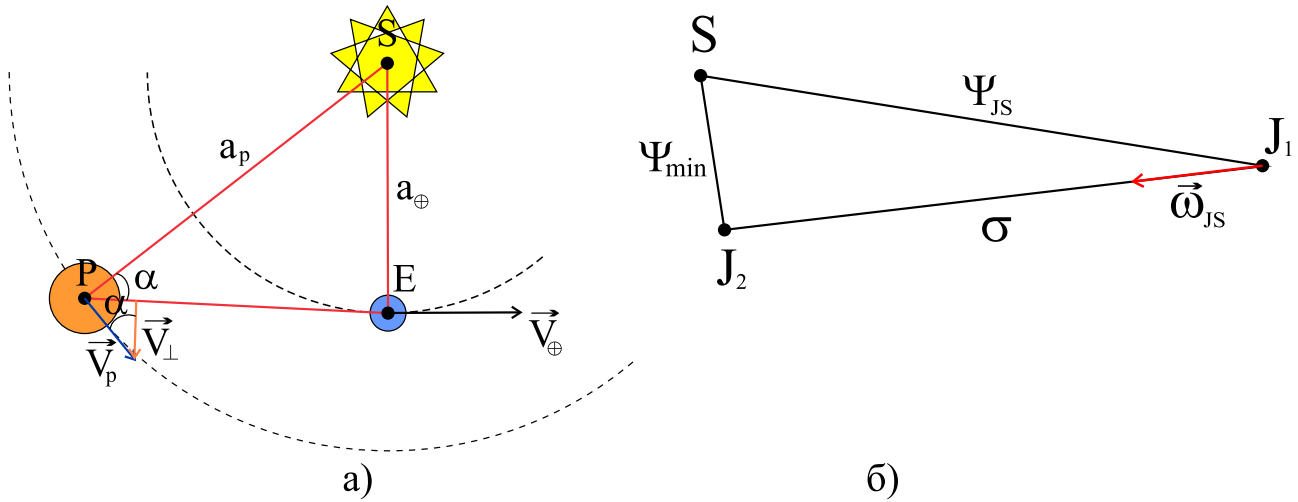


Рис. 8. К определению: а) угловой скорости видимого движения планеты-гиганта в окрестности его восточной квадратуры; б) взаимного расположения планет в момент съемки и великого соединения (относительно Сатурна).

должны были отстоять от направления на Солнце на 90° , что соответствует их восточной квадратуре. (1 балл) Поскольку угловое расстояние между планетами чуть больше 1° , то можно полагать, что эти планеты лежат на одной прямой. (1 балл) Тогда искомое расстояние между планетами в момент съемки можно оценить как (1 балл)

$$\Delta_{JS} = \sqrt{a_S^2 - a_{\oplus}^2} - \sqrt{a_J^2 - a_{\oplus}^2} = 4.38 \text{ а.е.}, \quad (9)$$

здесь a_S , a_J , a_{\oplus} – радиусы круговых орбит Сатурна Юпитера и Земли соответственно.

5. Прежде всего определим угловую скорость видимого движения планеты-гиганта в окрестности ее восточной квадратуры. Для этого рассмотрим рис. 8.а), соответствующий условию данной задачи. Очевидно, перпендикулярная к лучу зрения (с точки зрения земного наблюдателя) составляющая скорости планеты относительно Земли определяется только модулем ее орбитальной скорости V_p и углом α (2 балла):

$$V_{\perp} = V_p \cos \alpha = \sqrt{\frac{G M_{\odot}}{a_p}} \frac{\sqrt{a_p^2 - a_{\oplus}^2}}{a_p} = \sqrt{\frac{G M_{\odot}}{a_p} \left(1 - \left(\frac{a_{\oplus}}{a_p}\right)^2\right)}. \quad (10)$$

Тогда угловая скорость видимого движения планеты есть (2 балла)

$$\omega_p = \frac{V_{\perp}}{\sqrt{a_p^2 - a_{\oplus}^2}} = \sqrt{\frac{G M_{\odot}}{a_p^3}}. \quad (11)$$

Юпитер и Сатурн движутся в одном направлении, при этом Юпитер догоняет Сатурн. Следовательно угловая скорость (в угловых минутах в сутки) видимого сближения планет-гигантов в момент съемки будет (1 балл)

$$\omega_{JS} = \omega_J - \omega_S = \sqrt{\frac{G M_{\odot}}{a_J^3}} - \sqrt{\frac{G M_{\odot}}{a_S^3}} = 2.98' / \text{сут.} \quad (12)$$

6. Поскольку орбиты всех планет лежат приблизительно в одной плоскости, то очевидно видимый путь Юпитера относительно Сатурна по небосводу будет прямой, составляющая малый угол с прямой "Юпитер-Сатурн" (в силу несовпадения орбит планет в действительности, рис. 8.б). Следовательно имеем дело с прямоугольным треугольником в вершинах которого находится (J_1) Юпитер в момент съемки (относительно Сатурна), (S) Сатурн, и положение Юпитера (J_2) в момент Великого соединения, при этом сторона SJ_1 будет гипотенузой. (1 балл) Определим катет J_1J_2 по теореме Пифагора (1 балл):

$$\sigma = J_1J_2 = \sqrt{\Psi_{JS}^2 - \Psi_{\min}^2} = 86.7'.$$

Следовательно время, прошедшее от момента съемки до момента великого соединения планет-гигантов, есть (1 балл)

$$\tau = \frac{\sigma}{\omega_{JS}} = 29.1 \text{ сут.} \quad (13)$$

Значит съемка была выполнена 21-22 ноября 2020 года (ответ представлен диапазоном дат, в силу погрешностей измерений по рисунку и близости τ к целому числу). (1 балл)

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Корректно определена фаза Луны + часть суток, в которую, вероятнее всего, могла быть выполнена съемка	1+1
Правильно/неправильно определены части горизонта, над которыми, вероятнее всего, располагались данные объекты	1(2)/-1(-2)
Вычислен промежуток времени отделяющий моменты начал покрытий Юпитера и Сатурна Луной	4
Корректная оценка линейного расстояния между Юпитером и Сатурном в момент съемки	3
Правильная оценка угловой скорости видимого сближения планет-гигантов в момент съемки	5
Получена корректная оценка даты съемки	4

№ 5. «Отвесная линия и ее угол отклонения»

Условие. Как известно, вращение Земли вокруг своей оси является одной из причин отклонения отвесной линии в данной точке поверхности Земли от направления на ее центр. Полагая, что Земля является шаром со сферически симметричным распределением массы, совершающим суточное вращение с периодом $T_{\oplus} = 23^{\text{ч}}56^{\text{м}}04^{\text{с}}$, определите:

1. Ускорение свободного падения у поверхности Земли, как функцию $g(\varphi)$ широты местности φ . Представьте итоговое выражение лишь в терминах следующих параметров: g_0 – ускорения свободного падения на геолюсе, отношения χ центростремительного ускорения материальной точки, обусловленного ее суточным вращением на экваторе и ускорением, определяемым силой притяжения точки со стороны Земли. (12 балла)

2. Получите приближенное редуцированное выражение (не содержащее корней!) для $g(\varphi)$, в предположении, что $\chi \ll 1$. (2 балла)

3. Угол отклонения α отвесной линии от направления на центр Земли как функцию широты местности φ . (2 балла) На каких широтах данный угол достигает максимального и минимального значений? (2 балла) Чему равны эти значения? (2 балла)

Решение. 1. Рассмотрим взаимодействие планеты с пробным телом (далее материальная точка А) массы m , находящимся на ее поверхности, на широте φ (см. рис. 9). В инерциальной лабораторной системе отсчета (например, связанной с Солнцем), точка А движется равномерно по окружности, поскольку участвует во вращательном суточном движении вместе с планетой относительно далеких звезд. (1 балл) На материальную точку А на поверхности планеты действуют 2 силы (см. рис. 9) (2 балла):

- 1) сила тяготения \vec{F}_{at} , направленная к центру планеты;
- 2) сила реакции поверхности планеты \vec{N} .

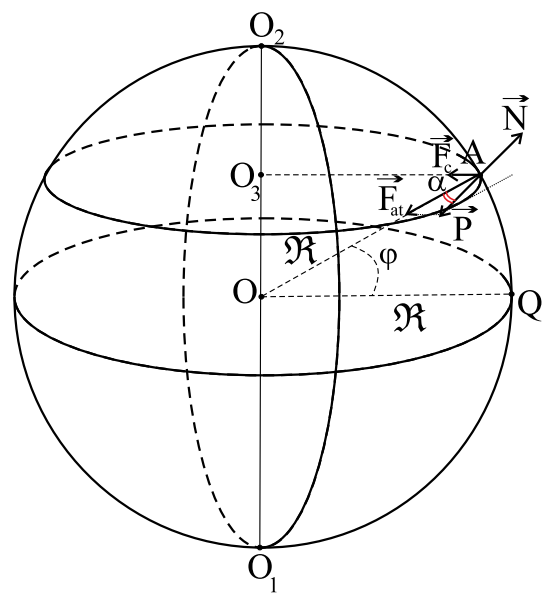


Рис. 9. К определению угла отклонения отвесной линии от направления на центр Земли.

Поскольку относительно тела планеты и, следовательно, выбранной системы отсчета материальная точка А движется по окружности, то сумма всех выше указанных сил должна быть равна (согласно второму закону Ньютона) центростремительной силе (1 балл):

$$\vec{F}_c = \vec{F}_{at} + \vec{N}, \Rightarrow \vec{N} = \vec{F}_c - \vec{F}_{at}. \quad (14)$$

С другой стороны, согласно третьему закону Ньютона, для тела, покоящегося относительно горизонтальной поверхности планеты имеет место: $\vec{P} = -\vec{N}$, где \vec{P} – вес тела. Последний, как известно, в состоянии относительного покоя материальной точки равен силе тяжести, действующей на точку А, т. е. $\vec{P} = m\vec{g}$. (1 балл)

Силу тяготения и центробежную силу можно определить выражениями вида (2 балла):

$$\vec{F}_{at} = -\frac{Gm\mathfrak{M}}{r^3}\vec{r}, \quad \vec{F}_c = -m\omega^2\vec{r}', \quad (15)$$

где G – универсальная гравитационная постоянная, \mathfrak{M} – масса планеты, $\vec{r} = \vec{OA}$, $\omega = \frac{2\pi}{T_\oplus}$ – угловая скорость вращения планеты; $\vec{r}' = \vec{O_3A}$. Из уравнений (14)-(15) следует уравнение вида:

$$m\vec{g} = \vec{F}_{at} - \vec{F}_c, \Rightarrow \vec{g} = -\frac{G\mathfrak{M}}{r^3}\vec{r} + \omega^2\vec{r}'. \quad (16)$$

Модуль ускорения свободного падения есть (1 балл)

$$g = \sqrt{g^2} = \sqrt{\left(\frac{G\mathfrak{M}}{r^2}\right)^2 + (\omega^2 r')^2 - 2\omega^2 \left(\frac{G\mathfrak{M}}{r^3}\right)(\vec{r}\vec{r}')}. \quad (17)$$

Далее воспользуемся определением *географической широты* φ – углом между плоскостью экватора и радиусом-вектором, проведенным из центра шара к данной точке (см. рис. 9). Тогда (1 балл)

$$r' = r \cdot \cos \varphi, \quad \vec{r} \cdot \vec{r}' = r \cdot r' \cdot \cos \varphi = r^2 \cdot \cos^2 \varphi. \quad (18)$$

Отождествляя данную планету с Землей, т. е. $r = \mathfrak{R}_\oplus$ ускорение свободного падения, согласно (17), представляется в виде: (3 балла)

$$g(r, \varphi) = g_0 \sqrt{1 + (\chi^2 - 2\chi) \cos^2 \varphi}, \quad \text{где} \quad (19)$$

$$g_0 = \frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus^2}, \quad \chi = \frac{4\pi^2\mathfrak{R}_\oplus^3}{G\mathfrak{M}_\oplus T_\oplus^2}, \quad (20)$$

здесь \mathfrak{M}_\oplus , \mathfrak{R}_\oplus – масса Земли, и средний ее радиус. Безразмерный параметр χ определяется отношением величин сил \vec{F}_c (определенной на экваторе) и \vec{F}_{at} или что тоже самое отношением ускорений, создаваемых у пробного тела данными силами.

2. Параметр χ для любой классической планеты Солнечной системы есть величина, удовлетворяющая условию $\chi \ll 1$, следовательно, $\chi^2 \ll \chi$. Тогда для ускорения свободного падения справедливо следующее приближенное выражение (1 балл)

$$g(\varphi) \approx g_0 \sqrt{1 - 2\chi \cos^2 \varphi}.$$

Учитывая также тот факт, что $\cos^2 \varphi \leq 1$ и приближение вида $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, при $|x| \ll 1$, последний результат можно редуцировать к виду (1 балл):

$$g(\varphi) \approx g_0(1 - \chi \cos^2 \varphi). \quad (21)$$

3. Воспользуемся теоремой синусов для треугольника, составленного из сил $m\vec{g}$, \vec{F}_c , \vec{F}_{at} (1 балл):

$$\frac{\sin \alpha}{F_c} = \frac{\sin \varphi}{mg}, \Rightarrow \sin \alpha = \sin \varphi \left(\frac{F_c}{mg} \right) = \sin \varphi \left(\frac{\omega^2 r'}{g} \right). \quad (22)$$

Из выражений (18), (19) и (22) следует, что (1 балл)

$$\alpha = \arcsin \left[\frac{\chi}{2} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1 + (\chi^2 - 2\chi) \cos^2 \varphi}} \right] \approx \arcsin \left[\frac{\chi}{2} \frac{\sin 2\varphi}{(1 - \chi \cos^2 \varphi)} \right]. \quad (23)$$

Для Земли $\chi = 3.45 \cdot 10^{-3}$, в результате знаменатель дроби в аргументе функции \arcsin слабо отличается от единицы, поэтому величина α определяется главным образом, величиной числителя дроби. Последний достигает максимума при $\varphi = \pm 45^\circ$, а минимума – при $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = \pm 90^\circ$. (2 балла) Следовательно (2 балла)

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\max} &\approx \arcsin \left[\frac{\chi}{2} \frac{1}{(1 - \frac{\chi}{2})} \right] = 5.9', \text{ при } \varphi = \pm 45^\circ, \\ \alpha_{\min} &= 0.0', \text{ при } \varphi = 0^\circ, \pm 90^\circ \end{aligned} \right\}. \quad (24)$$

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Получено явное аналитическое выражение для ускорения свободного падения у поверхности Земли, как функция широты местности	12
Получите приближенное редуцированное выражение (не содержащее корней!) для $g(\varphi)$	2
Получено явное аналитическое выражение для угла отклонения α отвесной линии от направления на центр Земли как функции φ	2
Определены широты, на которых данный угол достигает максимального + минимального значений	1+1
Вычислены экстремальные (максимальное+ минимальное) значения угла отклонения	1+1

№ 6. «Экзо-Земля на кратной орбите»

Условие. Исследователи космоса обнаружили экзопланету, подобную Земле, движущуюся вокруг двойной звезды по орбите, близкой к круговой, на среднем расстоянии r (причем $\mathfrak{R}_\odot \ll r$, где \mathfrak{R}_\odot – радиус Солнца) от центра масс этой пары. Компоненты двойной звезды – близнецы, подобные Солнцу, имеющие форму шара. При этом данная пара звезд движется по круговой орбите с минимальным возможным периодом, не испытывая слияния в той же плоскости, что и экзопланета. Определите:

1. Радиус орбиты + период обращения одного из компонентов двойной звезды. (1+2 балла)
2. Минимальное (f_{\min}) + максимальное (f_{\max}) значения солнечной постоянной на орбите экзопланеты. Изменением расстояния r пренебречь. (2+2 балла)
3. Средний радиус r (в а.е.) почти круговой орбиты экзопланеты, при условии, что среднее арифметическое величин f_{\min} и f_{\max} равно в точности земной солнечной постоянной f_\odot . (6 баллов) На сколько процентов отличаются пограничные значения солнечной постоянной от ее среднего значения? (2 балла)
4. Амплитуду ($\Delta m = m_{\max} - m_{\min}$, где m_{\max} , m_{\min} – максимальное и минимальное значения звездной величины двойной звезды, зафиксированные с поверхности экзопланеты) изменения блеска и период его изменения на небосводе экзопланеты. (3 балла)
5. Оцените величину продолжительности года (в годах) для данной экзопланеты. (2 балла)

Решение. 1. Если звезды данной пары – близнецы, подобные Солнцу, движущиеся по одной круговой орбите с минимальным возможным периодом, не испытывая слияния, значит радиус их орбиты равен радиусу каждого из тел, т. е. $a_* = \mathfrak{R}_\odot$. Действительно, чем меньше расстояние между телами, тем меньше их период обращения, с другой стороны, эти звезды не испытывают слияния, значит они могут лишь касаться друг друга, при этом точка их соприкосновения есть центр масс этой пары. (1 балл)

С использованием третьего обобщенного закона Кеплера вычислим период T_* обращения такой пары относительно центра масс (2 балла):

$$\frac{(\mathcal{M}_\odot + \mathcal{M}_\oplus)T_*^2}{(\mathcal{M}_\odot + \mathcal{M}_\oplus)T_\oplus^2} = \frac{(2a_*)^3}{a_\oplus^3}, \Rightarrow T_* = 2T_\oplus \left(\frac{\mathfrak{R}_\odot}{a_\oplus} \right)^{3/2} = 0.232 \text{ сут} = 5.56 \text{ часа}, \quad (25)$$

здесь $\mathcal{M}_\odot, \mathcal{M}_\oplus$ – масса Солнца и Земли соответственно, T_\oplus, a_\oplus – звездный год и радиус орбиты Земли.

2. Очевидно, солнечная постоянная будет: 1) минимальной, в случае когда одна компонента двойной звезды полностью закрывает другую для наблюдателя, находящегося у поверхности экзопланеты, (1 балл) 2) максимальной, когда оба компонента располагается на прямой, перпендикулярной направлению на экзопланету. (1 балл) Данные величины солнечной постоянной можно представить в виде (2 балла):

$$f_{\min} = \frac{L_\odot}{4\pi (r - \mathfrak{R}_\odot)^2}, \quad f_{\max} = \frac{2L_\odot}{4\pi (r^2 + \mathfrak{R}_\odot^2)}. \quad (26)$$

3. Определим среднее арифметическое для f_{\min} и f_{\max} значений солнечной постоянной (1 балл):

$$\bar{f} = \frac{1}{2}(f_{\min} + f_{\max}) = \frac{L_\odot}{8\pi} \left(\frac{1}{(r - \mathfrak{R}_\odot)^2} + \frac{2}{r^2 + \mathfrak{R}_\odot^2} \right) = \frac{L_\odot}{8\pi r^2} \left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1+x^2} \right), \quad \text{где } x = \frac{\mathfrak{R}_\odot}{r} \ll 1$$

иначе (1 балл)

$$\bar{f} = f_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2}.$$

В результате имеем уравнение вида (2 балла):

$$\frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2} = \frac{L_\odot}{8\pi r^2} \left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1+x^2} \right), \Rightarrow \frac{\mathfrak{R}_\odot^2}{a_\oplus^2} = \frac{\mathfrak{R}_\odot^2}{2r^2} \left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1+x^2} \right), \quad \text{или}$$

$$y^2 = \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1+x^2} \right), \Rightarrow y^2 \approx \frac{x^2}{2} (1 - 2x + 2), \Rightarrow y^2 \approx \frac{3}{2}x^2, \quad \text{где } y = \frac{\mathfrak{R}_\odot}{a_\oplus} \ll 1.$$

В итоге имеем (2 балла)

$$x = y\sqrt{\frac{2}{3}} = 3.796 \cdot 10^{-3}, \Rightarrow r = a_\oplus\sqrt{\frac{3}{2}} = 1.225 \text{ а.е.} = 183.2 \text{ млн. км.} \quad (27)$$

Вычислим пограничные значения солнечных постоянных (1 балл):

$$f_{\min} = \frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2} \frac{a_\oplus^2}{(r - \mathfrak{R}_\odot)^2} = \frac{2}{3}f_\odot \frac{1}{(1-x)^2} \approx \frac{2}{3}f_\odot(1 - 2x) \approx \frac{2}{3}f_\odot,$$

$$f_{\max} = \frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2} \frac{2a_\oplus^2}{r^2 + \mathfrak{R}_\odot^2} = \frac{4}{3}f_\odot \frac{1}{1+x^2} \approx \frac{4}{3}f_\odot.$$

Тогда искомые относительные отклонения солнечных постоянных от среднего будут представляться в виде (1 балл):

$$\varepsilon_{\min} = \frac{f_\odot - f_{\min}}{f_\odot} \cdot 100\% = 33\%, \quad \varepsilon_{\max} = \frac{f_{\max} - f_\odot}{f_\odot} \cdot 100\% = 33\%. \quad (28)$$

Следует отметить, что колебания солнечной постоянной у поверхности экзопланеты являются очень значительными. Для большинства живых организмов земной биосферы подобные колебания оказались бы губительными.

4. Амплитуда изменения блеска двойной звезды на небосводе экзопланеты можно представить с использованием формулы Погсона (2 балла):

$$\Delta m = 2.5 \lg \left(\frac{f_{\max}}{f_{\min}} \right) = 2.5 \lg 2 = 0.75^m. \quad (29)$$

Период изменения блеска двойной звезды очевидно равен $T_*/2 = 2.78$ часа, (1 балл) поскольку за один оборот одного из компонентов двойной будет наблюдаться 2 затмения и 2 конфигурации, когда достигается максимум солнечной постоянной у поверхности планеты.

5. Продолжительность года для данной экзопланеты оценим с использованием третьего обобщенного закона Кеплера (2 балла):

$$\frac{(2M_{\odot} + M_{\oplus})T_p^2}{(M_{\odot} + M_{\oplus})T_{\oplus}^2} = \frac{r^3}{a_{\oplus}^3}, \Rightarrow T_p = \frac{\sqrt{2}}{2} T_{\oplus} \left(\frac{r}{a_{\oplus}} \right)^{3/2} = 0.959 \text{ года.} \quad (30)$$

Заметим, что последнее значение весьма близко к продолжительности земного года.

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Вычислены радиус орбиты + период обращения одного из компонентов двойной звезды	1+2
Получены аналитические выражения для минимального + максимального значений солнечной постоянной на орбите экзопланеты	2+2
Вычислен средний радиус почти круговой орбиты экзопланеты	6
Вычислены относительные отклонения пограничных значений солнечной постоянной от ее среднего значения	1+1
Выполнен расчет амплитуды изменения блеска двойной звезды + определен период его изменения	2+1
Получена корректная оценка продолжительности года для данной экзопланеты	2

На решение задач данного этапа Олимпиады участникам отводится 4 часа.

Основные справочные данные

§1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Световой год – $1 \text{ св. г.} = 9.461 \cdot 10^{15} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 70.0 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

§2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая визуальная звездная величина – -26.74^m
- Видимая болометрическая звездная величина – -26.80^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Интегральный поток энергии на расстоянии Земли – 1360 Вт/м^2
- Поток энергии в видимых лучах на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

§3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$
- Экваториальный радиус – 6378.14 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Средний (по объему) радиус – 6371.01 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

§4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 363300 км
- Максимальное расстояние от Земли – 405500 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055

- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^{\circ}09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или $1/81.3$ массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

§5. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность г·см ⁻³	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты градусы	Геометрич. альbedo	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики градусы	Период обращения	Синодический период сут
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

§7. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбе-до	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§8. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.