

**Решения задач**  
**Открытой межрегиональной олимпиады**  
**по астрономии имени Ф.А. Бредихина**  
**10-11 класс**

**№ 1. «Основные зоны в теле Солнца и их свойства»**

**Условие.** На рис. 1 представлена структура Солнца с указанием его основных зон (без сохранения масштаба!). В табл. 1 даны названия этих зон (областей). Ответы на вопросы представьте: в пунктах №1 парами: (цифра, буква); в пунктах № 2-5 – буквой или названием термина из таблицы, в пункте №6 – целым числом.

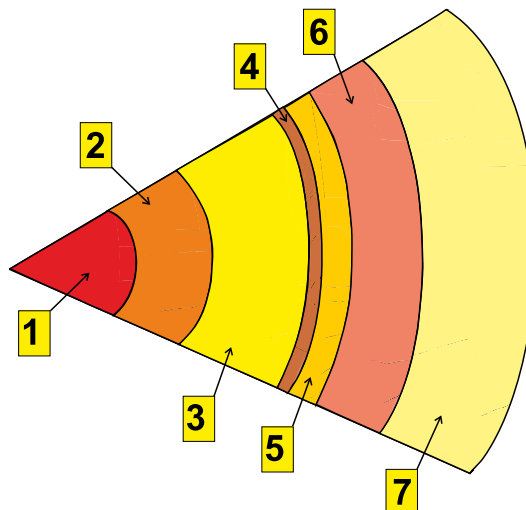


Рис. 1. К определению структуры Солнца.

1. Установите соответствие между основными зонами в теле Солнца (отмеченными цифрами на рис. 1) и их названиями (представленными в табл. 1). (1 балл за каждую правильно названную пару)

2. Какие из представленных областей в теле Солнца составляют его атмосферу? (1 балл за каждую правильно названную зону)

3. В какой области Солнца находится основной источник энергии Солнечной системы? (2 балла)

4. Какая область в теле Солнца имеет наименьшую протяженность вдоль направления "от центра Солнца"? (2 балла)

5. На границе каких двух областей располагается *тахоклин* – область в теле Солнца, которая считается ответственной за генерацию его глобального магнитного поля? (2 балла)

6. Оцените скорость выхода (в км/с) частиц солнечного ветра из фотосферы Солнца, если их скорость на орбите Земли составляет  $V_{\oplus} = 400$  км/с. Следует считать, что изменение скорости частиц обусловлено лишь их гравитационным взаимодействием с Солнцем. (3 балла)

А) Переходный слой	Б) Лучистая зона	В) Хромосфера	Г) Конвективная зона
Д) Ядро	Е) Корона	Ж) Фотосфера	–

Таблица 1. Названия основных зон в теле Солнца.

**Решение. 1.** Имеем следующие пары:

№ эл-та	Название	Пара	№ эл-та	Название	Пара
1	Ядро (Д)	(1, Д)	5	Хромосфера (В)	(5, В)
2	Лучистая зона (Б)	(2, Б)	6	Переходный слой (А)	(6, А)
3	Конвективная зона (Г)	(3, Г)	7	Корона (Е)	(7, Е)
4	Фотосфера (Ж)	(4, Ж)	–	–	–

2. Атмосферу Солнца составляют 4 внешние области: *фотосфера* (Ж,4), *хромосфера* (5,В), *переходный слой* (6,А) и *корона* (7,Е).

3. Основным источником энергии в Солнечной системе на протяжении миллиардов лет являются термоядерные реакции, протекающие в *ядре* (1, Д) Солнца.

4. *Фотосфера* (Ж,4) имеет наименьшую протяженность вдоль направления "от центра Солнца", составляющую по разным оценкам  $300 \div 900$  км.

5. На границе *лучистой* (2,Б) и *конвективной* (3,Г) зон располагается *тахоклин* – область в теле Солнца, которая считается ответственной за генерацию его глобального магнитного поля.

6. Воспользуемся законом сохранения механической энергии для частицы массы  $m_p$  солнечного ветра:

$$m_p \frac{V_{\odot}^2}{2} - \frac{G m_p M_{\odot}}{R_{\odot}} = m_p \frac{V_{\oplus}^2}{2} - \frac{G m_p M_{\odot}}{a_{\oplus}}, \quad V_{\odot} = \sqrt{V_{\oplus}^2 + 2 G M_{\odot} \left( \frac{1}{R_{\odot}} - \frac{1}{a_{\oplus}} \right)} = 735 \text{ км/с.}$$

В последнем выражении  $M_{\odot}, R_{\odot}$  – масса Солнца,  $a_{\oplus}$  – большая полуось земной орбиты,  $G$  – универсальная гравитационная постоянная.

*Рекомендации для жюри.*

Выполненная часть решения задачи	Балл
Правильно определена пара – (номер зоны, название)	1(7)
Правильно определено название одной из зон атмосферы	1(4)
Корректно определена зона, в которой располагается основной источник Солнечной системы	2
Дано правильное название зоны, имеющей наименьшую протяженность вдоль направления "от центра Солнца"	2
Правильно названы две зоны, на общей границе которых расположен тахоклин	2
С использованием закона сохранения энергии получена корректная оценка выхода частицы из фотосферы	3

## № 2. «Яркое трио Солнечной системы»

Условие. На рис. 2 представлена фотография-коллаж Луны и двух планет-гигантов Солнечной системы, полученная жителем северного географического полушария. Ответьте на следующие вопросы:

1. В какой конфигурации располагались планеты-гиганты в момент съемки, если угол элонгации Луны относительно Солнца в этот момент был равен точно  $90^\circ$ ? (2 балла)

Основные конфигурации классических планет Солнечной системы			
А) Восточная элонгация	Б) Верхнее соединение	В) Противостояние	Г) Восточная квадратура
Д) Западная элонгация	Е) Нижнее соединение	Ж) Соединение	З) Западная квадратура

2. Оцените линейное расстояние (в астрономических единицах) между Юпитером и Сатурном в момент съемки. (3 балла)

3. Оцените дату съемки, если угловое расстояние между планетами в момент (21.12.2020) их великого соединения<sup>1</sup> составило 6 угловых минут. Орбиты всех классических планет и Луны считать круговыми и лежащими приблизительно в одной плоскости. (6 баллов)

4. Оцените даты противостояний Юпитера и Сатурна в 2020 году. (6 баллов)

5. Оцените минимальный промежуток времени, через который повторяются такие великие соединения указанных планет-гигантов. (3 балла)

Решение. 1. Очевидно, Луна запечатлена жителем северного географического полушария в фазе первой четверти. В указанной фазе Луна, как правило, видна после захода Солнца и до полуночи. Поскольку на фотографии запечатлено тесное сближение Луны, Сатурна и Юпитера, значит планеты-гиганты так же как и Луна должны были отстоять от направления на Солнце на  $90^\circ$ , что соответствует (с учетом их времени видимости) их восточной квадратуре. (2 балла)

<sup>1</sup> *Великое соединение* – соединение планет Юпитера и Сатурна, когда видимое положение этих двух планет на небесной сфере наиболее близко друг к другу.



Рис. 2. Луна и планеты-гиганты Солнечной системы.

2. Поскольку угловое расстояние между планетами чуть больше  $1^\circ$  (этот факт будет подтвержден в следующем пункте), то можно полагать, что эти планеты лежат на одной прямой. (1 балл)  
Тогда искомое расстояние между планетами в момент съемки можно оценить как (2 балла)

$$\Delta_{JS} = \sqrt{a_S^2 - a_\oplus^2} - \sqrt{a_J^2 - a_\oplus^2} = 4.38 \text{ а.е.}, \quad (1)$$

здесь  $a_S$ ,  $a_J$ ,  $a_\oplus$  – радиусы круговых орбит Сатурна Юпитера и Земли соответственно.

3. Определим по рисунку линейный диаметр Луны  $d_\zeta = 49$  мм и расстояние между планетами вдоль прямой «Юпитер-Сатурн» –  $d_{MS} = 137$  мм. Тогда угловое расстояние между планетами составляет значение (1 балл):

$$\left\{ \begin{array}{l} d_\zeta \rightarrow \mathcal{D}_\zeta, \\ d_{JS} \rightarrow \Psi_{JS} \end{array} \right\}, \Rightarrow \Psi_{JS} = \mathcal{D}_\zeta \left( \frac{d_{JS}}{d_\zeta} \right) = 2 \left( \frac{d_{JS}}{d_\zeta} \right) \frac{\mathfrak{R}_\zeta}{a_\zeta} \times 3438' = 86.9', \quad (2)$$

здесь  $\mathcal{D}_\zeta$ ,  $\mathfrak{R}_\zeta$ ,  $a_\zeta$  – угловой диаметр Луны с позиции земного наблюдателя, ее линейный радиус и радиус орбиты соответственно.

Далее определим угловую скорость видимого движения планеты-гиганта в окрестности ее восточной квадратуры. Для этого рассмотрим рис. 3.а), соответствующий условию данной задачи. Очевидно перпендикулярная к лучу зрения (с точки зрения земного наблюдателя) составляющая скорости планеты относительно Земли определяется только модулем ее орбитальной скорости  $V_p$  и углом:

$$V_\perp = V_p \cos \alpha = \sqrt{\frac{G \mathcal{M}_\odot}{a_p}} \frac{\sqrt{a_p^2 - a_\oplus^2}}{a_p} = \sqrt{\frac{G \mathcal{M}_\odot}{a_p} \left( 1 - \left( \frac{a_\oplus}{a_p} \right)^2 \right)}. \quad (3)$$

Тогда угловая скорость видимого движения планеты есть (1 балл)

$$\omega_p = \frac{V_\perp}{\sqrt{a_p^2 - a_\oplus^2}} = \sqrt{\frac{G \mathcal{M}_\odot}{a_p^3}}. \quad (4)$$

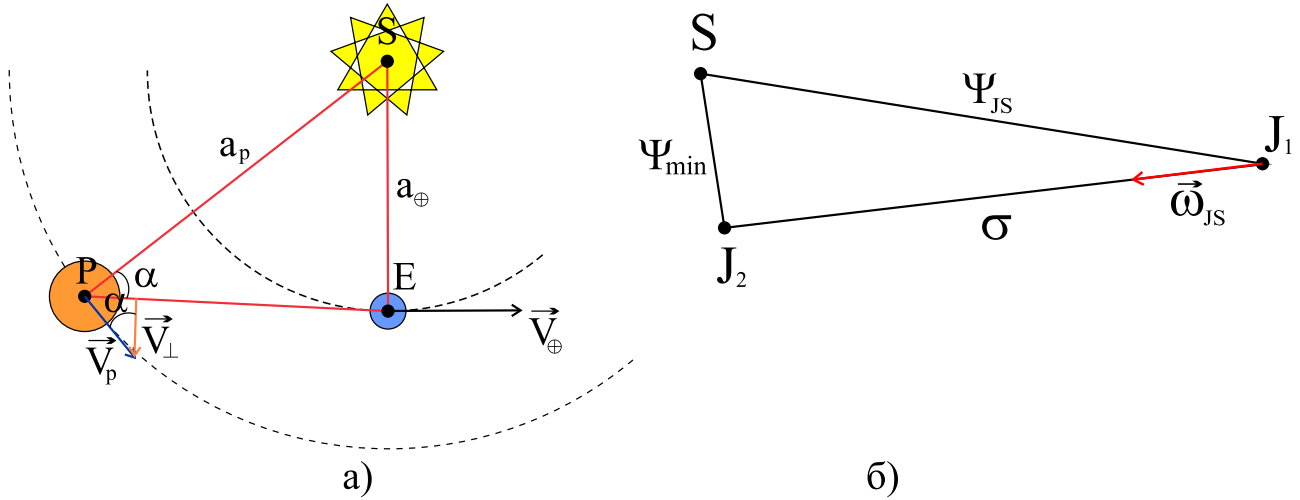


Рис. 3. К определению: а) угловой скорости видимого движения планеты-гиганта в окрестности его восточной квадратуры; б) взаимного расположения планет в момент съемки и великого соединения (относительно Сатурна).

Юпитер и Сатурн движутся в одном направлении, при этом Юпитер догоняет Сатурн. Следовательно угловая скорость (в угловых минутах в сутки) видимого сближения планет-гигантов в момент съемки будет (1 балл)

$$\omega_{JS} = \omega_J - \omega_S = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_J^3}} - \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_S^3}} = 2.98' / \text{сут.} \quad (5)$$

Поскольку орбиты всех планет лежат в одной плоскости, то очевидно видимый путь Юпитера относительно Сатурна по небосводу будет прямая, составляющая малый угол с прямой "Юпитер-Сатурн" (в силу несовпадения орбит планет в действительности, рис. 3.б). Следовательно имеем дело с прямоугольным треугольником в вершинах которого находится (J<sub>1</sub>) Юпитер в момент съемки (относительно Сатурна), (S) Сатурна, и положение Юпитера (J<sub>2</sub>) в момент Великого соединения, при этом сторона SJ<sub>1</sub> будет гипотенузой. Определим катет J<sub>1</sub>J<sub>2</sub> по теореме Пифагора (1 балл):

$$\sigma = J_1 J_2 = \sqrt{\Psi_{JS}^2 - \Psi_{\min}^2} = 86.7'.$$

Следовательно время, прошедшее от момента съемки до момента великого соединения планет-гигантов, есть (1 балл)

$$\tau = \frac{\sigma}{\omega_{JS}} = 29.1 \text{ сут.} \quad (6)$$

Значит съемка была выполнена 21-22 ноября 2020 года (ответ представлен диапазоном дат, в силу погрешностей измерений по рисунку и близости  $\tau$  к целому числу). (1 балл)

4. Заметим далее, что планеты относительно центра видимого диска Луны расположены симметрично, то есть приблизительно на одинаковом угловом расстоянии. Поскольку орбиты всех тел лежат приблизительно в одной плоскости, следовательно все рассматриваемые тела движутся в одном направлении вдоль прямой "Юпитер-Сатурн". Оценим промежутки времени, которые отделяют момент съемки от момента их пребывания в восточной квадратуре (2 балла):

$$\tau_J = \frac{\Psi_{JS}}{2\omega_J} = 8.7 \text{ сут.}, \quad \tau_S = \frac{\Psi_{JS}}{2\omega_S} = 21.7 \text{ сут.}$$

Заметим, что Юпитер уже прошел свою точку восточной квадратуры, а Сатурн – еще не достиг ее.

Определим далее промежутки времени, отделяющие моменты противостояний планет-гигантов от моментов их пребывания в восточной квадратуре (2 балла):

$$\Delta t_J = S_J \frac{90^\circ - \alpha_J}{360^\circ} = S_J \frac{\arccos(a_{\oplus}/a_J)}{360^\circ} = 87.4 \text{ сут.}$$

$$\Delta t_S = S_S \frac{90^\circ - \alpha_S}{360^\circ} = S_S \frac{\arccos(a_\oplus/a_S)}{360^\circ} = 88.2 \text{ сут.}$$

Тогда искомые даты противостояний планет-гигантов представляются так (2 балла)

$$T_J = 21.12.2020 - \tau - \tau_J - \Delta t_J = 21.12.2020 - 125.2 \text{ сут} = (17 \div 18).08.2020. \quad (7)$$

$$T_S = 21.12.2020 - \tau + \tau_S - \Delta t_S = 21.12.2020 - 95.6 \text{ сут} = (16 \div 17).09.2020. \quad (8)$$

В действительности, в 2020 году противостояние Юпитера произошло 14 июля, а противостояние Сатурна – 21 июля. Столь значительные расхождения между настоящим прогнозом и истинными значениями объясняются лишь одним фактом: данное изображение является коллажем, в котором были совмещены образы небесных тел в действительности не наблюдавшиеся на таких взаимных угловых расстояниях в 2020 году!

5. Такие великие соединения Юпитера и Сатурна, наблюдаемые с Земли, возможны, когда эти планеты расположены вблизи одной прямой, проходящей через центр Солнца (1 балл). Очевидно, такая конфигурация будет повторяться через их синодический период (2 балла):

$$\frac{1}{T_J} - \frac{1}{T_S} = \frac{1}{S_{JS}}, \Rightarrow S_{JS} = \frac{T_J T_S}{T_S - T_J} = 19.86 \text{ лет.} \quad (9)$$

#### Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Опираясь на образ Луны, корректно определена конфигурация, в которой располагались планеты-гиганты в момент съемки	2
Явно указано на малость угла между направлениями на планеты-гиганты с точки зрения земного наблюдателя + получена корректная оценка для линейного расстояния между Юпитером и Сатурном	1+2
Получена корректная оценка углового расстояния между планетами-гигантами + явно аналитическое выражение для угловой скорости видимого движения планеты в квадратуре + вычислена угловая скорость относительно движения + получено угловое расстояние, которое должен пройти Юпитер до великого соединения + выполнена корректная оценка оставшегося времени до великого соединения + определена дата съемки. Погрешность итогового результата: $\pm 2$ сут	1+1+1+1+1+1
Получена корректная оценка промежутков времени, отделяющих момент съемки от момента пребывания (Юпитера+Сатурна) в восточной квадратуре + вычислены промежутки времени между противостояниями (Юпитера+Сатурна) и их восточной квадратурой + даты противостояний планет (Юпитера+Сатурна). Погрешность итогового результата: $\pm 5$ сут	(1+1)+(1+1)+(1+1)
Явно указано условие наблюдаемости великого соединения + определен промежуток времени, через который повторяются великие соединения планет-гигантов	1+2

#### № 3. «Одинокий "Властелин колец"»

Условие. Предположим, что в результате некоторого катастрофического события все классические планеты, кроме Сатурна, покинули Солнечную систему без использования источников энергии, расположенных вне Солнечной системы. Определите:

1. Радиус новой орбиты Сатурна + период его обращения вокруг Солнца. (6+2 балла)
2. В каком направлении при этом переместился центр масс системы «Солнце-Сатурн» по отношению к материнской звезде? Внутри или вне тела Солнца будет располагаться центр масс системы после катастрофы? (1+3 балла)
3. Во сколько раз в результате катастрофы изменится вероятность принципиальной возможности обнаружения Сатурна транзитным методом (в случае центрального транзита) с позиции гипотетического наблюдателя, расположенного вдали от Солнечной системы? (5 баллов)

4. Какова максимальная вероятность регистрации центрального транзита Сатурна по диску Солнца на новой орбите в данный момент времени наблюдателем, для которого выполняется условие принципиальной возможности его регистрации? (3 балла)

Орбиты всех планет считать круговыми. Межпланетными взаимодействиями следует пренебречь. Влиянием колец на явление транзита пренебречь.

**Решение. 1.** Поскольку все планеты Солнечной системы изначально двигались по круговым орбитам, то для каждой справедлив второй закон Ньютона (1 балл):

$$m_i \frac{V_i^2}{r_i} = \frac{G m_i \mathcal{M}_\odot}{r_i^2}, \Rightarrow \frac{V_i^2}{2} = \frac{G \mathcal{M}_\odot}{2r_i}, \text{ где } i = 1, \dots, 8, \quad (10)$$

здесь  $m_i, V_i, r_i$  – масса, скорость, радиус орбиты  $i$ -й классической планеты соответственно,  $\mathcal{M}_\odot$  – масса Солнца,  $G$  – универсальная гравитационная постоянная.

Полная механическая энергия  $i$ -й планеты есть (1 балл)

$$E_i = m_i \frac{V_i^2}{2} - \frac{G m_i \mathcal{M}_\odot}{r_i} = -\frac{G m_i \mathcal{M}_\odot}{2r_i}, \quad i = 1, \dots, 8. \quad (11)$$

Чтобы  $i$ -ая планета могла покинуть Солнечную систему, необходимо чтобы ее полная энергия была неотрицательной. Следовательно, в предельном случае, данная планета должна "забрать" у Сатурна энергию, равную

$$|E_i| = \frac{G m_i \mathcal{M}_\odot}{2r_i}. \quad (12)$$

Чтобы все классические планеты (кроме Сатурна) смогли покинуть Солнечную систему, необходимо чтобы Сатурн отдал энергию (1 балл):

$$\sum_{i=1}^7 |E_i| = \frac{G \mathcal{M}_\odot}{2} \sum_{i=1}^7 \frac{m_i}{r_i}. \quad (13)$$

Запишем закон сохранения полной механической энергии для планет (2 балла):

$$-\frac{G \mathcal{M}_\odot}{2} \sum_{i=1}^7 \frac{m_i}{r_i} - \frac{G m_{\text{h}} \mathcal{M}_\odot}{2r_{\text{h}}^{(0)}} = -\frac{G m_{\text{h}} \mathcal{M}_\odot}{2r_{\text{h}}},$$

здесь  $r_{\text{h}}^{(0)}, r_{\text{h}}$  – начальное и конечное значения радиуса орбиты Сатурна. В итоге радиус новой орбиты Сатурна (1 балл):

$$r_{\text{h}} = m_{\text{h}} \left( \sum_{i=1}^8 \frac{m_i}{r_i} \right)^{-1} = 1.273 \text{ а.е.} \quad (14)$$

Период обращения планеты-гиганта определим с помощью третьего закона Кеплера (2 балла):

$$\left( \frac{T_{\text{h}}}{T_{\text{h}}^{(0)}} \right)^2 = \left( \frac{r_{\text{h}}}{r_{\text{h}}^{(0)}} \right)^3, \Rightarrow T_{\text{h}} = T_{\text{h}}^{(0)} \left( \frac{r_{\text{h}}}{r_{\text{h}}^{(0)}} \right)^{3/2} = 1.436 \text{ года.} \quad (15)$$

2. Согласно определению, радиус-вектор центра масс системы "Солнце-Сатурн" в произвольной системе отсчета представляется в виде:

$$\vec{R}_c = \frac{\mathcal{M}_\odot \vec{r}_\odot + \mathcal{M}_{\text{h}} \vec{r}_{\text{h}}}{\mathcal{M}_\odot + \mathcal{M}_{\text{h}}}, \quad (16)$$

здесь  $\vec{r}_\odot, \vec{r}_{\text{h}}$  – радиусы-векторы Солнца и Сатурна в данной системе отсчета. Если данная система отсчета является гелиоцентрической, то гелиоцентрическое расстояние до центра масс будет (1 балл)

$$R_c = \frac{\mathcal{M}_{\text{h}} r_{\text{h}}}{\mathcal{M}_\odot + \mathcal{M}_{\text{h}}}. \quad (17)$$



Из последнего выражения следует, что с уменьшением гелиоцентрического расстояния до Сатурна уменьшается и гелиоцентрическое расстояние до центра масс, таким образом центр масс приближается к центру материнской звезды. (1 балл) С использованием (17), получаем значение  $R_c = 54414$  км. (1 балл) Последнее значение меньше радиуса Солнца, а значит центр масс системы "Солнце-Сатурн" расположено внутри тела Солнца. (1 балл)

**3. Центральным транзитом** планеты по диску материнской звезды называется транзит, при котором планета перемещается по диаметру видимого диска звезды (см. рис. 4). Вероятность данного события ( $P_c$ ) можно определить отношением телесного угла  $\Omega_c$ , отвечающего области на небесной сфере (если смотреть из центра звезды), из точек которой можно будет наблюдать указанный феномен к полному телесному углу всей сферы (равному  $4\pi$ ) (1 балл):

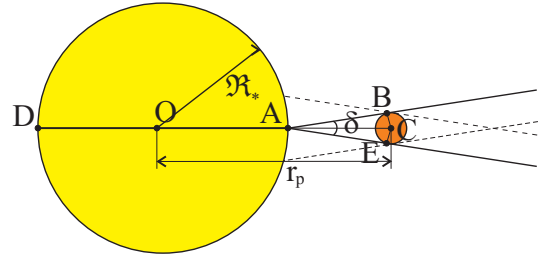


Рис. 4. К определению вероятности центрального транзита экзопланеты.

$$P_c = \frac{\Omega_c}{4\pi}. \quad (18)$$

Телесному углу  $\Omega_c$  на небесной сфере отвечает полоса (пояс), заключенная между прямыми АВ и АЕ и шириной  $\delta$ . Последний параметр определяется из треугольника  $\triangle ABC$ :

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{BC}{AC} = \frac{R_p}{r_p - R_*}, \Rightarrow \frac{\delta}{2} \approx \frac{R_p}{r_p}.$$

В последнем выражении учтено неравенство  $R_* \ll r_p$ . В итоге получаем выражение для  $\delta$  (1 балл):

$$\delta \approx 2 \frac{R_p}{r_p}. \quad (19)$$

Очевидно, телесный угол  $\Omega_c$  представляется в виде (1 балл):

$$\Omega_c = 2\pi\delta = 4\pi \frac{R_p}{r_p}. \quad (20)$$

Тогда вероятность принципиальной возможности обнаружения Сатурна транзитным методом (в случае центрального транзита) есть (1 балл)

$$P_c = \frac{\Omega_c}{4\pi} = \frac{R_p}{r_p}. \quad (21)$$

Из последнего результата следует, что искомая вероятность обратно пропорциональна радиусу орбиты планеты. Значит вероятность в результате катастрофы изменится в  $\eta = P_c/P_c^{(0)} = r_{\text{h}}^{(0)}/r_{\text{h}} = 7.5$  раз! (1 балл)

**4.** Для определения вероятности детектирования феномена центрального транзита экзопланеты по диску материнской звезды в данный момент времени учтем, что время транзита планеты можно представить в виде (1 балл):

$$\tau_p = \frac{T_p}{2\pi} 2 \arcsin \left( \frac{R_*}{r_p} \right), \quad (22)$$

здесь  $T_p$  – сидерический период обращения планеты. Данный транзит обязательно должен произойти в течение временного интервала  $(0, T_p)$ . Следовательно, вероятность того, что наблюдатель в данный момент времени увидит транзит экзопланеты есть (1+1 балл)

$$P_p = \frac{\tau_p}{T_p} = \frac{1}{\pi} \arcsin \left( \frac{R_*}{r_p} \right) = \frac{1}{\pi} \arcsin \left( \frac{R_{\odot}}{r_{\text{h}}} \right) = 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ или } 0.12\%. \quad (23)$$

*Рекомендации для жюри.*

Выполненная часть решения задачи	Балл
Получено выражение для квадрата орбитальной скорости планеты с использованием второго закона Ньютона + вычислена полная механическая энергия планеты на круговой орбите + определена полная энергия, которую Сатурн должен отдать планетам для их выхода из Солнечной системы + использован явно закон сохранения энергии для системы + получено аналитическое выражение для радиуса новой орбиты Сатурна + с использованием третьего закона Кеплера получен сидерический период обращения Сатурна	1+1+1+2 +1 +2
Получено скалярное выражение для гелиоцентрического расстояния до центра масс системы "Солнце-Сатурн" + правильно определена тенденция изменения положения центра масс + вычислено расстояние от центра Солнца до центра масс системы + явно указано на то, что центр масс лежит в теле Солнца	1+1+1+1
Записано общее аналитическое выражение для вероятности центрального транзита + корректно вычислена угловая ширина пояса транзита + получено явное аналитическое выражение для телесного угла пояса транзита + итоговое выражение для искомой вероятности + получена искомая величина кратности увеличения вероятности детектирования	1+1+1+1+1
Представлено явное аналитическое выражение для времени транзита + для вероятности детектирования транзита в данный момент + получено корректное численное значение	1+1+1

**№ 4. «Эволюция системы "Земля-Луна"»**

**Условие.** В результате многолетних исследований океанических приливов на поверхности Земли было установлено, что Луна удаляется от Земли, при этом все вращательные движения данных тел замедляются, а в будущем будут полностью синхронизированы в результате приливного взаимодействия данных тел, т. е. будут определяться лишь одним периодом. Оцените:

1. Продолжительность звездных суток на Земле после синхронизации всех вращательных движений. Следует полагать, что оси всех вращательных движений данных тел сонаправлены в пространстве. (8 баллов)

2. Чему будет равен радиус круговой орбиты Луны относительно Земли после синхронизации их вращательных движений? (1 балл)

3. Максимальную продолжительность полной фазы центрального теневого лунного затмения в процессе отдаления Луны от Земли, если известно, что этот момент должен наступить до синхронизации системы «Земля-Луна»? (3 балла) Чему при этом равны радиус орбиты Луны и период ее обращения вокруг Земли? (1+2 балла)

4. Максимальную продолжительность всех фаз центрального теневого лунного затмения (от момента начала погружения в тень Земли и до момента окончания выхода из нее) в процессе отдаления Луны от Земли, если известно, что этот момент должен наступить до синхронизации системы «Земля-Луна»? (2 балла) Чему при этом будут равны радиус орбиты Луны и период ее обращения вокруг Земли? (1+2 балла)

**Решение.** 1. Система "Земля-Луна" является замкнутой, а приливные силы являются внутренними, следовательно в процессе эволюции данной системы должен сохраняться суммарный момент импульса. Последний может быть представлен в виде суммы 4-х слагаемых: первое слагаемое  $L_1^{(s)}$  обусловлено вращением Земли вокруг своей оси, второе слагаемое  $L_2^{(s)}$  обусловлено вращением Луны вокруг своей оси, третье  $L_1^{(r)}$  и четвертое  $L_2^{(r)}$  слагаемые обусловлены обращением данных тел вокруг их общего центра масс. Поскольку оси всех вращательных движений сонаправлены, а направление всех вращательных движений совпадают, то можно записать модуль полного момента импульса в скалярном виде (1 балл):

$$L_{\text{tot}} = L_1^{(s)} + L_2^{(s)} + L_1^{(r)} + L_2^{(r)}.$$



Каждое из слагаемых представляется в явном виде (1 балл):

$$L_i^{(s)} = \mathcal{I}_i \cdot \omega_i, \text{ где } \mathcal{I}_i = \frac{2}{5} \mathfrak{M}_i \mathfrak{R}_i^2, \omega_i = \frac{2\pi}{P_i}, L_i^{(r)} = \mathfrak{M}_i r_i^2 \cdot \Omega, \Omega = \frac{2\pi}{T}, i = \{\oplus, \zeta\},$$

здесь  $\mathcal{I}_i$  – момент инерции  $i$ -го тела-шара,  $\mathfrak{M}_i, \mathfrak{R}_i, \omega_i, P_i, r_i$  – его масса, радиус, угловая скорость, период суточного вращения и радиус круговой орбиты соответственно;  $\Omega, T$  – угловая скорость и период обращения тел вокруг общего центра масс. В итоге в настоящий момент полный момент системы  $L_{\text{tot}}^{(0)}$  представляется в виде (0.5 балла):

$$L_{\text{tot}}^{(0)} = \frac{2}{5} \mathfrak{M}_{\oplus} \mathfrak{R}_{\oplus}^2 \frac{2\pi}{P_{\oplus}} + \frac{2}{5} \mathfrak{M}_{\zeta} \mathfrak{R}_{\zeta}^2 \frac{2\pi}{P_{\zeta}} + (\mathfrak{M}_{\oplus} r_{\oplus}^2 + \mathfrak{M}_{\zeta} r_{\zeta}^2) \frac{2\pi}{T}.$$

После синхронизации вращательных движений (0.5 балла):

$$L_{\text{tot}}^{(f)} = \left( \frac{2}{5} \mathfrak{M}_{\oplus} \mathfrak{R}_{\oplus}^2 + \frac{2}{5} \mathfrak{M}_{\zeta} \mathfrak{R}_{\zeta}^2 + (\mathfrak{M}_{\oplus} r_{\oplus}'^2 + \mathfrak{M}_{\zeta} r_{\zeta}'^2) \right) \frac{2\pi}{T'}.$$

Сохранение момента импульса системы в итоге представляется так:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} \mathfrak{M}_{\oplus} \mathfrak{R}_{\oplus}^2 \frac{2\pi}{P_{\oplus}} + \frac{2}{5} \mathfrak{M}_{\zeta} \mathfrak{R}_{\zeta}^2 \frac{2\pi}{P_{\zeta}} + (\mathfrak{M}_{\oplus} r_{\oplus}^2 + \mathfrak{M}_{\zeta} r_{\zeta}^2) \frac{2\pi}{T} = \\ = \left( \frac{2}{5} \mathfrak{M}_{\oplus} \mathfrak{R}_{\oplus}^2 + \frac{2}{5} \mathfrak{M}_{\zeta} \mathfrak{R}_{\zeta}^2 + (\mathfrak{M}_{\oplus} r_{\oplus}'^2 + \mathfrak{M}_{\zeta} r_{\zeta}'^2) \right) \frac{2\pi}{T'}. \end{aligned}$$

Заметим, что уже сегодня  $P_{\zeta} = T$ . Кроме того, радиус орбиты Луны  $r$  относительно центра Земли и радиус-вектор  $R_c$  центра масс данных тел относительно данной точки в проекциях на направление "Земля-Луна" можно представить в терминах радиусов орбит ( $r_{\oplus}, r_{\zeta}$ ) данных тел относительно центра масс (1 балл):

$$r = r_{\oplus} + r_{\zeta}, R_c = \frac{\mathfrak{M}_{\zeta} r_{\zeta} - \mathfrak{M}_{\oplus} r_{\oplus}}{\mathfrak{M}_{\oplus} + \mathfrak{M}_{\zeta}} = 0, \Rightarrow r_{\oplus} = \frac{\mathfrak{M}_{\zeta} r}{\mathfrak{M}_{\oplus} + \mathfrak{M}_{\zeta}}, r_{\zeta} = \frac{\mathfrak{M}_{\oplus} r}{\mathfrak{M}_{\oplus} + \mathfrak{M}_{\zeta}}.$$

Тогда

$$(\mathfrak{M}_{\oplus} r_{\oplus}^2 + \mathfrak{M}_{\zeta} r_{\zeta}^2) = \frac{\mathfrak{M}_{\oplus} \mathfrak{M}_{\zeta}}{\mathfrak{M}_{\oplus} + \mathfrak{M}_{\zeta}} r^2 = \mu r^2, \text{ где } \mu = \frac{\mathfrak{M}_{\oplus} \mathfrak{M}_{\zeta}}{\mathfrak{M}_{\oplus} + \mathfrak{M}_{\zeta}}.$$

В итоге закон сохранения можно переписать так (1 балл)

$$\left[ \frac{2}{5} \left( \mathfrak{M}_{\oplus} \mathfrak{R}_{\oplus}^2 \frac{T}{P_{\oplus}} + \mathfrak{M}_{\zeta} \mathfrak{R}_{\zeta}^2 \right) + \mu r^2 \right] x = \frac{2}{5} (\mathfrak{M}_{\oplus} \mathfrak{R}_{\oplus}^2 + \mathfrak{M}_{\zeta} \mathfrak{R}_{\zeta}^2) + \mu r'^2, \text{ где } x = \frac{T'}{T}. \quad (24)$$

Вспользуемся далее 3-м законом Кеплера для данной пары тел (1 балл):

$$\left( \frac{r}{r'} \right)^3 = \left( \frac{T}{T'} \right)^2, \Rightarrow r'^2 = r^2 \left( \frac{T'}{T} \right)^{4/3}, \Rightarrow r'^2 = r^2 x^{4/3}. \quad (25)$$

Из уравнений (24) и (25) получаем в итоге трансцендентное уравнение вида (1 балл):

$$\left[ \frac{2}{5} \left( \mathfrak{M}_{\oplus} \mathfrak{R}_{\oplus}^2 \frac{T}{P_{\oplus}} + \mathfrak{M}_{\zeta} \mathfrak{R}_{\zeta}^2 \right) + \mu r^2 \right] x = \frac{2}{5} (\mathfrak{M}_{\oplus} \mathfrak{R}_{\oplus}^2 + \mathfrak{M}_{\zeta} \mathfrak{R}_{\zeta}^2) + \mu r^2 x^{4/3}.$$

Последнее уравнение удобнее переписать в виде равенства двух функций по переменной  $x$ :

$$f(x) = g(x), \text{ где } f(x) = Ax + B, g(x) = Cx^{4/3}, \quad (26)$$

$$A = \left[ \frac{2}{5} \left( \mathfrak{M}_{\oplus} \mathfrak{R}_{\oplus}^2 \frac{T}{P_{\oplus}} + \mathfrak{M}_{\zeta} \mathfrak{R}_{\zeta}^2 \right) + \mu r^2 \right], B = -\frac{2}{5} (\mathfrak{M}_{\oplus} \mathfrak{R}_{\oplus}^2 + \mathfrak{M}_{\zeta} \mathfrak{R}_{\zeta}^2), C = \mu r^2. \quad (27)$$

Последнее уравнение удобнее решить графическим или численными методами. На рис. 5.а)

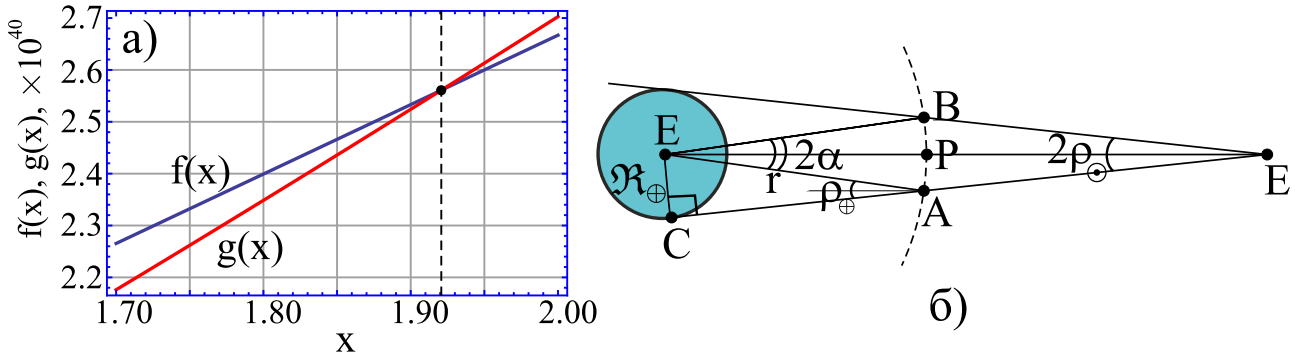


Рис. 5. К определению: а) корня трансцендентного уравнения  $f(x) = g(x)$ ; б) соотношения угловых размеров небесных тел и области тени.

представлены кривые зависимостей  $f(x)$  и  $g(x)$ . Здесь точке их пересечения отвечает значение  $x = 1.921$ , что соответствует значению  $T' = xT = 52.48$  сут. (1 балл)

2. С использованием вновь 3-го закона Кеплера (25), получаем радиус круговой орбиты Луны относительно Земли после синхронизации их вращательных движений:  $r' = 594020$  км. (1 балл)

3. Предположим, что текущее значение радиуса орбиты Луны равно  $r$ . Из рис. 5.б) нетрудно видеть, что выполняется следующее соотношение между угловым радиусом Земли  $\rho_{\oplus} = \mathfrak{R}_{\oplus}/r$ , угловым размером дуги  $2\alpha_0$  текущей орбиты Луны в земной тени и угловым радиусом Солнца  $\rho_{\odot} = \mathfrak{R}_{\odot}/a_{\oplus}$  (1 балл):

$$\rho_{\oplus} = \alpha + \rho_{\odot}, \text{ или } \alpha_0 = \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{r} - \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_{\oplus}}.$$

Продолжительности полной фазы лунного затмения будет отвечать угол (1 балл):

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{\mathfrak{R}_{\zeta}}{r} = \frac{\mathfrak{R}_{\oplus} - \mathfrak{R}_{\zeta}}{r} - \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_{\oplus}}.$$

Продолжительность полной фазы центрального лунного затмения представляется в виде (1 балл):

$$\tau_1 = \frac{2\alpha_1}{\omega_{\zeta}} = \frac{2}{\sqrt{G\mathfrak{M}_{\oplus}}} \left( (\mathfrak{R}_{\oplus} - \mathfrak{R}_{\zeta})r^{1/2} - \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_{\oplus}}r^{3/2} \right), \quad \omega_{\zeta} = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_{\oplus}}{r^3}}, \quad (28)$$

здесь  $\omega_{\zeta}$  – геоцентрическая угловая скорость Луны на орбите. Взяв производную от функции  $\tau_1(r)$  по переменной  $r$  и приравнявая ее к нулю, находим экстремум данной функции (легко проверить что это максимум) (1 балл):

$$r_{\max}^{(1)} = \frac{a_{\oplus}(\mathfrak{R}_{\oplus} - \mathfrak{R}_{\zeta})}{3\mathfrak{R}_{\odot}} = 332120 \text{ км.} \quad (29)$$

При этом продолжительность полной фазы составляла  $\tau_1(r_{\max}^{(1)}) = 1.566$  час или 1 час 34 мин. С использованием 3-го закона Кеплера определяем период обращения Луны вокруг Земли на этот момент (2 балл):

$$T_{\max}^{(1)} = T_{\zeta} \left( \frac{r_{\max}^{(1)}}{r} \right)^{3/2} = 21.95 \text{ сут.} \quad (30)$$

4. Продолжительности всех фаз (от момента начала погружения в тень Земли и до момента окончания выхода из нее) центрального теневого лунного затмения будет отвечать угол (1 балл):

$$\alpha_2 = \alpha_0 + \frac{\mathfrak{R}_{\zeta}}{r} = \frac{\mathfrak{R}_{\oplus} + \mathfrak{R}_{\zeta}}{r} - \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_{\oplus}}.$$

Продолжительность всех фаз центрального теневого лунного затмения представляется в виде (1 балл):

$$\tau_2 = \frac{2\alpha_2}{\omega_{\zeta}} = \frac{2}{\sqrt{G\mathfrak{M}_{\oplus}}} \left( (\mathfrak{R}_{\oplus} + \mathfrak{R}_{\zeta})r^{1/2} - \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_{\oplus}}r^{3/2} \right). \quad (31)$$

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, в результате получаем искомый радиус лунной орбиты (1 балл):

$$r_{\max}^{(2)} = \frac{a_{\oplus} (\mathfrak{R}_{\oplus} + \mathfrak{R}_{\zeta})}{3 \mathfrak{R}_{\odot}} = 581400 \text{ км.} \quad (32)$$

При этом максимальная продолжительность будет составлять  $\tau_2(r_{\max}^{(2)}) = 3.627$  часа или 3 часа 38 мин. Соответствующее значение периода обращения Луны будет (2 балла):

$$T_{\max}^{(2)} = T_{\zeta} \left( \frac{r_{\max}^{(2)}}{r} \right)^{3/2} = 50.82 \text{ сут.} \quad (33)$$

### Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Определен полный момент импульса (МИ) системы "Земля-Луна" + представлено явно аналитическое выражение для каждого слагаемого + записан полный МИ системы до + после синхронизации + выполнена редукция полученного уравнения с использованием радиуса $r$ орбиты Луны и приведенной массы $\mu$ + получен редуцированный закон сохранения МИ + использован 3-ий закон Кеплера + получено трансцендентное уравнение + получено численное решение этого уравнения	1+1+1+1+ 1+1+1+1
С использованием 3-го закона Кеплера вычислен радиус орбиты Луны относительно Земли после синхронизации	1
Получена угловая ширина тени в терминах углового радиуса Земли и Солнца + определена половина длины дуги части орбиты, которая соответствует полной фазе + представлено явно аналитическое выражение для продолжительности полной фазы + решена задача на экстремум и найден максимум этой функции и найден соответствующий ему радиус орбиты Луны + период ее обращения	1+1+1+1+2
Определена половина длины дуги части орбиты, которая соответствует всем фазам теневого затмения + представлено явно аналитическое выражение для продолжительности всех фаз + решена задача на экстремум и найден максимум этой функции и найден соответствующий ему радиус орбиты Луны + период ее обращения	1+1+1+2

### № 5. «Три звезды в день проведения Олимпиады»

**Условие.** В день проведения заключительного тура Олимпиады им. Ф. А. Бредихина в некоторой точке северного полушария Земли произошло ряд небесных феноменов с тремя звездами, именуемыми далее условно «1», «2», «3». Известно, что

а) в момент верхней кульминации азимут звезды «1» плавно уменьшался без скачков, азимут звезды «2» претерпел скачок  $\Delta A_2 = -180^\circ$ , а азимут третьей испытал скачок величиной  $\Delta A_3 = -360^\circ$ . При этом звезды «1» и «3» в данной кульминации находились на одном альмукантарате;

б) время прямой видимости звезды «2» составило  $\Delta t_2 = 15^{\text{h}}57.4^{\text{m}}$ , а отношение телесных углов, соответствующих шаровым сегментам, которые своими основаниями опираются на суточные параллели звезд «1» и «3» и содержат северный полюс мира (вершины углов расположены в центре небесной сферы), составляет  $\gamma = 0.25$ ;

в) верхняя кульминация звезды «1» произошла в момент начала ( $T_S^{(1)} = 10^{\text{h}}00^{\text{m}}$ ) финала настоящей Олимпиады по Самарскому времени ( $T_S = T_0 + 4^{\text{h}}$ , здесь  $T_0$  – всемирное время), а звезды «3» – в момент ее окончания –  $T_S^{(3)} = 14^{\text{h}}00^{\text{m}}$ . Звезда «2» кульминировала в местный истинный полдень. Долгота Самары –  $\lambda_S = 3^{\text{h}}20^{\text{m}}$ . При этом разница между местным средним солнечным временем точки наблюдения и самарским временем составляет  $\Delta T = \lambda_S$ .

С использованием данных, представленных в условии задачи и в разделе "справочные данные", определите экваториальные координаты (прямое восхождение и склонение) звезд «1», «2»,

«3», географические координаты (широта и долгота) точки наблюдения и государство (с использованием политической карты мира, см. рис. 6), на территории которого находилась рассматриваемая точка поверхности Земли. (20 баллов)

**Решение. 1.** Если в верхней кульминации азимут звезды «1» изменялся плавно, без скачков это означает, что звезда кульминировала к северу от зенита ( $Z$ ), при этом ее склонение больше широты местности, т. е.  $\delta_1 > \varphi$ . (1 балл) Если в верхней кульминации азимут звезды «2» претерпел скачок  $\Delta A_2 = -180^\circ$ , это означает, что эта звезда кульминировала в зените ( $Z$ ), при этом ее склонение равно широте местности:  $\delta_2 = \varphi$ . (1 балл) Если в верхней кульминации азимут звезды «3» претерпел скачок  $\Delta A_3 = -360^\circ$  это означает, что звезда кульминировала к югу от зенита ( $Z$ ), при этом ее склонение меньше широты местности, т. е.  $\delta_3 < \varphi$ . (1 балл)

Если звезды «1» и «3» в моменты их верхних кульминаций наблюдались на одном альмукантарате, это означает что их высоты в этот момент были равны, т. е. (1 балл)

$$90^\circ + \varphi - \delta_1 = 90^\circ - \varphi + \delta_3, \Rightarrow 2\varphi = \delta_1 + \delta_3. \quad (34)$$

**2.** Рассмотрим суточное движение звезды «2» по небосводу (см. рис. 7) вдоль суточной параллели  $R_*C_uS_*C_d$ , для наблюдателя, находящегося в северном географическом полушарии, на широте  $\varphi$  ( $\varphi > 0$ ).

Звезда восходит над горизонтом в точке  $R_*$ , поднимается выше и кульминировать в точке  $C_u$ , затем опускается и заходит за горизонт в точке  $S_*$ . Далее ее суточное движение по небосводу продолжается по дуге  $S_*C_dR_*$ , скрытой от глаз наблюдателя, находящегося в точке  $O$  – центре небесной сферы. Определим угловую меру  $\ell$  дуги  $R_*C_uS_*$ . Из рисунка видно, дугу можно представить в виде:

$$\ell = 360^\circ - 2\beta, \quad (35)$$

где  $\beta$  – угол прямоугольного треугольника  $\Delta AR_*B$ . Последний можно определить следующей формулой:

$$\cos \beta = \frac{AB}{R_*B} = \frac{OB \operatorname{ctg} \angle BAO}{r},$$

здесь  $r = R_*B = BC_u$  – радиус суточной параллели звезды, который можно легко определить из  $\Delta OC_uB$ :

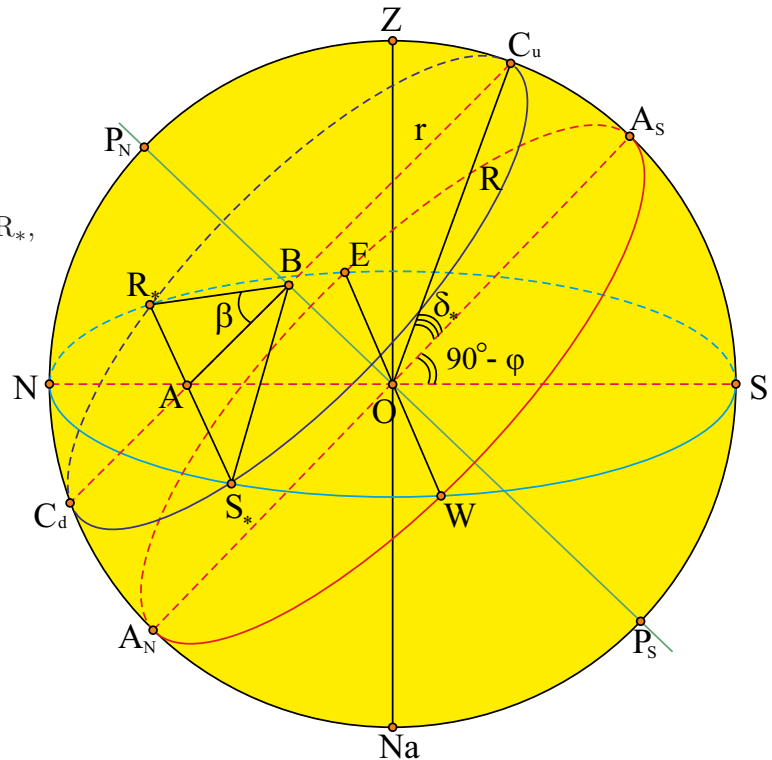


Рис. 7. К определению части дуги суточной параллели звезды, соответствующей ее видимому движению над горизонтом.

$$r = R \cos \delta_*, \quad (36)$$

здесь  $R$  – радиус небесной сферы,  $\delta_*$  – склонение звезды ( $\delta_* = \delta_2$ ).  $OB$  можно выразить из того же треугольника

$$OB = R \sin \delta_*.$$

Из рис. 7 нетрудно видеть, что  $\angle BAO = \angle A_s OS = 90^\circ - \varphi$ . В итоге  $\cos \beta$  можно представить в виде (1 балл):

$$\cos \beta = \operatorname{tg} \delta_* \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad \text{при } |\delta_*| < 90^\circ - |\varphi|. \quad (37)$$

Из выражений (35), (37), с учетом равенства  $\delta_2 = \varphi$ , следует, что

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = -\cos \frac{\ell}{2}. \quad (38)$$



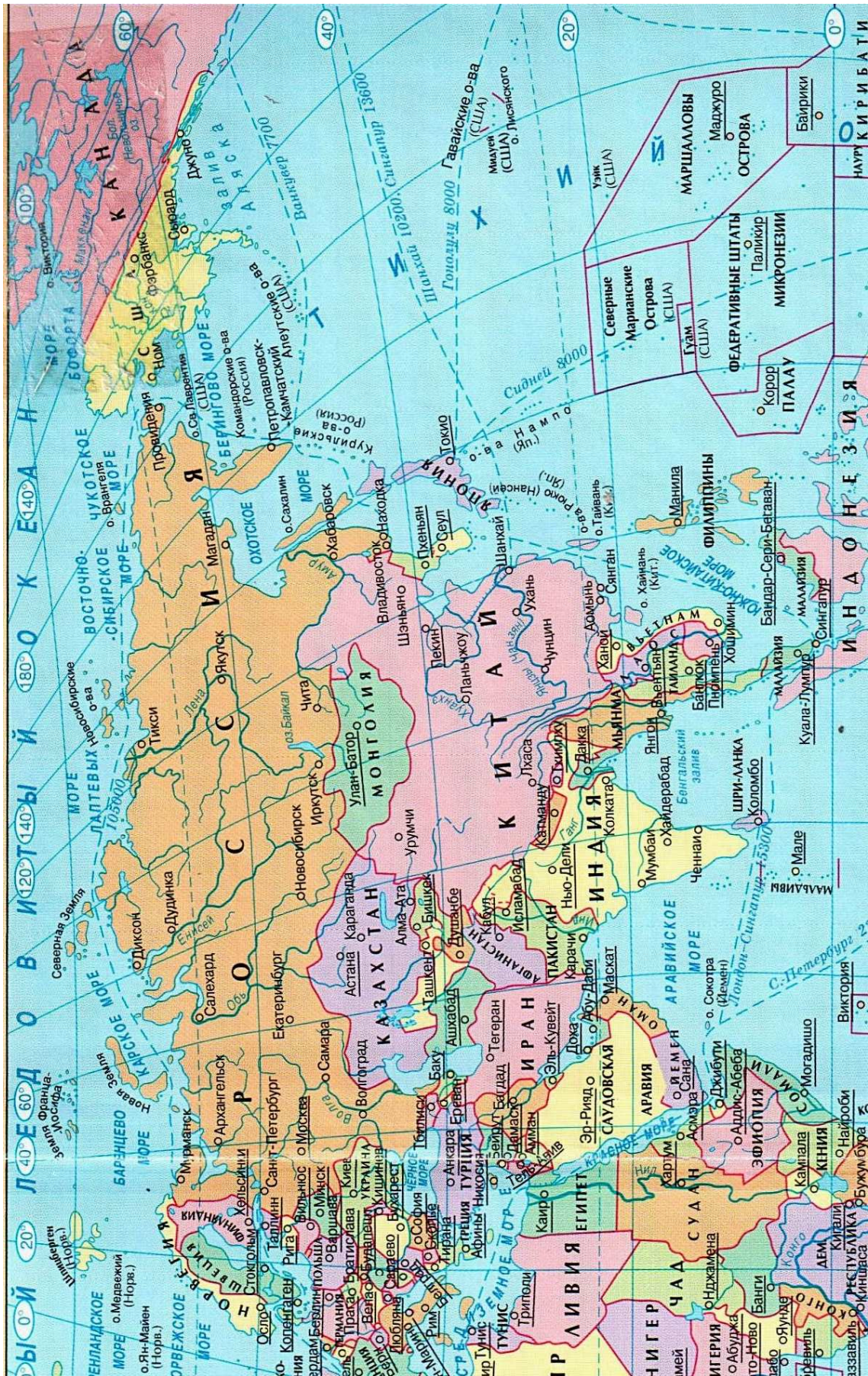


Рис. 6. Фрагмент политической карты мира.

Дугу  $\ell$  можно представить иначе:  $\ell = \frac{360^\circ}{P_\oplus} \Delta t_2 = 240^\circ$ , здесь  $P_\oplus$  – звездные сутки Земли. В итоге



Экв. коорд.	Звезда «1»	Звезда «2»	Звезда «3»	Гео. коорд.	Точка набл-ия
$\alpha$	$23^{\text{h}}26^{\text{m}}$	$2^{\text{h}}06^{\text{m}}$	$3^{\text{h}}26^{\text{m}}$	$\varphi$	$35^{\circ}16'$
$\delta$	$54^{\circ}50'$	$35^{\circ}16'$	$15^{\circ}42'$	$\lambda$	$110^{\circ}00'$ в.д.

Таблица 2. К определению искомым величин.

широта местности и склонение звезды «2» есть (1+1 балл)

$$\varphi = \delta_2 = \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 35.26^{\circ} = 35^{\circ}16'. \quad (39)$$

3. Телесный угол, соответствующий шаровому сегменту, основание которого опираются на суточную параллель звезды  $R_*C_uS_*C_d$  (см. рис. 7), содержащему северный полюс мира, можно представить в виде (1 балл):

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos p_*) = 2\pi(1 - \sin \delta_*),$$

здесь  $p_* = \angle C_uOP_N$  – полярное расстояние звезды, которое может быть выражено через ее склонение посредством формулы:  $p_* = 90^{\circ} - \delta_*$ . Значит отношение телесных углов, соответствующих шаровым сегментам, которые своими основаниями опираются на суточные параллели звезд «1» и «3» можно записать так (1 балл)

$$\gamma = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{1 - \sin \delta_1}{1 - \sin \delta_3}, \quad 1 - \sin \delta_1 = \gamma(1 - \sin(2\varphi - \delta_1)). \quad (40)$$

Решая последнее тригонометрическое уравнение, в результате получаем значение  $\delta_1 = 54.84^{\circ} = 54^{\circ}50'$  (2 балла). Согласно (34),  $\delta_3 = 2\varphi - \delta_1 = 15.68^{\circ} = 15^{\circ}42'$ . (1 балл)

4. Согласно условию задачи,  $T_S = T_0 + 4^{\text{h}}$ , с другой стороны, местное время Самары можно записать  $T_m^{(S)} = T_0 + \lambda_S$ . Откуда следует (1 балл)

$$T_m^{(S)} = T_S - 4^{\text{h}} + \lambda_S.$$

С другой стороны, звездное время связано с  $T_m^{(S)}$  соотношением вида (1 балл):

$$s = s_0 + kT_m^{(S)}, \quad \text{где } k = 1.002739,$$

здесь  $s_0$  – звездное время на начало местных среднесолнечных суток. Учитывая, что 21 апреля отстоит от дня равноденствия (20 марта 2024 года) на 32 суток, то прямое восхождение Солнца в полдень дня проведения финала Олимпиады должно быть  $\alpha_{\odot} = 32 \cdot 3^{\text{m}}56^{\text{s}} = 2^{\text{h}}06^{\text{m}}$ . (1 балл) Тогда звездное время в местную среднюю полночь 21 апреля:  $s_0 = 2^{\text{h}}06^{\text{m}} + 12^{\text{h}} - 2^{\text{m}} = 14^{\text{h}}04^{\text{m}}$ .

Как известно, прямое восхождение светила, находящегося в верхней кульминации, равно звездному времени в этот момент. Тогда (1+1 балл)

$$\alpha_1 = s_0 + k(T_S^{(1)} - 4^{\text{h}} + \lambda_S) = 23^{\text{h}}26^{\text{m}}, \quad \alpha_3 = s_0 + k(T_S^{(2)} - 4^{\text{h}} + \lambda_S) = 3^{\text{h}}26^{\text{m}}. \quad (41)$$

Звезда «2» кульминировала в местный истинный полдень. Следовательно ее прямое восхождение равно прямому восхождению Солнца в тот же момент (1 балл):  $\alpha_2 = \alpha_{\odot} = 2^{\text{h}}06^{\text{m}}$ .

5. Согласно условию задачи, разница между местным средним солнечным временем точки наблюдения и самарским временем составляет  $\Delta T = \lambda_S$ , которую можно представить в виде (1 балл):

$$\Delta T = T_m - T_S = T_0 + \lambda - T_0 - 4^{\text{h}}, \quad \Rightarrow \quad \lambda = 4^{\text{h}} + \lambda_S = 7^{\text{h}}20^{\text{m}} = 110^{\circ}00' \text{ в.д.} \quad (42)$$

Таким образом, имеем следующие значения экваториальных координат трех звезд и географические координаты точки наблюдения.

Сводка полученных результатов представлена в табл. 2. С использованием политической карты мира и полученных значений географических координат легко установить, что точка наблюдения находилась в Китае (1 балл).



*Рекомендации для жюри.*

Выполненная часть решения задачи	Балл
Явно указано на положение звезды «1»+«2»+«3» на небесном меридиане в момент кульминации по отношению к зениту и установлена связь между широтой и склонением звезды «2»	1 + 1 + 1
Установлена связь между широтой местности и склонениями звезд «1» и «3» + получено корректное выражение для вспомогательного угла $\beta$ + вычислены широта + склонение звезды «2»	1+1+1+1
Представлено явно аналитическое выражение для телесного угла шарового сегмента в терминах склонения звезды + получено тригонометрическое уравнение относительно склонения звезды «1» + получено его решение + получено корректное значение склонения звезды «3»	1+1+2+1
Представлена формула связи среднего самарского и зонного самарского времени + формула связи среднего и звездного времени + вычислены значения прямого восхождения Солнца + звезд «1»+«2»+«3» + определена долгота места наблюдения + явно указано искомое государство	1+1+1+1+ 1+1+1+1

**№ 6. «Двойное Солнце, Экзо-Земля и зона обитаемости»**

**Условие 1.** Исследователи космоса обнаружили экзопланету, подобную Земле, движущуюся вокруг двойной звезды по орбите, близкой к круговой, на среднем расстоянии  $r$  (причем  $\mathfrak{R}_{\odot} \ll r$ , где  $\mathfrak{R}_{\odot}$  – радиус Солнца) от центра масс этой пары. Компоненты двойной звезды – близнецы, подобные Солнцу, имеющие форму шара, движущиеся по одной круговой орбите с минимальным возможным периодом, не испытывая слияния. Орбиты всех рассматриваемых тел лежат в одной плоскости. Определите:

1. Радиус орбиты + период обращения одного из компонентов двойной звезды. (1+2 балла)
2. Период обращения экзопланеты вокруг центра масс двойной системы и ее среднюю орбитальную скорость в терминах параметра  $r$ . (2+1 балл)
3. Минимальное ( $f_{\min}$ ) + максимальное ( $f_{\max}$ ) значения солнечной постоянной на орбите экзопланеты. Изменением расстояния  $r$  пренебречь. (2+2 балла)
4. Определите закон изменения фазы двойной звезды, определяемой формулой вида:

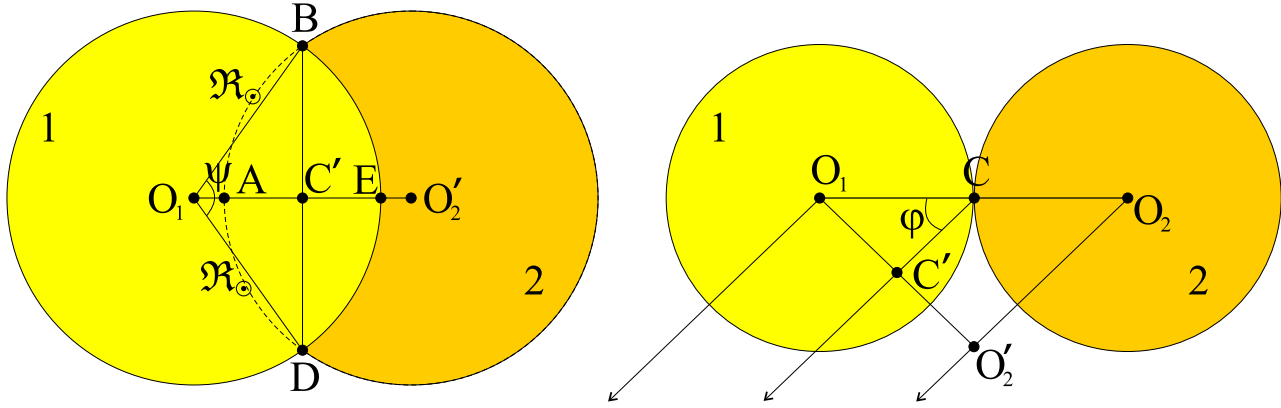
$$\Phi_{WS} = \frac{S_{\text{vis}}}{S_{\text{max}}}, \quad (43)$$

обусловленной затмением одного компонента другим как функции угла  $\varphi$  между отрезком, соединяющим центры данных звезд, и радиусом орбиты экзопланеты, проведенным от центра масс двойной системы к экзопланете. В формуле (43)  $S_{\text{vis}}$  – площадь видимых дисков двух звезд с позиции наблюдателя, расположенного на экзопланете,  $S_{\text{max}}$  – максимальная площадь видимых дисков звезд, доступная наблюдениям с той же позиции. (4 балла)

**Условие 2.** В астрофизике под *зоной обитания* традиционно понимается область пространства около звезды (в виде сферического слоя), внутри которой вода может постоянно находиться в жидкой фазе. Предполагается возможность существования внеземных форм жизни, подобных земным, при давлениях, близких к 1 атм, и диапазоне температур  $T_{\min} = 273.16$  К,  $T_{\max} = 373.15$  К воды в жидкой фазе.

5. Определите радиусы нижней и верхней границ зоны обитаемости для экзопланеты, пребывающей в электромагнитном излучении двойной звезды, если средняя температура поверхности Земли равна  $\bar{T}_{\oplus} = 288$  К. Определите возможные значения продолжительности года для экзопланеты, если последняя располагается внутри зоны обитаемости. Все характеристики экзопланеты тождественны характеристикам Земли, малыми колебаниями величины  $r$  пренебречь. (6 баллов)

**Решение. 1.** Если звезды данной пары – близнецы, подобные Солнцу, движущиеся по одной круговой орбите с минимальным возможным периодом, не испытывая слияния, значит радиус их орбиты равен радиусу каждого из тел, т. е.  $a_* = \mathfrak{R}_{\odot}$ . Действительно, чем меньше расстояние



а) Вид на двойную звезду с поверхности экзопланеты

б) Вид на двойную звезду с северного полюса экзопланеты

Рис. 8. К определению фазы двойной звезды с позиции наблюдателя, расположенного на экзопланете.

между телами, тем меньше их период обращения, с другой стороны, эти звезды не испытывают слияния, значит они могут лишь касаться друг друга, при этом точка их соприкосновения есть центр масс этой пары. (1 балл)

С использованием третьего обобщенного закона Кеплера вычислим период  $T_*$  обращения такой пары относительно центра масс (2 балла):

$$\frac{(\mathcal{M}_\odot + \mathcal{M}_\oplus)T_*^2}{(\mathcal{M}_\odot + \mathcal{M}_\oplus)T_\oplus^2} = \frac{(2a_*)^3}{a_\oplus^3}, \Rightarrow T_* = 2T_\oplus \left( \frac{\mathcal{R}_\odot}{a_\oplus} \right)^{3/2} = 0.232 \text{ сут} = 5.56 \text{ часа}, \quad (44)$$

здесь  $\mathcal{M}_\odot, \mathcal{M}_\oplus$  – масса Солнца и Земли соответственно,  $T_\oplus, a_\oplus$  – звездный год и радиус орбиты Земли.

2. Согласно условию  $\mathcal{R}_\odot \ll r$ , значит данную тесную двойную систему звезд на масштабах  $r$  можно рассматривать как одну материальную точку, следовательно к паре "двойная звезда-экзопланета" можно вновь применить 3-й закон Кеплера (2 балла):

$$\frac{(2\mathcal{M}_\odot + \mathcal{M}_\oplus)T_p^2}{(\mathcal{M}_\odot + \mathcal{M}_\oplus)T_\oplus^2} = \frac{r^3}{a_\oplus^3}, \Rightarrow T_p = \frac{\sqrt{2}}{2} T_\oplus \left( \frac{r}{a_\oplus} \right)^{3/2}. \quad (45)$$

Поскольку орбита экзопланеты близка круговой, то орбитальную скорость можно определить выражением вида (1 балл):

$$V_p = \frac{2\pi r}{T_p} = \sqrt{2} \frac{2\pi a_\oplus}{T_\oplus} \sqrt{\frac{a_\oplus}{r}} = \sqrt{2} V_\oplus \sqrt{\frac{a_\oplus}{r}}, \text{ где } V_\oplus = \frac{2\pi a_\oplus}{T_\oplus}, \quad (46)$$

здесь  $V_\oplus$  – средняя орбитальная скорость Земли.

3. Очевидно, солнечная постоянная будет: 1) минимальной, в случае когда одна компонента двойной звезды полностью закрывает другую для наблюдателя, находящегося у поверхности экзопланеты, (1 балл) 2) максимальной, когда оба компонента располагается на прямой, перпендикулярной направлению на экзопланету. (1 балл) Данные величины солнечной постоянной можно представить в виде (1+1 балл):

$$f_{\min} = \frac{L_\odot}{4\pi (r - \mathcal{R}_\odot)^2}, \quad f_{\max} = \frac{2L_\odot}{4\pi (r^2 + \mathcal{R}_\odot^2)}. \quad (47)$$

4. Очевидно, что максимальная площадь двух дисков звезд, наблюдаемых одновременно, есть  $S_{\max} = 2\pi \mathcal{R}_\odot^2$ . Определим площадь  $S_{\text{vis}}$ . Для этого рассмотрим рис. 8.а). Очевидно, полная видимая площадь двух дисков в таком взаимном расположении представляется в виде (1 балл):

$$S_{\text{vis}} = 2\pi \mathcal{R}_\odot^2 - S_{ABED},$$

здесь  $S_{ABED}$  – площадь фигуры  $ABED$ , ограниченная дугами окружностей границ дисков звезд, соответствующая области затмения второй звезды телом первой. Поскольку  $\mathcal{R}_\odot \ll r$ , то будем

пренебрегать разницей размеров звезд с позиции наблюдателя, расположенного на поверхности планеты. Тогда фигуру  $ABED$  можно представить в виде суммы двух одинаковых круговых сегментов:  $DABC'$  и  $DEBC'$ . Тогда  $S_{ABED} = 2S_{DABC'}$ . Площадь кругового сегмента  $DABC'$  можно представить в виде разностей площадей кругового сектора  $O_1BED$  и равнобедренного треугольника  $\triangle O_1BD$ . Тогда площадь  $S_{ABED}$  запишется в виде (1 балл):

$$S_{ABED} = 2S_{DABC'} = 2(S_{O_1BED} - S_{\triangle O_1BD}) = 2 \left( \pi \mathfrak{R}_{\odot}^2 \frac{\psi}{2\pi} - \frac{1}{2} \mathfrak{R}_{\odot}^2 \sin \psi \right).$$

Определим связь между углом  $\psi$  и углом  $\varphi$ . Для этого заметим, что с одной стороны из прямоугольного  $\triangle O_1BC'$  (рис. 8.а) следует, что  $O_1C' = \mathfrak{R}_{\odot} \cos \psi/2$ . С другой стороны, поскольку  $O_1C = CO_2$ , то согласно теореме Фалеса  $O_1C' = C'O_2'$ . Следовательно,  $O_1C' = \frac{1}{2}O_1O_2' = \frac{1}{2}O_1O_2 \sin \varphi = \mathfrak{R}_{\odot} \sin \varphi$ . В итоге получаем связь между углами вида (1 балл):

$$\mathfrak{R}_{\odot} \cos \psi/2 = \mathfrak{R}_{\odot} \sin \varphi, \Rightarrow \cos \psi/2 = \cos(\pi/2 - \varphi), \psi = \pi - 2\varphi.$$

В итоге фаза представляется в виде (1 балл):

$$\Phi_{WS} = \frac{2\pi \mathfrak{R}_{\odot}^2 - (\mathfrak{R}_{\odot}^2(\pi - 2\varphi) - \mathfrak{R}_{\odot}^2 \sin 2\varphi)}{2\pi \mathfrak{R}_{\odot}^2} = \frac{1}{2} + \frac{\varphi}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \sin 2\varphi, \text{ при } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (48)$$

5. Пусть на поверхность экзопланеты падает электромагнитное излучение от двойной звезды интенсивностью  $\mathcal{I}$ . Тогда соответствующий поток излучения будет равен

$$\Phi_{\text{fall}} = \mathcal{I} \pi \mathfrak{R}_{\oplus}^2. \quad (49)$$

Доля  $(1 - A_{\oplus})$  от потока  $\Phi_{\text{fall}}$  поглощается поверхностью планеты. Эту долю можно охарактеризовать потоком  $\Phi_{\text{abs}}$ :

$$\Phi_{\text{abs}} = (1 - A_{\oplus})\Phi_{\text{fall}} = (1 - A_{\oplus})\mathcal{I} \cdot \pi \mathfrak{R}_{\oplus}^2. \quad (50)$$

Согласно закону сохранения энергии, в состоянии теплового равновесия, количество энергии, поглощенной планетой за какой-либо промежуток времени, должно быть равно количеству энергии, излученной в окружающее пространство. Экзопланету будем считать серым телом с коэффициентом черноты  $\varepsilon_{\oplus}$  и средней температурой поверхности  $\bar{T}_p$ , тогда поток энергии, испускаемой ею в виде электромагнитных волн, можно описать потоком

$$\Phi_{\text{rad}} = 4\pi \mathfrak{R}_{\oplus}^2 \varepsilon_{\oplus} \cdot \sigma \cdot \bar{T}_p^4. \quad (51)$$

Тогда уравнение энергетического баланса представляется в виде:  $\Phi_{\text{abs}} = \Phi_{\text{rad}}$  или (1 балл)

$$(1 - A_{\oplus}) \cdot \mathcal{I} \cdot \pi \mathfrak{R}_{\oplus}^2 = 4\pi \mathfrak{R}_{\oplus}^2 \varepsilon_{\oplus} \cdot \sigma \cdot \bar{T}_p^4, \Rightarrow \bar{T}_p = \sqrt[4]{\frac{(1 - A_{\oplus})\mathcal{I}}{4\varepsilon_{\oplus} \sigma}}. \quad (52)$$

Далее заметим, что чтобы вода оставалась регулярно в жидкой фазе на нижней границе ( $r_{\text{min}}$ ) в зоне обитаемости, необходимо чтобы при максимальном значении солнечной постоянной  $f_{\text{max}}$  вода не закипала на поверхности экзопланеты, т. е. средняя температура поверхности планеты была не больше температуры кипения  $T_{\text{max}}$ . Аналогично рассуждая, приходим к заключению, что чтобы на верхней границе ( $r_{\text{max}}$ ) зоны обитаемости при минимальной солнечной постоянной  $f_{\text{min}}$ , вода не должна кристаллизоваться, то есть средняя температура поверхности экзопланеты не должна быть меньше температуры кристаллизации воды,  $T_{\text{min}}$ . В пределе получаем (0.5+0.5 балл):

$$T_{\text{max}} = \sqrt[4]{\frac{(1 - A_{\oplus})}{4\varepsilon_{\oplus} \sigma} \frac{2L_{\odot}}{4\pi(r_{\text{min}}^2 + \mathfrak{R}_{\odot}^2)}}, \quad T_{\text{min}} = \sqrt[4]{\frac{(1 - A_{\oplus})}{4\varepsilon_{\oplus} \sigma} \frac{L_{\odot}}{4\pi(r_{\text{max}} - \mathfrak{R}_{\odot})^2}}. \quad (53)$$

Запишем температуру для Земли (1 балл):

$$\bar{T}_{\oplus} = \sqrt[4]{\frac{(1 - A_{\oplus})L_{\odot}}{16\pi \varepsilon_{\oplus} \sigma a_{\oplus}^2}}, \text{ где учтено } f_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi a_{\oplus}^2}. \quad (54)$$

Разделив каждое выражение (53) на результат (54) и выполнив ряд алгебраических преобразований, получаем радиусы для нижней и верхней границ зоны обитаемости (1+1 балла):

$$r_{\min} \approx \sqrt{2}a_{\oplus} \left( \frac{\bar{T}_{\oplus}}{T_{\max}} \right)^2 = 0.842 \text{ а.е.}, \quad r_{\max} = \mathfrak{R}_{\odot} + a_{\oplus} \left( \frac{\bar{T}_{\oplus}}{T_{\min}} \right)^2 = 1.116 \text{ а.е.} \quad (55)$$

Соответствующие значения сидерического периода обращения экзопланеты вокруг двойной звезды, согласно выражению (45), представляется в виде (0.5+0.5 балла):

$$T_p^{(\min)} = 0.546 \text{ год} = 199.5 \text{ сут}, \quad T_p^{(\max)} = 0.834 \text{ год} = 304.6 \text{ сут}. \quad (56)$$

*Рекомендации для жюри.*

Выполненная часть решения задачи	Балл
Вычислены радиус орбиты + период обращения одного из компонентов двойной звезды	1+2
Вычислены период обращения экзопланеты вокруг центра масс двойной системы и ее средняя орбитальная скорость	2+1
Дано физическое обоснование минимального + максимального значений солнечной постоянной и их связь со взаимным расположением компонентов двойной системы и экзопланеты. Получены явные аналитические выражения для $f_{\min}$ + $f_{\max}$	1+1+1+1
Записано выражение для площади видимых дисков двух звезд с позиции наблюдателя в терминах площади круга и удвоенного кругового сегмента + вычислена площадь удвоенного кругового сегмента в терминах угла $\psi$ + установлена явная связь между углом $\psi$ и углом $\varphi$ + представлена в явном виде искомая фаза в терминах параметра $\varphi$	1+1+1+1
Получено явное аналитическое выражение для средней эффективной температуры поверхности экзопланеты + с использованием полученного выражения записано два предельных уравнения, удовлетворяющих условию жидкой воды, + записана формула для средней температуры поверхности Земли + представлены явно аналитические выражения для радиусов нижней и верхней границ зоны обитаемости + вычислены соответствующие сидерические периоды обращения планеты	1+(0.5+0.5) +1+(1+1) +(0.5+0.5)

*На решение задач данного этапа Олимпиады участникам отводится 4 часа.*

## Основные справочные данные

### §1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная –  $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме –  $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная –  $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана –  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Масса протона –  $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона –  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица –  $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек –  $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Световой год –  $1 \text{ св. г.} = 9.461 \cdot 10^{15} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла –  $H = 70.0 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

### §2. Данные о Солнце

- Радиус –  $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса –  $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость –  $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая визуальная звездная величина –  $-26.74^m$
- Видимая болометрическая звездная величина –  $-26.80^m$
- Абсолютная болометрическая звездная величина –  $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) –  $+0.67^m$
- Эффективная температура –  $5778 \text{ К}$
- Средний горизонтальный параллакс –  $8.794''$
- Интегральный поток энергии на расстоянии Земли –  $1360 \text{ Вт/м}^2$
- Поток энергии в видимых лучах на расстоянии Земли –  $600 \text{ Вт/м}^2$

### §3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты –  $0.017$
- Тропический год –  $365.24219 \text{ сут}$
- Средняя орбитальная скорость –  $29.8 \text{ км/с}$
- Период вращения –  $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху  $2000.0$  –  $23^\circ 26' 21.45''$
- Экваториальный радиус –  $6378.14 \text{ км}$
- Полярный радиус –  $6356.77 \text{ км}$
- Средний (по объему) радиус –  $6371.01 \text{ км}$
- Масса –  $5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
- Средняя плотность –  $5.52 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы –  $\text{N}_2$  (78%),  $\text{O}_2$  (21%),  $\text{Ar}$  ( $\sim 1\%$ )

### §4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли –  $384400 \text{ км}$
- Минимальное расстояние от Земли –  $363300 \text{ км}$
- Максимальное расстояние от Земли –  $405500 \text{ км}$
- Эксцентриситет орбиты –  $0.055$

- Наклон плоскости орбиты к эклиптике –  $5^{\circ}09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса –  $7.348 \cdot 10^{22}$  кг или  $1/81.3$  массы Земли
- Средняя плотность –  $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние –  $-12.7^m$

### §5. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность г·см <sup>-3</sup>	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты градусы	Геометрич. альbedo	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	$-26.8^m$
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	$-0.1$
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут <sup>†</sup>	177.36	0.65	$-4.4^m$
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	$-2.0^m$
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	$-2.7^m$
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	$0.4^m$
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час <sup>†</sup>	97.86	0.51	$5.7^m$
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	$7.8^m$

\* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

### §6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики градусы	Период обращения	Синодический период сут
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5



## §7. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбе-до	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см <sup>-3</sup>	км	сут		
<b>Земля</b>							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
<b>Марс</b>							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
<b>Юпитер</b>							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
<b>Сатурн</b>							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
<b>Уран</b>							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
<b>Нептун</b>							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 <sup>†</sup>	0.7	13.5

\* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

## §8. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx;$$

здесь  $x \ll 1$ , все углы выражаются в радианах.