

Решения задач
Открытой межрегиональной олимпиады
по астрономии имени Ф.А. Бредихина
7-8 класс

№1. «Ярчайшие звезды и их положение на небосводе»

Условие. Вашему вниманию в табл. 1 представлены 6 ярчайших звезд ночного небосвода Земли.

№	Название	α	δ	r , св.л.
1	Сириус (α Большого Пса)	$06^{\text{h}}45^{\text{m}}9^{\text{s}}$	$-16^{\circ}42'58''$	8.6
2	Канопус (α Киля)	$06^{\text{h}}23^{\text{m}}57^{\text{s}}$	$-52^{\circ}41'45''$	310
3	Ригил(А)/Толиман(В) (α Центавра АВ)	$14^{\text{h}}39^{\text{m}}35^{\text{s}}$	$-60^{\circ}50'15''$	4.3
4	Арктур (α Волопаса)	$14^{\text{h}}15^{\text{m}}40^{\text{s}}$	$19^{\circ}10'57''$	36.7
5	Вега (α Лиры)	$18^{\text{h}}36^{\text{m}}56^{\text{s}}$	$38^{\circ}47'01''$	25
6	Капелла (α Возничего)	$05^{\text{h}}16^{\text{m}}41^{\text{s}}$	$45^{\circ}59'53''$	42.2

Примечание: α – прямое восхождение светила, δ – склонение светила, r – расстояние от Солнца до звезды, выраженное в световых годах.

Таблица 1. Шесть ярчайших звезд ночного небосвода Земли.

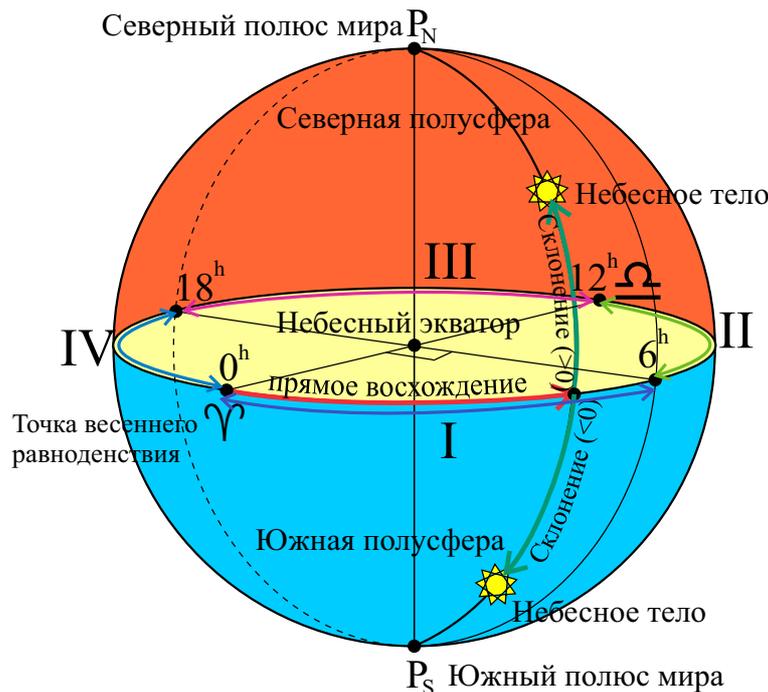


Рис. 1. К определению северной и южной полусферы небосвода, экваториальных координат светила, четвертей небесного экватора.

1. Как известно, небесный экватор делит всю небесную сферу на две полусферы. Полусфера, в которой находится северный полюс мира, называется *северной*. Вторая полусфера называется *южной* (см. рис. 1). В какой части небесной сферы располагается каждая из указанных звезд? Ответ представьте парой: (цифра, буква). (1 балл за каждую правильно определенную пару)

А. Северная полусфера	Б. Южная полусфера	В. Небесный экватор
-----------------------	--------------------	---------------------

2. Какие из перечисленных звезд можно в принципе наблюдать с северного географического полюса? (1 балл за каждую правильно названную звезду; штраф –1 балл за каждый ложный ответ)

3. Круги склонений каких звезд пересекают небесный экватор (см. рис. 1) в I-й и II-й четверти? (2 балла за каждую правильно названную звезду; штраф –2 балла за каждый ложный ответ)

4. Какая из перечисленных звезд является ближайшей к Земле? (1 балл)

5. Оцените угловое расстояние между Сириусом и Канопусом на небесной сфере. (4 балла)

Решение. 1. Согласно рис. 1, склонение звезд, расположенных в северной полусфере небосвода всегда больше нуля, а для звезд, расположенных в южной полусфере, данный параметр является отрицательным. Следовательно, имеем следующие пары звезд: (1,Б); (2,Б); (3,Б); (4,А); (5,А); (6,А).

2. Наблюдатель может видеть те звезды, которые расположены выше горизонта. На северном географическом полюсе математический горизонт совпадает с небесным экватором. Следовательно, из данной точки поверхности можно наблюдать все звезды, расположенные в северной полусфере небосвода, т. е. Арктур, Вега, Капеллу.

3. Согласно рис. 1, небесный экватор можно условно разделить на четыре равные части – четверти, каждая протяженностью в 6 часов, нумерация которых начинается от точки весеннего равноденствия в сторону увеличения прямого восхождения. Имеем следующее соответствие между номерами четвертей и интервалами прямых восхождений.

Четверти небесного экватора			
I	II	III	IV
Полуинтервалы прямых восхождений			
[0 ^h , 6 ^h)	[6 ^h , 12 ^h)	[12 ^h , 18 ^h)	[18 ^h , 24 ^h)

Согласно табл. 1, круги склонений Сириуса, Канопуса, Капеллы пересекают небесный экватор (см. рис. 1) в I-й и II-й четверти.

4. Ближайшая звезда к Солнцу является ближайшей и к Земле. Следовательно, согласно табл. 1, такой звездой является Ригил(А)/Толиман(В).

5. При расчете углового расстояния между указанными звездами заметим, что их прямые восхождения близки друг другу по значению, следовательно искомое угловое расстояние определяется дугой большого круга, соединяющей данные точки и при этом расположенной на узком сферическом двуугольнике (с вершинами в полюсах мира), который можно считать плоским (1 балл). Значит искомое расстояние можно определить приближенно формулой Пифагора как длину вектора на плоскости, заданного в ортогональных координатах (3 балла):

$$\ell = \sqrt{(\delta_S - \delta_C)^2 + 15^2(\alpha_S - \alpha_C)^2} = 36.4^\circ.$$

Рекомендации для жюри.

Пункт	Выполненная часть решения задачи	Балл
1	За каждую правильно определенную пару	1(6)
2	За каждую правильно названную звезду/за каждый ложный ответ	1(3)/- 1(-3)
3	За каждую правильно названную звезду/за каждый ложный ответ	2(6)/- 2(-6)
4	За правильно названную звезду	1
5	Корректная оценка углового расстояния между звездами	4

№2. «Чудесная природа комет»

Условие 1. На рис. 2 представлена фотография кометы с указанием основных элементов ее структуры. В табл. 2 даны названия этих элементов. Ответы на вопросы представьте: в пункте №1 парами: (цифра, буква); в пунктах № 2-4 – буквой/цифрой или названием термина из таблицы/рисунка; в пунктах №5-6 – десятичной дробью/в степенном виде.

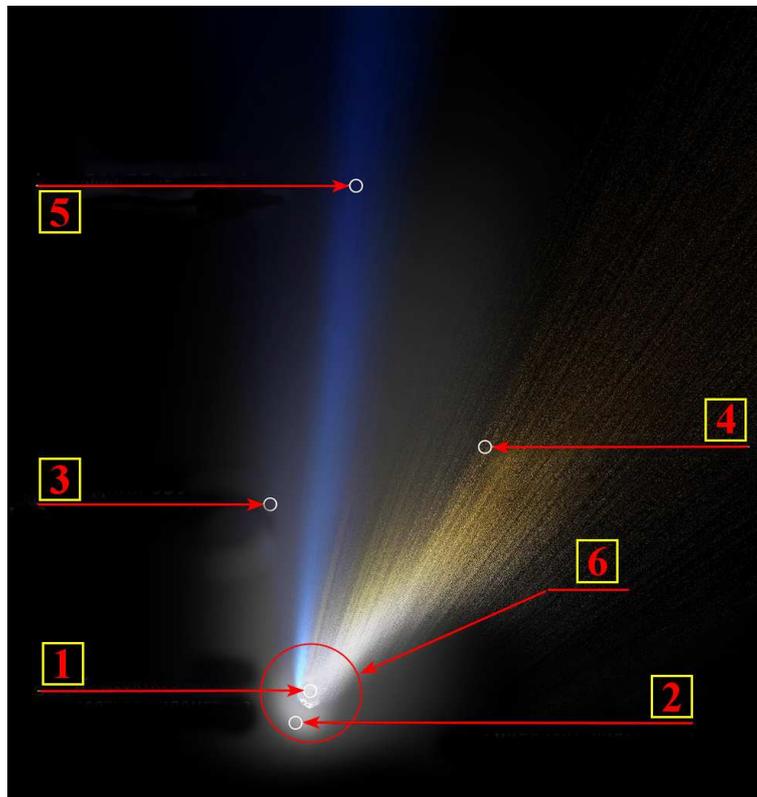


Рис. 2. К определению основных элементов структуры кометы.

А) Кома	Б) Ионный хвост	В) Пылевой хвост
Г) Водородная корона	Д) Ядро	Е) Голова

Таблица 2. Основные элементы в структуре кометы.

1. Установите соответствие между основными элементами в структуре кометы (отмеченными цифрами на рис. 2) и их названиями (представленными в табл. 2). (1 балл за каждую правильно названную пару)
2. В каком элементе структуры кометы (см. табл. 2) сосредоточено почти все ее вещество? (2 балла)
3. С использованием какого элемента структуры кометы (см. рис. 2) можно точно определить направление «на Солнце»? (2 балла)
4. Малые тела какого класса являются основным продуктом разрушения комет? (2 балла)

Некоторые классы малых тел Солнечной системы			
А) Астероиды Главного пояса	Б) Кентавры	В) Классические объ- екты пояса Койпера	Г) Метеороиды

Условие 2. Облако Оорта – гипотетическая сферическая область Солнечной системы, в которой большую часть времени «обитают» долгопериодические кометы. Внешняя часть облака Оорта представляет собой сферический слой, центр внутренней и внешней границ которого совпадают с Солнцем, их радиусы равны 20 тыс. и 120 тыс. а. е. В этой области насчитывается около 10^{13} кометных ядер, характерный поперечный размер которых составляет 1.3 км. Заметим, что средняя массовая плотность вещества ядра составляет 500 кг/м^3 ; объем шара диаметром D определяется по формуле $V = \frac{\pi}{6} D^3$. Оцените:

- 5.а) Массу (в кг) ядра кометы. (3 балла)
- 5.б) Массу (в массах Земли) всех кометных ядер облака Оорта. (2 балла)
6. Среднее количество ядер облака Оорта, содержащихся в единице его объема. Ответ представьте в «кол-во ядер/(а.е.)³». (3 балла)

Решение. 1. Имеем следующее соответствие между основными элементами в структуре кометы и их названиями:

№ эл-та	Название	Пара	№ эл-та	Название	Пара
1	Ядро (Д)	(1, Д)	4	Пылевой хвост (В)	(4, В)
2	Кома (А)	(2, А)	5	Ионный хвост (Б)	(5, Д)
3	Водородная корона (Г)	(3, Г)	6	Голова (Е)	(6, Е)

2. Как известно, в *ядре* кометы сосредоточено почти все ее вещество.

3. *Ионный хвост* всегда направлен строго от Солнца. Следовательно, если провести свой взгляд от размытого конца ионного хвоста вдоль его "тела", через кому, вдоль прямой, то Ваш взор обязательно уткнется в текущее положение Солнца.

4. *Метеороиды* – это малые тела Солнечной системы, являющиеся основным продуктом разрушения комет.

5.а) Массу ядра кометы можно определить как

$$\mathfrak{M}_N = \frac{4}{3}\pi \rho_N \mathfrak{R}_N^3 = \frac{\pi}{6} \rho_N \mathfrak{D}_N^3 = 5.75 \cdot 10^{11} \text{ кг.} \quad (1)$$

5.б) Массу всех кометных ядер облака Оорта можно записать так

$$\mathfrak{M}_{\text{tot}} = N \cdot \mathfrak{M}_N = N \cdot \frac{\pi}{6} \rho_N D^3 = 5.75 \cdot 10^{24} \text{ кг} = 0.96 \cdot \mathfrak{M}_{\oplus}. \quad (2)$$

6. По сути, в данном пункте необходимо найти концентрацию n_N ядер в облаке Оорта:

$$n_N = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi (\mathfrak{R}_{\text{max}}^3 - \mathfrak{R}_{\text{min}}^3)} = 1.39 \cdot 10^{-3} \text{ ядер/(а.е.)}^3. \quad (3)$$

Рекомендации для жюри.

Пункт	Выполненная часть решения задачи	Балл
1	За каждую правильно определенную пару	1(6)
2	За правильно определенный элемент структуры/указана в качестве ответа – голова	2/1
3	За правильно определенный элемент структуры	2
4	Правильно определен класс малых тел	2
5.а	Получен корректный аналитический результат + численное значение	2+1
5.б	Получен корректный аналитический результат + численное значение	1+1
6	Получен корректный аналитический результат + численное значение	2+1

№3. «Две звезды над горизонтом»

Условие 1. В 00 часов 00 минут по гражданскому времени Самарской области с ее территории наблюдался восход одновременно двух звезд. Время пребывания первой звезды над горизонтом составило 12 часов, а вторая была видна лишь 2 минуты. Ответьте на следующие вопросы:

1. В окрестности какой точки горизонта взошла первая звезда? Вторая звезда? Свой выбор поясните. (2+2 балла)

А) Точка севера	Б) Точка востока	В) Точка юга	Г) Точка запада
-----------------	------------------	--------------	-----------------

2. По дуге какого большого круга перемещалась первая звезда в своем видимом движении? Свой выбор поясните. (2 балла)

А) Математический горизонт	Б) Вертикал звезды	В) Небесный экватор	Г) Эклиптика
Д) Первый вертикал	Е) Небесный меридиан	Ж) Круг склонения звезды	З) Коллор равноденствий

3. Оцените разность азимутов точек восхода этих звезд. (3 балла)

4. Чему была равна угловая протяженность дуги большого круга, которую описала первая звезда над горизонтом? (2 балла)

5. Оцените моменты ближайших прохождений этих звезд через небесный меридиан по гражданскому времени Самарской области? (2+2 балла)

Условие 2. Рассматриваемые звезды являются близнецами Солнца. При этом первая расположена от Земли на расстоянии 27 пк, а вторая – на расстоянии 36 пк.

6. Определите линейное расстояние (в пк) между звездами 1 и 2. (3 балла)

7. В окрестности какой из трех звезд (Солнце, звезда 1, звезда 2) две другие звезды будут выглядеть наиболее яркими? (2 балла)

Решение. 1-2. Поскольку первая звезда пребывала над горизонтом 12 часов, следовательно в течение суток она двигалась вдоль *небесного экватора*, (2 балла) а значит взошла она в *точке востока* (2 балла) математического горизонта. Вторая звезда была видна лишь 2 минуты, следовательно часть ее суточной параллели, видимой над горизонтом, крайне мала и огибает *точку юга*. (2 балла)

3. Как известно, азимут точки востока равен 270° , а азимут точки юга – 0° (360°). Следовательно, разность азимутов этих точек составляет $\Delta A = 90^\circ$. (3 балла)

4. Поскольку первая звезда пребывала над горизонтом 12 часов, значит угловая протяженность дуги большого круга, которую она описала над горизонтом составляет $12 \text{ часов} \times 15^\circ/\text{час} = 180^\circ$. (2 балла) Здесь учтено, что угловая скорость видимого суточного движения звезд, расположенных на небесном экваторе, равна $15^\circ/\text{час}$.

5. Очевидно, что ближайшее прохождение каждой из этих звезд через небесный меридиан будет их верхней кульминацией. Как известно, момент верхней кульминации всегда расположен строго на середине временного интервала видимости данной звезды. Значит моменты верхней кульминации звезд будут (2+2 балла):

$$t_k^{(1)} = 00^{\text{h}}00^{\text{m}} + 12^{\text{h}}/2 = 06^{\text{h}}00^{\text{m}}, \quad t_k^{(2)} = 00^{\text{h}}00^{\text{m}} + 2^{\text{m}}/2 = 00^{\text{h}}01^{\text{m}}.$$

6. Поскольку разность азимутов звезд равна 90° , значит они вместе с Землей расположены в вершинах прямоугольного треугольника, а искомое расстояние будет равно длине гипотенузы (3 балла):

$$r_{12} = \sqrt{a^2 + b^2} = 45 \text{ пк}.$$

7. Рассматриваемые звезды и Солнце являются по своим свойствам близнецами, поэтому в окрестности Солнца, звезды 1 и 2 будут образовывать наиболее яркую пару, ибо расстояния от них до Солнца меньше r_{12} , а чем меньше расстояние до источника, тем ярче он выглядит. (2 балла)

Рекомендации для жюри.

Пункт	Выполненная часть решения задачи	Балл
1	Корректно определены точки восхода звезд 1 + 2	2+2
2	Корректно определен большой круг небесной сферы, вдоль которого совершала свое суточное движение звезда 1	2
3	Выполнена корректная оценка разности азимутов данных звезд	3
4	Вычислена угловая протяженность дуги большого круга, которую описала первая звезда над горизонтом	2
5	Корректная оценка моментов ближайших прохождений звезд 1 + 2 через небесный меридиан	2+2
6	Вычислено линейное расстояние между звездами 1 и 2	3
7	Правильно определена звезда, в окрестности которой две другие звезды будут выглядеть наиболее яркими	2

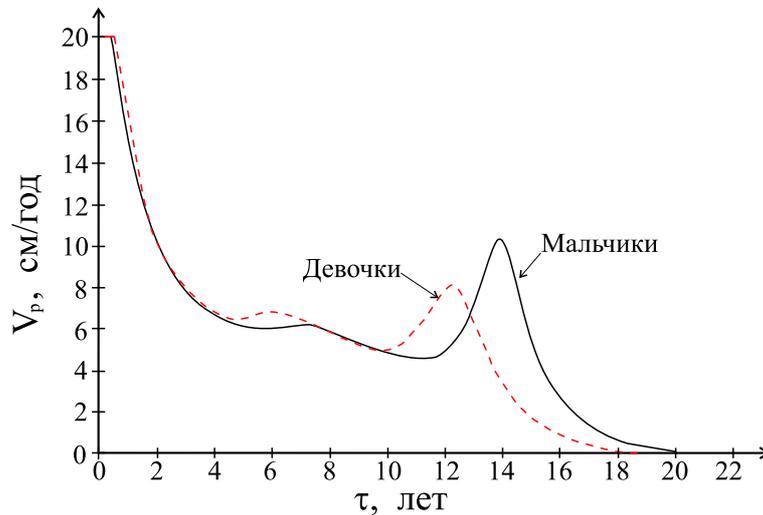


Рис. 3. Зависимость скорости изменения роста тела человека V_p от его возраста τ .

№4. «Изменение дальности прямой видимости в течение суток/жизни»

Условие 1. Как известно, *дальностью прямой видимости (ДПВ)* называется максимальное расстояние L от стоящего (в полный рост h) наблюдателя до точки на земном горизонте, которая еще доступна ему непосредственно в наблюдениях. Полагая, что свет в атмосфере Земли распространяется прямолинейно:

1. Постройте схематичный чертёж, с указанием Земли-шара, наблюдателя в полный рост и отрезка длины L , соответствующего ДПВ. (3 балла)

2. Получите аналитическую формулу для дальности прямой видимости, в случае Земли-шара радиуса $R_{\oplus} = 6371$ км. (3 балла)

Условие 2. Взрослый человек, рост которого равен $H = 1.8$ м, соблюдает классический распорядок суток (ночью – спит, днем бодрствует, регулярно двигаясь пешком). Из курса «Физиология человека» известно, что рост такого человека в течение суток изменяется на величину $\delta h = 2$ см. Определите:

3. В какое время суток дальность прямой видимости для этого человека будет наибольшей? Свой ответ поясните. (2 балла)

4. Чему равна наибольшая ДПВ (в км до сотых долей), если рост человека в течение суток не превышает величину H ? (2 балла)

5. Оцените, на сколько метров (до целого) изменяется величина ДПВ в течение суток для взрослого человека роста H ? (4 балла)

Условие 3. В течение жизни рост человека меняется, а следовательно меняется и дальность прямой видимости. На рис. 3 представлен график зависимости скорости изменения роста человека (для мальчиков/девочек) от возраста.

6. Оцените рост мальчика в возрасте 1 год, когда он уже способен стоять на ногах в полный рост, если его рост в момент рождения был $h_0 = 58$ см. (4 балла)

7. Определите дальность прямой видимости для него. (2 балла)

Решение. 1. Пример схематичного чертёжа с указанием Земли-шара, наблюдателя в полный рост и отрезка длины L , соответствующего ДПВ, представлен на рис. 4. (3 балла)

2. Получим аналитическую формулу для дальности прямой видимости для земного наблюдателя. Для этого заметим, что треугольник $\triangle ABC$, в вершинах которого расположены глаза

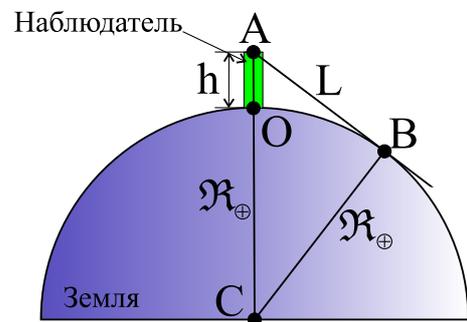


Рис. 4. К определению дальности прямой видимости для земного наблюдателя.

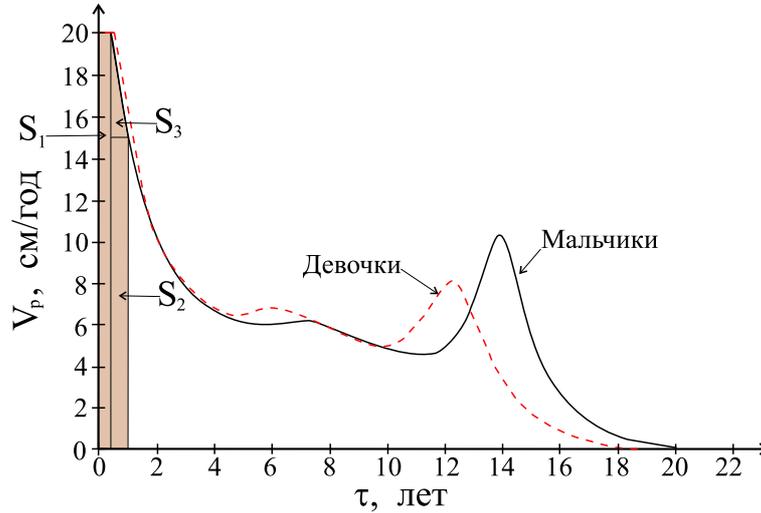


Рис. 5. К определению роста годовалого мальчика.

наблюдателя (А), точка на видимом горизонте (В) и центр Земли (С), является прямоугольным, (1 балл) поскольку луч (АВ), пришедший из точки на горизонте, касается поверхности Земли, а значит должен быть перпендикулярен радиусу Земли (ВС). Применим для данного треугольника теорему Пифагора (2 балла):

$$(\mathcal{R}_{\oplus} + h)^2 = \mathcal{R}_{\oplus}^2 + L^2, \Rightarrow L = \sqrt{(\mathcal{R}_{\oplus} + h)^2 - \mathcal{R}_{\oplus}^2} = \sqrt{2h\mathcal{R}_{\oplus} + h^2} \approx \sqrt{2h\mathcal{R}_{\oplus}}. \quad (4)$$

При записи последнего приближенного результата учтено, что рост человека много меньше радиуса Земли, т.е. $h \ll \mathcal{R}_{\oplus}$.

3. Поскольку взрослый человек соблюдает классический распорядок суток, то ночью он спит в горизонтальном положении и его мышечный каркас расслабляется, а межпозвонковое пространство увеличивается, при этом рост человека также увеличивается. Значит утром, после пробуждения рост человека достигает максимального значения, (1 балл) поскольку в течение дня, в результате прямохождения, под действием силы тяжести межпозвонковое пространство уменьшается, и тело человека испытывает "осадку", что приводит к плавному уменьшению его роста. Согласно (4), большему росту человека соответствует большая ДПВ. Значит, наибольшее значение ДПВ для человека достигается утром после пробуждения. (1 балл)

4. Если рост человека в течение суток не превышает величину H , значит это и есть его максимальное значение, для которого ДПВ, согласно (4), представляется в виде (2 балла):

$$L_{\max} \approx \sqrt{2H\mathcal{R}_{\oplus}} = 4.79 \text{ км}. \quad (5)$$

5. Изменение величины ДПВ в течение суток для взрослого человека роста H можно представить в виде (2+2 балла):

$$\delta L \approx \sqrt{2H\mathcal{R}_{\oplus}} - \sqrt{2\mathcal{R}_{\oplus}(H - \delta h)} \approx \sqrt{2H\mathcal{R}_{\oplus}} \left(1 - \sqrt{1 - \delta h/H}\right) \approx \sqrt{\frac{\mathcal{R}_{\oplus}}{2H}} \delta h = 27 \text{ м}. \quad (6)$$

6. Заметим, что площадь фигуры под графиком представленном на рис. 3, имеет смысл прибавления роста человека (1 балл) относительно его роста в момент рождения (по аналогии с графиком зависимости скорости материальной точки от времени. Здесь площадь под графиком равна пути, пройденному материальной точкой за время движения). Фигура, заключенная под графиком, соответствующая первому году жизни мальчика, является пятиугольником (см. рис. 3), который можно разбить на высокий узкий прямоугольник (S_1) + широкий низкий прямоугольник (S_2) и прямоугольный треугольник (S_3) (1 балл). Следовательно, рост годовалого мальчика можно представить как (2 балла)

$$h_1 = h_0 + S_1 + S_2 + S_3 = 58 \text{ см} + 20 \text{ см/год} \cdot 0.4 \text{ год} + 15 \text{ см/год} \cdot 0.6 \text{ год} + 5 \text{ см/год} \cdot 0.6 \text{ год},$$

$$h_1 = 78 \text{ см}.$$

7. Согласно (4), ДПВ для годовалого мальчика представляется в виде (2 балла):

$$L_1 \approx \sqrt{2h_1 R_{\oplus}} = 3.15 \text{ км.} \quad (7)$$

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Построен корректный схематичный чертеж	3
Получена аналитическая формула для дальности прямой видимости	3
Корректно определено время суток, когда дальность прямой видимости будет наибольшей	2
Вычислена максимальная ДПВ для взрослого человека	2
Выполнен корректный аналитический + численный расчет изменение величины ДПВ в течение суток для взрослого человека	2+2
Выполнена по графику корректная оценка роста мальчика в возрасте 1 год	4
Выполнен корректный численный расчет дальности прямой видимости для годовалого ребенка	2

№ 5. «Море Кракена и "подводная лодка" для Титана»

Условие 1. В 2006 году на поверхности Титана (крупнейшего спутника Сатурна), с помощью зонда «Кассини», было обнаружено крупнейшее углеводородное море – море Кракена, площадь поверхности которого составляет $S_0 = 5 \cdot 10^5 \text{ км}^2$, а средняя плотность углеводородной жидкости – $\rho_0 = 0.52 \text{ г/см}^3$ (является несжимаемой жидкостью). Усредненная по всей площади поверхности бассейна глубина моря составляет $\bar{h} = 100 \text{ м}$, а максимальная глубина – $h_{\text{max}} = 300 \text{ м}$. Определите:

1. Полный объем бассейна моря Кракена (в км^3). (2 балла)
2. Общую массу (в кг) углеводородов, наполняющих бассейн. (2 балла) Какую долю данная величина составляет от массы Титана? (1 балл)
3. Определите максимальное давление (в кПа) на дно моря. (4 балла) Вам может оказаться полезной формула для ускорения свободного падения у поверхности небесного тела:

$$g_0 = \frac{GM}{R^2},$$

здесь G – универсальная гравитационная постоянная (см. раздел "Справочные данные"), M, R – масса и радиус небесного тела соответственно. Следует также учесть, что Титан имеет азотно-метановую атмосферу, давление которой у его поверхности равно $p_0 = 146.7 \text{ кПа}$.

Условие 2. Для исследования глубин моря Кракена специалисты предлагают использовать «подводную лодку», модель которой представлена на рис. 6.а). Для погружения лодки необходимо выполнить забор морской жидкости в резервуар [V]. Определите:

4. Минимальный объем (в литрах, округлив до целого) резервуара [V] для погружения подводной лодки на глубину, если ее снаряженная масса с данным пустым резервуаром составляет $m_0 = 1600 \text{ кг}$, а ее полный объем – $V_{\text{tot}} = 3.5 \text{ м}^3$. (3 балла)

Условие 3. Для всплытия подводной лодки используется сжатый атмосферный газ, забираемый в резервуар [IV], непосредственно перед погружением, под повышенным давлением.

5. С какой максимальной глубины (выраженной в метрах) сможет всплыть данный аппарат, если вытеснение жидкости из резервуара [V] совершается сжатым газом, максимальное давление для которого составляет $p_{\text{max}}^{(g)} = 250 \text{ кПа}$. Следует полагать, что атмосферный газ в жидкости моря не растворяется. (3 балла)

6. Определите минимальную мощность атомного реактора такой «субмарины», способного обеспечить продолжительное движение судна на фиксированной глубине с постоянной скоростью $v_0 = 9 \text{ км/ч}$. Следует полагать, что КПД атомного реактора+электродвигательной установки составляет 70%. Сила сопротивления движению «субмарины» со стороны жидкой среды моря определяется выражением:

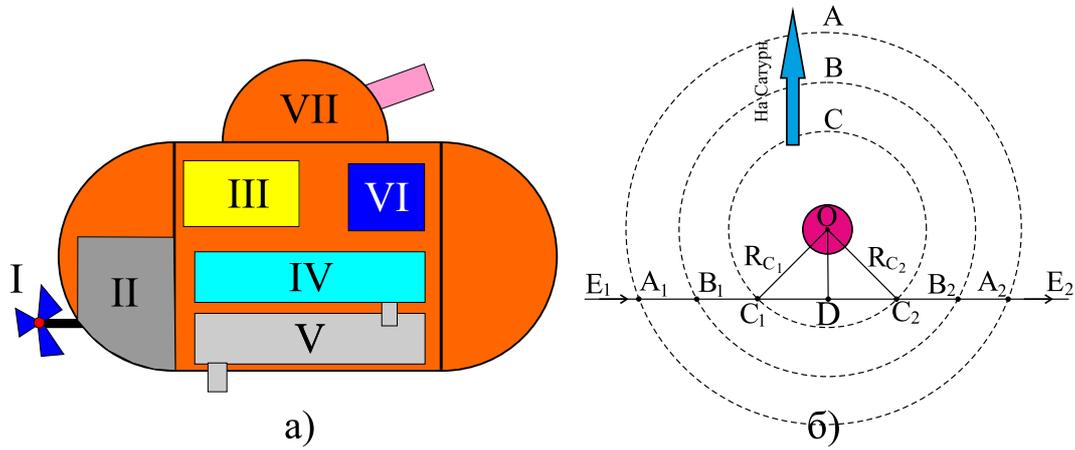


Рис. 6. К определению: а) структуры «подводной лодки» для исследования моря Кракена: $\boxed{\text{I}}$ – гребной винт, $\boxed{\text{II}}$ – электродвигательная установка, $\boxed{\text{III}}$ – атомный реактор, $\boxed{\text{IV}}$ – баллон с сжатым газом, $\boxed{\text{V}}$ – резервуар для заполнения углеводородной жидкостью, $\boxed{\text{VI}}$ – электронно-аппаратная часть, $\boxed{\text{VII}}$ – шмотровая башня; б) радиусов пылевых колец Реи.

$$F_r = \frac{1}{2} C_d \rho S v^2,$$

здесь $C_d = 0.35$ – безразмерный коэффициент сопротивления, ρ – плотность среды, в которой движется рассматриваемое тело, $S = 1.2 \text{ м}^2$ – площадь поперечного сечения судна (по отношению к направлению его движения); v – скорость движения судна относительно среды. (5 баллов)

Решение. 1. Объем моря V_m можно определить как объем цилиндра с площадью основания S и средней высотой (глубиной) \bar{h} (2 балла):

$$V_m = S \cdot \bar{h} = 5 \cdot 10^5 \text{ км}^2 \cdot 0.1 \text{ км} = 5 \cdot 10^4 \text{ км}^3. \quad (8)$$

2. Общую массу углеводородов, наполняющих бассейн и долю η , которую составляет данная величина от массы Титана можно записать так (2+1 балл)

$$\mathfrak{M}_m = \rho_0 \cdot V_m = 2.6 \cdot 10^{16} \text{ кг}, \quad \eta = \frac{\mathfrak{M}_m}{\mathfrak{M}_T} = 1.93 \cdot 10^{-7}. \quad (9)$$

3. Заметим, что максимальная глубина углеводородного моря $h_{\max} = 300 \text{ м}$ много меньше радиуса Титана (\mathfrak{R}_T), следовательно, можно пренебречь зависимостью ускорения свободного падения спутника от глубины и считать его постоянной величиной в любой точке моря. Следовательно, максимальное давление на дно моря можно представить в виде (2 балла):

$$p_{\max} = p_0 + \rho_0 g_T h_{\max}, \quad (10)$$

здесь g_T – ускорение свободного падения у поверхности спутника, подлежащее определению.

Титан – крупнейший спутник Сатурна и один из самых больших, среди спутников всех классических планет Солнечной системы, и потому его форма близка к форме шара. Для небесного тела, имеющего форму шара, ускорение свободного падения представляется в виде (2 балла):

$$g_T = \frac{G \mathfrak{M}_T}{\mathfrak{R}_T^2} = 1.359 \text{ м/с}^2, \quad (11)$$

здесь $\mathfrak{M}_T = 1.35 \cdot 10^{23} \text{ кг}$ – масса спутника, $\mathfrak{R}_T = 2575 \text{ км}$ – его радиус (взяты из справочных данных). В результате, давление на дне моря есть $p_{\max} = 358.7 \text{ кПа}$.

4. Очевидно, что средняя массовая плотность "субмарины" $\bar{\rho}_b^{(0)} = m_0/V_{\text{tot}} = 457 \text{ кг/м}^3$ меньше средней массовой плотности ρ_0 жидкости моря при пустом резервуаре $\boxed{\text{V}}$, что обеспечивает ее плавучесть на поверхности моря. Для погружения субмарины необходимо, чтобы ее средняя массовая плотность была не меньше плотности ρ_0 , т.е. (3 балла)

$$\bar{\rho}_b^{(1)} = \rho_0 = \frac{m_0 + \rho_0 V_V}{V_{\text{tot}}}, \Rightarrow V_V = V_{\text{tot}} - \frac{m_0}{\rho_0} = 0.423 \text{ м}^3 = 423 \text{ л}. \quad (12)$$

5. Во время вытеснения жидкости из резервуара \boxed{V} , последний является открытым, а значит давление жидкости в этом резервуаре будет равно давлению жидкости на данной глубине. Сжатый газ сможет вытеснить эту жидкость, если его максимальное давление будет не меньше давления жидкости на данной глубине, т.е. (3 балла)

$$p_{\max}^{(g)} = p_0 + \rho_0 g_T h_{\max}^{(1)} \Rightarrow h_{\max}^{(1)} = \frac{p_{\max}^{(g)} - p_0}{\rho_0 g_T} = 146 \text{ м.} \quad (13)$$

6. Воспользуемся определением коэффициента полезного действия (КПД) механизма (1 балл):

$$\eta_b = \frac{A_{\text{п}}}{A_{\text{з}}} \cdot 100\%, \quad (14)$$

здесь $A_{\text{п}}$ – полезная работа, совершаемая непосредственно для обеспечения движения «подводной лодки», $A_{\text{з}}$ – затрачиваемая работа ее атомным реактором. Гребной винт подводной лодки создает силу тяги $F_{\text{тяг}}$, которая и совершает полезную работу, представляемую в виде (1 балл):

$$A_{\text{п}} = F_{\text{тяг}} \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha,$$

здесь Δr – перемещение подводной лодки относительно среды моря за промежуток времени Δt , α – угол между направлением силы тяги и перемещения (в нашем случае сила и перемещение лодки совпадают, значит $\alpha = 0^\circ$, тогда $\cos \alpha = 1$).

Учтем далее, что мощность атомного реактора связана с затрачиваемой работой выражением вида (1 балл):

$$A_{\text{з}} = P_{\text{р}} \cdot \Delta t.$$

В итоге КПД можно записать так

$$\eta_b = \frac{F_{\text{тяг}} \cdot \Delta r}{P_{\text{р}} \cdot \Delta t} \cdot 100\%, \Rightarrow P_{\text{р}} = \frac{F_{\text{тяг}} \cdot \Delta r}{\eta_b \cdot \Delta t} \cdot 100\%. \quad (15)$$

Заметим далее, что $v = \Delta r / \Delta t$. При продолжительном движении судна на фиксированной глубине с постоянной скоростью на него в горизонтальном направлении будут действовать две силы $F_{\text{тяг}}$ и F_r , очевидно, взаимно компенсирующие друг друга, значит, $F_{\text{тяг}} = F_r$. (1 балл) Тогда окончательно имеем (1 балл)

$$P_{\text{р}} = \frac{1}{2} C_d \rho S v^3 \frac{100\%}{\eta_b} = 2440 \text{ Вт.} \quad (16)$$

Критерии оценки задачи.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Вычислен полный объем бассейна моря Кракена	2
Рассчитана общая масса углеводородов, наполняющих бассейн + доля, которую она составляет от массы Титана	2+1
Получено корректное значение для максимального давления на дно моря	4
Выполнен корректный расчет для минимального объема резервуара \boxed{V}	3
Вычислена максимальная глубина, с которой сможет всплыть данный аппарат	3
Выполнен корректный расчет минимальной мощности атомного реактора	5

№6. «Основные свойства колец Реи»

Условие 1. В 2008 году было объявлено о "непрямом открытии" пылевых колец у Реи (второго по размерам и массе спутника Сатурна) с помощью КА "Кассини". Открытие было сделано с использованием "эффекта тени", наблюдавшегося в потоке электронов, движущихся от Сатурна и регистрируемых КА. Когда КА проходил мимо Реи по прямолинейной траектории (см. рис. 6.б), по другую сторону от Сатурна, в точках $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ его траектории отчетливо наблюдалась тень от колец. Используя известные данные наблюдений $OD = 1251$ км,

Кольцо А		Кольцо В		Кольцо С	
Точки орбиты КА					
A ₁	A ₂	B ₁	B ₂	C ₁	C ₂
Моменты времени нахождения КА в точках его орбиты					
22 ^ч 34 ^м 06 ^с	22 ^ч 41 ^м 27 ^с	22 ^ч 34 ^м 44 ^с	22 ^ч 40 ^м 45 ^с	22 ^ч 35 ^м 18 ^с	22 ^ч 40 ^м 00 ^с

Таблица 3. К определению моментов времени нахождения КА в точках A₁, A₂, B₁, B₂, C₁, C₂.

$t_D = 22^{\text{ч}}37^{\text{м}}39^{\text{с}}$ – момент прохождения КА через точку D – центр тени Реи, значения моментов времени пребывания КА в указанных точках (см. табл. 3) и скорости движения аппарата $v = 7.272$ км/с относительно Реи, определите:

1. Два значения радиуса (в км) и их среднее арифметическое для каждого кольца (А, В, С) Реи. (6 баллов)

2. Линейные орбитальные скорости (в км/с) частиц колец А, В, С, если данная величина определяется формулой вида:

$$V = \sqrt{\frac{GM}{R}}, \quad (17)$$

здесь G – универсальная гравитационная постоянная (см. раздел "Справочные данные"), M – масса небесного тела, вокруг которого совершает движение частица-спутник по круговой орбите радиуса R . (3 балла)

3. Получите формулу для орбитального периода обращения частицы кольца вокруг Реи. Вычислите данную величину (в сутках) в случае частиц колец А, В, С. (5 баллов)

Условие 2. Как известно, частица является извечным спутником массивного тела, если ее орбита расположена целиком внутри сферы Хилла для данного массивного тела, т. е. радиус орбиты R не больше радиуса R_{Hill} данной сферы:

$$R \leq R_{\text{Hill}} = a_{\text{Rhea}} \sqrt[3]{\frac{1}{3} \frac{M_{\text{Rhea}}}{M_{\text{J}} + M_{\text{Rhea}}}}, \quad (18)$$

здесь M_{J} , M_{Rhea} – масса Сатурна и Реи соответственно, a_{Rhea} – радиус орбиты последней относительно Сатурна.

4. Проверьте, являются ли частицы данных колец извечными спутниками Реи? (2 балла)

Условие 3. Предположим, что данные кольца образовались в результате приливного разрушительного действия Реи на пористое тело с низкой массовой плотностью, вошедшее внутрь сферы, центр которой совпадает с центром Реи, а ее радиус равен *пределу Роша* – минимальному радиусу круговой орбиты этого тела, на которой приливные силы, вызванные гравитацией Реи, равны силам самогравитации этого тела и последний еще может сохранять свою целостность. Предел Роша можно определить формулой вида:

$$R_{\text{Roche}} = R_{\text{Rhea}} \sqrt[3]{\frac{2\rho_{\text{Rhea}}}{\rho}}, \quad (19)$$

здесь R_{Rhea} – радиус Реи; ρ_{Rhea} , ρ – средние массовые плотности Реи и данного тела соответственно.

5. Оцените максимальное значение средней массовой плотности данного тела ρ , если место его крушения соответствует современному местоположению колец. (4 балла)

Решение. 1. Согласно условию задачи, траектория движения – прямая, а скорость движения – постоянная величина v , следовательно, используя указанные моменты времени, можно найти следующие отрезки (1.5 балла):

$$r_{A_1} = A_1D = v(t_D - t_{A_1}), \quad r_{A_2} = DA_2 = v(t_{A_2} - t_D);$$

$$r_{B_1} = B_1D = v(t_D - t_{B_1}), \quad r_{B_2} = DB_2 = v(t_{B_2} - t_D);$$

$$r_{C_1} = C_1D = v(t_D - t_{C_1}), \quad r_{C_2} = DC_2 = v(t_{C_2} - t_D).$$

Кольцо С								
t_1	t_2	r_1 , км	r_2 , км	R_1 , км	R_2 , км	\bar{R} , км	V , км/с	T , сут
$22^{\text{ч}}35^{\text{м}}18^{\text{с}}$	$22^{\text{ч}}40^{\text{м}}00^{\text{с}}$	1025.4	1025.4	1618	1618	1618	0.320	0.367
Кольцо В								
$22^{\text{ч}}34^{\text{м}}44^{\text{с}}$	$22^{\text{ч}}40^{\text{м}}45^{\text{с}}$	1352.7	1272.7	1842	1784	1813	0.303	0.436
Кольцо А								
$22^{\text{ч}}34^{\text{м}}06^{\text{с}}$	$22^{\text{ч}}41^{\text{м}}27^{\text{с}}$	1658.1	1549.0	2077	1991	2034	0.286	0.518

Таблица 4. К определению двух значений радиуса для каждого кольца (А,В,С) Реи, их среднего арифметического, орбитальной скорости и периода обращения пылевой частицы кольца вокруг спутника Сатурна.

Зная минимальное расстояние, на которое сблизился аппарат $r = OD$, можно по теореме Пифагора найти радиусы колец (1.5 балла):

$$R_{A_1} = \sqrt{r^2 + r_{A_1}^2}, \quad R_{A_2} = \sqrt{r^2 + r_{A_2}^2},$$

$$R_{B_1} = \sqrt{r^2 + r_{B_1}^2}, \quad R_{B_2} = \sqrt{r^2 + r_{B_2}^2},$$

$$R_{C_1} = \sqrt{r^2 + r_{C_1}^2}, \quad R_{C_2} = \sqrt{r^2 + r_{C_2}^2}.$$

Средние арифметические значения радиусов колец будут (1.5 балла):

$$\bar{R}_A = \frac{R_{A_1} + R_{A_2}}{2}, \quad \bar{R}_B = \frac{R_{B_1} + R_{B_2}}{2}, \quad \bar{R}_C = \frac{R_{C_1} + R_{C_2}}{2}. \quad (20)$$

Численные значения последних величин представлены в 7-й колонке табл. 4. (1.5 балла)

2. С использованием средних значений радиусов колец, представленных в табл. 4 и формулы (17), вычислены численные значения для линейной орбитальной скорости частиц колец (А, В, С) и представлены в 8-й колонке той же таблицы. (3 балла)

3. Скорость частицы, равномерно движущейся по окружности, можно представить в виде (2 балла):

$$V = \frac{2\pi\bar{R}}{T}, \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi\bar{R}^{3/2}}{\sqrt{G \cdot \mathfrak{M}_{\text{Rhea}}}}, \quad (21)$$

здесь T — период обращения частицы вокруг Реи. Численные значения искомой величины представлены в 9-й колонке табл. 4. (3 балла)

4. С использованием формулы (18) вычислим радиус сферы Хилла для Реи в поле тяготения Сатурна — $R_{\text{Hill}} = 5979$ км, что существенно больше радиуса самого большого кольца А, значит частицы всех колец Реи являются извечными ее спутниками. (2 балла)

5. Из формулы (19) выразим явно среднюю массовую плотность вещества данного тела (1 балл):

$$\rho = 2 \rho_{\text{Rhea}} \left(\frac{\mathfrak{R}_{\text{Rhea}}}{R_{\text{Roche}}} \right)^3. \quad (22)$$

Поскольку место крушения данного тела соответствует современному местоположению колец, то плотность будет максимальной при минимальном значении R_{Roche} , который очевидно удовлетворяет неравенству: $R_{\text{Roche}} \geq R_C$. (1 балл) Следовательно, (1+1 балл)

$$\rho_{\text{max}} = 2 \rho_{\text{Rhea}} \left(\frac{\mathfrak{R}_{\text{Rhea}}}{R_C} \right)^3 = 281 \text{ кг/м}^3. \quad (23)$$

Последнее значение соответствует плотности ядер комет с высоким показателем пористости.

Критерии оценки задачи.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Вычислены 2 значения радиуса (в км) и их среднее арифметическое для кольца А + В + С	2 + 2 + 2
Рассчитаны линейные орбитальные скорости частиц колец А + В + С	1+1+1
Получена формула для периода обращения частицы кольца+ найдены его численные значения для частиц колец А + В + С	2+1+1+1

Критерии оценки задачи.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Строго доказано, что частицы всех колец Реи являются ее извечными ее спутниками	2
Получена корректная численная оценка для максимальной средней массовой плотности разрушенного тела	4

На решение задач данного этапа Олимпиады участникам отводится 4 часа.

Основные справочные данные

§1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Световой год – $1 \text{ св. г.} = 9.461 \cdot 10^{15} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 70.0 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

§2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая визуальная звездная величина – -26.74^m
- Видимая болометрическая звездная величина – -26.80^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Интегральный поток энергии на расстоянии Земли – 1360 Вт/м^2
- Поток энергии в видимых лучах на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

§3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$
- Экваториальный радиус – 6378.14 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Средний (по объему) радиус – 6371.01 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

§4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 363300 км
- Максимальное расстояние от Земли – 405500 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055

- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^{\circ}09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или $1/81.3$ массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

§5. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность г·см ⁻³	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты градусы	Геометрич. альbedo	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики градусы	Период обращения	Синодический период сут
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

§7. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбе-до	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§8. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.