

Решения задач
Открытой межрегиональной олимпиады
по астрономии имени Ф.А. Бредихина
9 класс

№ 1. «Мозаика небесных тел и явлений земного небосвода»

Условие. На рис. 1 представлены фотографии 8 объектов небосвода Земли. Ответьте на следующие вопросы¹.

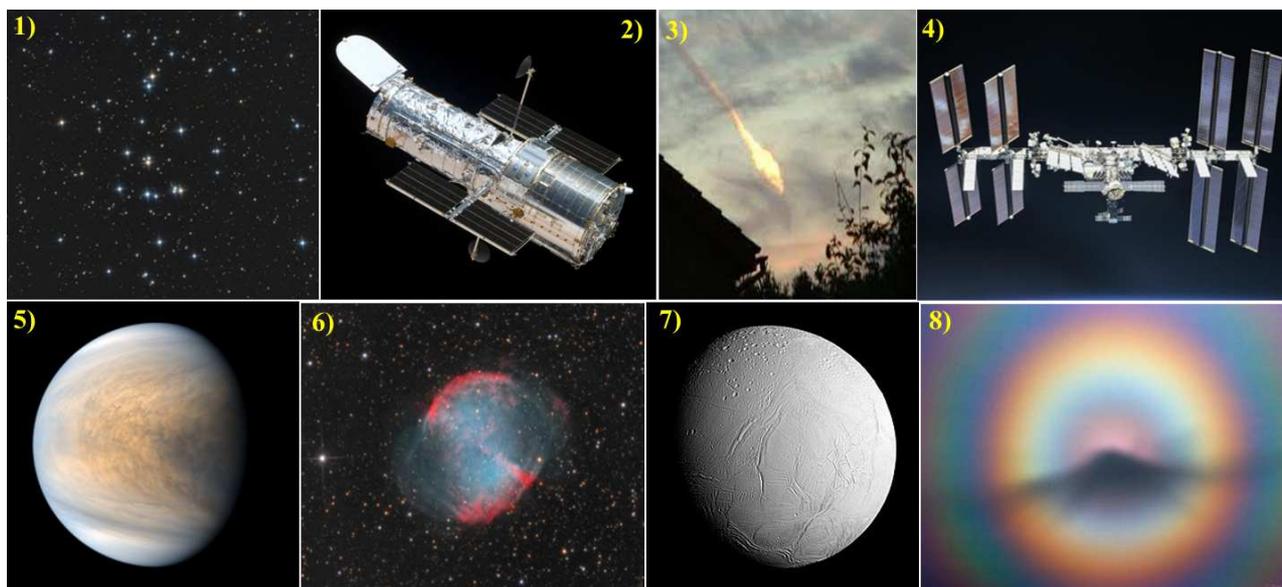


Рис. 1. Мозаика объектов и явлений земного небосвода.

I. Установите соответствие между номером образа и названием соответствующего объекта. Свои ответы (номер образа, представленного на рис. 1, определенный арабской цифрой) укажите в ячейке под соответствующим названием этого объекта в табл. 1. (0.5 балла за каждую правильно определенную позицию)

Болид, порожденный крупным метеороидом/ астероидом	Глория	Международная космическая станция	Телескоп им. Э. Хаббла
Венера	Энцелад (спутник Сатурна)	Рассеянное скопление Ясли (M44)	Планетарная туманность Гантель (M27)

Таблица 1. Объекты и явления земного небосвода и их названия.

II. Сопоставьте каждому рассматриваемому объекту его тип (небесное тело или явление). Свои ответы (номер образа, представленного на рис. 1, определенный арабской цифрой) укажите (если их несколько, то перечислить через запятую) в ячейке под соответствующим названием типа объекта в табл. 2. (0.5 балла за каждую правильно определенную позицию)

III. Определите, к какому классу небесных тел/явлений (классификация по области пространства, в которой находится небесное тело или происходит небесное явление) следует отнести рассматриваемые объекты. Свои ответы (номер образа, представленного на рис. 1, определенный

¹С целью экономии времени на оформление решений задач, *настоятельно рекомендуется* заполнять указанные таблицы и расставлять подписи на рисунках непосредственно в условиях задач, вырезать их и наклеить на свой бланк ответов.

Небесное тело (система связанных небесных тел)	Небесное явление

Таблица 2. Определение небесных тел/явлений.

арабской цифрой) укажите (если их несколько, то перечислить через запятую) в ячейке под соответствующим названием класса небесных тел/явлений в табл. 3. (0.5 балла за каждую правильно определенную позицию)

Тела/явления, принадлежащие			
земной атмосфере	околоземному космическому пространству	Солнечной системе	глубокому космосу

Таблица 3. Определение представителей 4-х классов небесных тел/явлений.

IV. Определите какие из представленных объектов можно наблюдать (хотя бы иногда) невооруженным глазом на небосводе мегаполиса, а какие – только в телескоп. Свои ответы (номер образа, представленного на рис. 1, определенный арабской цифрой) укажите (если их несколько, то перечислить через запятую) в ячейке под соответствующей возможностью наблюдений в табл. 4. (0.5 балла за каждую правильно определенную позицию)

Можно наблюдать	
невооруженным глазом (хотя бы иногда)	только в телескоп

Таблица 4. Определение характера видимости небесного тела/явления.

V. Определите какие из представленных объектов имеют естественное происхождение, а какие – искусственное? Свои ответы (номер образа, представленного на рис. 1, определенный арабской цифрой) укажите (если их несколько, то перечислить через запятую) в ячейке под соответствующим типом происхождения в табл. 5. (0.5 балла за каждую правильно определенную позицию)

Происхождение	
естественное (созданы природой)	искусственное (созданы человеком)

Таблица 5. Определение типа происхождения небесного тела/явления.

Решение. I. Правильный ответ на первый вопрос задачи представляется следующей заполненной табл. 6.

Болид, порожденный крупным метеороидом/ астероидом	Глория	Международная космическая станция	Телескоп им. Э. Хаббла
3	8	4	2
Венера	Энцелад (спутник Сатурна)	Рассеянное скопление Ясли (M44)	Планетарная туманность Гантель (M27)
5	7	1	6

Таблица 6. Объекты и явления земного небосвода и их названия.

II. Правильный ответ на второй вопрос задачи представляется заполненной табл. 7.

III. Правильный ответ на третий вопрос задачи представляется заполненной табл. 8.

IV. Правильный ответ на четвертый вопрос задачи представляется заполненной табл. 9.

Небесное тело (система связанных небесных тел)	Небесное явление
1, 2, 4, 5, 6, 7	3, 8

Таблица 7. Определение небесных тел/явлений.

Тела/явления, принадлежащие			
земной атмосфере	околоземному космическому пространству	Солнечной системе	глубокому космосу
3, 8	2, 4	5, 7	1, 6

Таблица 8. Определение представителей 4-х классов небесных тел/явлений.

Можно наблюдать	
невооруженным глазом (хотя бы иногда)	только в телескоп
1, 2, 3, 4, 5, 8	6, 7

Таблица 9. Определение характера видимости небесного тела/явления.

Комментарий: Планетарная туманность Гантель (M27), и спутник Сатурна – Энцелад является тусклыми объектами земного небосвода, видимые звездные величины которых равны $+7.5^m$, $+11.7^m$ соответственно, что превышает проникающую силу человеческого глаза $m_y = +6^m$. Условия наблюдений ухудшаются на городском небе, где господствует засветка от искусственных источников освещения, поэтому данные объекты фактически уже невозможно рассмотреть невооруженным глазом.

V. Правильный ответ на пятый вопрос задачи представляется заполненной табл. 10.

Происхождение	
естественное (созданы природой)	искусственное (созданы человеком)
1, 3, 5, 6, 7, 8	2, 4

Таблица 10. Определение типа происхождения небесного тела/явления.

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
За каждую правильно определенную позицию	0.5(40)

№ 2. «Солнечное гало в истинный полдень на северном геополюсе»

Условие. На рис. 2 представлена фотография малого солнечного гало – атмосферного оптического метеорологического явления, представляющего собой светящееся кольцо, образующееся вокруг Солнца, имеющее угловой радиус 22° и являющееся результатом рассеяния света на гексагональных кристаллах водяного льда. Фотография была получена на северном географическом полюсе, в истинный полдень, при этом нижняя точка гало располагалась точно на математическом горизонте. Определите возможные даты получения этой фотографии. (20 баллов)

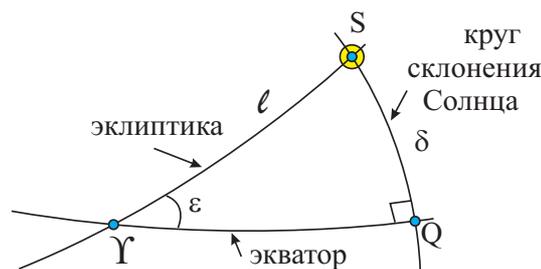


Рис. 3. К определению склонения Солнца.

Решение. Как известно, высота Солнца на северном географическом полюсе в истинный полдень представляется в виде (3 балла):

$$h_{\odot}^{(\max)} = 90^\circ + \delta_{\odot} - \varphi_{\text{НР}}, \quad (1)$$

здесь $\varphi_{\text{НР}} = +90^\circ$ – широта данной точки (1 балл), δ_{\odot} – склонение Солнца, принимающее значение из интервала (3 балла)

$$-\varepsilon \leq \delta_{\odot} \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 23^\circ 26'.$$



Рис. 2. К определению малого солнечного гало.

Поскольку в момент съемки нижняя точка гало находилась точно на математическом горизонте, а согласно рисунку, Солнце располагалось в центре гало, то высота Солнца в полдень должна быть равна его угловому радиусу $h_{\odot} = 22^{\circ}$, что достигается в окрестности дня летнего солнцестояния (2 балла). Определим искомые даты.

С использованием (1), получаем значение склонения Солнца на момент съемки (2 балла):

$$\delta_{\odot} = -90^{\circ} + h_{\odot} + \varphi_{\text{NP}} = 22^{\circ}. \quad (2)$$

Далее необходимо определить даты, в которых склонение Солнца принимает значение (2). Для этого рассмотрим сферический треугольник $\Delta_s \Upsilon S Q$ – в вершинах, которого располагаются точка весны Υ , Солнце (S), точка пересечения круга склонения Солнца с экватором (Q), см. рис. 3. Воспользуемся формулой синусов для него (2 балла)

$$\sin \delta_{\odot} \cdot \sin 90^{\circ} = \sin \ell_{\odot} \cdot \sin \varepsilon, \Rightarrow \sin \ell_{\odot} = \frac{\sin \delta_{\odot}}{\sin \varepsilon}, \Rightarrow$$

$$\ell_{\odot} = \arcsin \left[\frac{\sin \delta_{\odot}}{\sin \varepsilon} \right], \quad (3)$$

здесь $\ell_{\odot} = \omega_{\odot} t$ – эклиптическая долгота Солнца, отсчитываемая от точки весеннего равноденствия, t – время, отсчитываемое от дня весеннего равноденствия, угловая скорость ω_{\odot} видимого движения Солнца по эклиптике есть

$$\omega_{\odot} = \frac{2\pi}{T_{\text{тр}}}, \quad T_{\text{тр}} = 365.24219 \text{ сут}, \quad (4)$$

где $T_{\text{тр}}$ – продолжительность тропического года. Из (3) следует (3 балла)

$$t = \frac{T_{\text{тр}}}{2\pi} \arcsin \left[\frac{\sin \delta_{\odot}}{\sin \varepsilon} \right] = 71.4 \text{ сут}. \quad (5)$$

Поскольку эклиптика располагается симметрично относительно точки летнего солнцестояния и небесного экватора, существует две даты, когда Солнце принимает указанное выше значение склонения. Следовательно искомые даты должны быть (2 + 2 балла)

$$\text{Дата}_1 = 20 \div 21 \text{ марта} + 71.4 \text{ сут} = 31 \text{ мая} \div 1 \text{ июня}, \quad (6)$$

$$\text{Дата}_2 = 22 \div 23 \text{ сентября} - 71.4 \text{ сут} = 13 \div 14 \text{ июля}. \quad (7)$$

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Корректно определена формула для высоты светила верхней кульминации к югу от зенита + широта северного географического полюса + диапазон возможных значений склонения Солнца	3+1+3
Сделан правильный вывод о равенстве высоты Солнца в истинный полдень и углового радиуса малого гало + корректно вычислено склонение Солнца на искомую дату	2 + 2
Корректно записана формула синусов для сферического треугольника + правильно вычислено время прошедшее от момента весеннего равноденствия (допускается альтернативный расчет с использованием плоского треугольника приводящий к адекватному результату).	2+3
Правильно определены искомые даты 1 и 2 с погрешностью не более ± 4 суток	2+2

№ 3. «Парочка примечательных астероидов»

Условие. Два астероида А и В имеют одинаковые синодические периоды (при наблюдении с Земли), превышающие сидерический период обращения Земли вокруг Солнца на величину $\Delta S = 54.74$ сут. Известно, что радиус орбиты астероида А меньше радиуса орбиты астероида В. Определите:

1. Сидерические периоды (T_A , T_B) данных астероидов. (4+4 балла)

2. Радиусы (a_A , a_B) круговых орбит астероидов. (4+4 балла)

3. Угол наибольшей элонгации (α) астероида А при наблюдении с астероида В. (4 балла)

Решение. 1. Равенство синодических периодов и неравенство радиусов орбит астероидов, легко объясняется, если полагать, что один из астероидов расположен ближе к Солнцу, чем Земля, а другой – дальше нее. (1 балл) Важно отметить, что оба астероида обращаются вокруг Солнца в ту же сторону, что и Земля, иначе бы их синодический период был бы меньше сидерического

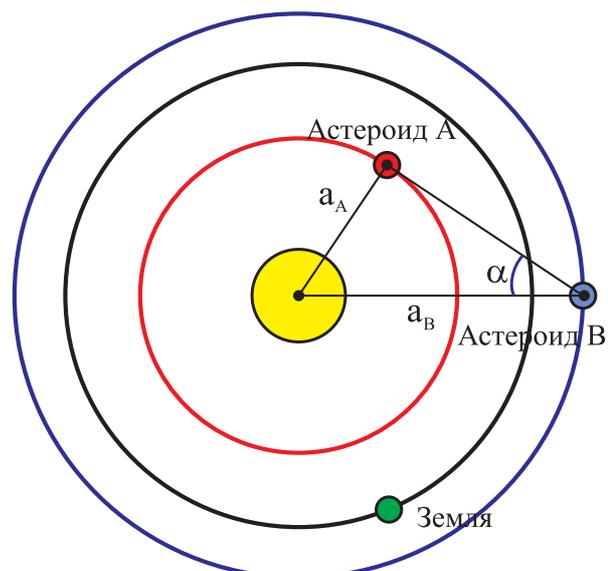


Рис. 4. К определению взаимного расположения астероидов.

периода (T_{\oplus}) обращения Земли. (1 балл) Запишем уравнение для синодического периода в случае нижнего (астероид А) и верхнего тела (астероид В) (3+3 балла):

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_{\oplus}}, \Rightarrow T_A = \frac{S T_{\oplus}}{(S + T_{\oplus})} = \frac{T_{\oplus} (T_{\oplus} + \Delta S)}{(2T_{\oplus} + \Delta S)} = 195.4 \text{ сут}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_B}, \Rightarrow T_B = \frac{S T_{\oplus}}{(S - T_{\oplus})} = \frac{T_{\oplus} (T_{\oplus} + \Delta S)}{\Delta S} = 2802.5 \text{ сут}, \quad (9)$$

здесь T_A, T_B – сидерические периоды обращения астероидов вокруг Солнца, $T_{\oplus} = 1$ год – сидерический период обращения Земли.

2. С использованием 3-го закона Кеплера можно определить радиусы круговых орбит астероидов (4+4 балла):

$$\left(\frac{a_A}{a_{\oplus}}\right)^3 = \left(\frac{T_A}{T_{\oplus}}\right)^2, \quad a_A = a_{\oplus} \left(\frac{S}{S + T_{\oplus}}\right)^{2/3} = a_{\oplus} \left(\frac{T_{\oplus} + \Delta S}{2T_{\oplus} + \Delta S}\right)^{2/3} = 0.659 \text{ а.е.}, \quad (10)$$

$$\left(\frac{a_B}{a_{\oplus}}\right)^3 = \left(\frac{T_B}{T_{\oplus}}\right)^2, \quad a_B = a_{\oplus} \left(\frac{S}{S - T_{\oplus}}\right)^{2/3} = a_{\oplus} \left(\frac{T_{\oplus} + \Delta S}{\Delta S}\right)^{2/3} = 3.890 \text{ а.е.}, \quad (11)$$

здесь $a_{\oplus} = 1$ а.е. – радиус круговой орбиты Земли.

3. Из рис. 4, очевидно, что синус угла α максимальной элонгации астероида А для воображаемого наблюдателя, находящегося на астероиде В, определяется отношением больших полуосей орбит астероидов (4+4 балла):

$$\sin \alpha = \frac{a_A}{a_B} = \left(\frac{\Delta S}{2T_{\oplus} + \Delta S}\right)^{2/3} = 0.1694, \Rightarrow \alpha = 9.8^\circ. \quad (12)$$

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Корректное предположение о взаимном расположении астероидов и Земли + обоснование вращения астероидов в одном направлении с Землей	1 + 1
Вывод итоговых аналитических формул для сидерических периодов ($T_A + T_B$) обращения астероидов + их численный расчет	(2+2) + (1+1)
С использованием третьего закона Кеплера вывод формул для радиусов ($a_A + a_B$) орбит астероидов + их корректный численный расчет	(3+3) + (1+1)
Корректный аналитический + численный расчет угла элонгации	2+2

№ 4. «Полярные дни и ночи на полюсах»

Условие. Как известно, продолжительности полярного дня и полярной ночи на географических полюсах не одинаковы.

1. Каковы основные причины различия их продолжительностей? (4 балла)

2. Насколько отличается продолжительности полярного дня и ночи на северном географическом полюсе в 2023 году? Известно, что в этом году день весеннего равноденствия состоялся 20 марта в 20 часов 24 минуты по всемирному времени, а день осеннего равноденствия 23 сентября в 12 часов 37 минут. Угловой радиус Солнца – $\rho''_{\odot} = 16'$, атмосферная рефракция у горизонта – $\delta z_H = 35'$. (10 баллов)

3. Чему равна общая продолжительность в течение года полярного дня, одновременно наблюдаемого на геополюсах Земли? (6 баллов)

Решение. 1. Причиной неодинаковости продолжительностей полярного дня и ночи на геополюсах являются:

1.а) *Эллиптичность орбиты Земли.* Поскольку Земля движется по эллипсу, то ее скорость орбитального движения не постоянна: с наибольшей скоростью планета движется в окрестности перигелия (Земля его проходит 2 ÷ 5 января), а с наименьшей – в окрестности афелия (1 ÷ 5

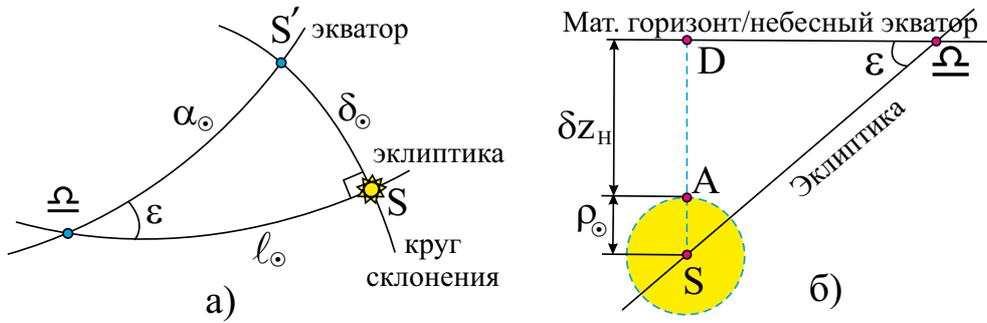


Рис. 5. К определению добавки к продолжительностям полярного дня $\tau_{\text{pd}}^{(0)}$ и ночи $\tau_{\text{pn}}^{(0)}$.

июля). Значит промежуток времени между осенним и весенним равноденствием (через зимнее солнцестояние) должен быть меньше, чем промежуток времени между весенним и осенним равноденствием (через летнее солнцестояние). (2 балла)

1.б) Конечность размеров видимого диска Солнца. Днем традиционно называется промежуток времени между моментом появления верхней точки диска Солнца на горизонте, и моментом ее исчезновения за горизонтом. При этом сам центр диска Солнца расположен ниже горизонта на величину его углового радиуса ρ''_{\odot} . Поскольку для наблюдателя на полюсах Солнце относительно горизонта движется по эклиптике, следовательно благодаря данному эффекту оно большую часть эклиптики проходит, располагаясь над горизонтом. (1 балл)

1.в) Рефракция света приводит к понижению видимого горизонта на величину δz_H . По этой причине Солнце будет наблюдаться над горизонтом дольше. (1 балл)

2. Вычислим продолжительности полярного дня и полярной ночи на северном географическом полушарии в 2023 году методом последовательных приближений.

2.а) Приближение точечного Солнца. Итак, если Солнце является точечным, а рефракция света отсутствует, то на северном географическом полюсе начало полярного дня наступит точно в момент весеннего равноденствия, а окончание – в момент осеннего равноденствия. Значит продолжительности полярного дня и ночи составят (2 балла)

$$\tau_{\text{pd}}^{(0)} = 10(21 \div 31.03) + 30(1 \div 30.04) + 31(1 \div 31.05) + 30(1 \div 30.06) + 31(1 \div 31.07) + 31(1 \div 31.08) + 22(1 \div 22.09) \text{ сут} + (24^{\text{h}} - 20^{\text{h}}24^{\text{m}}) + 12^{\text{h}}37^{\text{m}} = 185 \text{ сут } 16^{\text{h}} 13^{\text{m}}. \quad (13)$$

$$\tau_{\text{pn}}^{(0)} = 365 \text{ сут} - 185 \text{ сут } 16^{\text{h}} 13^{\text{m}} = 179 \text{ сут } 7^{\text{h}} 47^{\text{m}}. \quad (14)$$

2.б) Учет конечности размеров диска Солнца + рефракции. Рассмотрим движение Солнца по эклиптике после дня осеннего равноденствия (см. рис. 13.а). Очевидно, Солнце должно двигаться по участку $\frown S$. В результате явления рефракции света, видимый горизонт понижается на величину δz_H . В момент захода верхней точки видимого диска Солнца за горизонт на северном геополюсе, центр видимого диска Солнца (с учетом конечности его размеров) должен находиться ниже математического горизонта на величину $(\rho''_{\odot} + \delta z_H) = 51'$. (2 балла)

Далее рассмотрим сферический прямоугольный треугольник $\triangle_S \frown SD$. В силу малости стороны SD его можно считать плоским (см. рис. 13.б). Тогда (2 балла)

$$l_{\odot} = \frac{(\rho''_{\odot} + \delta z_H)}{\sin \epsilon} = 128.2', \quad (15)$$

здесь $l_{\odot} = \frown S = \omega_{\odot} \Delta t$ – угловое расстояние Солнца от точки осеннего равноденствия, t – время, отсчитываемое от дня осеннего равноденствия, угловая скорость ω_{\odot} видимого движения Солнца по эклиптике, определяемая выражением (4). Следовательно на искомое время Δt (2 балла):

$$\Delta t = \frac{T_{\text{тр}} (\rho''_{\odot} + \delta z_H)}{2\pi \sin \epsilon} = 2.169 \text{ сут} = 2 \text{ сут } 4^{\text{h}} 03^{\text{m}} \quad (16)$$

будет удлиняться продолжительность полярного дня и укорачиваться продолжительность полярной ночи в окрестности дня осеннего равноденствия. Аналогичная ситуация имеет место быть

в окрестности точки весеннего равноденствия, во время восхода Солнца. Значит, итоговая продолжительность полярного дня и полярной ночи на северном географическом полюсе будет (2 балла)

$$\tau_{\text{pd}}^{(1)} = \tau_{\text{pd}}^{(0)} + 2\Delta t = 190 \text{ сут } 00^{\text{h}} 19^{\text{m}}. \quad (17)$$

$$\tau_{\text{pn}}^{(1)} = \tau_{\text{pn}}^{(0)} - 2\Delta t = 174 \text{ сут } 23^{\text{h}} 41^{\text{m}}. \quad (18)$$

3. Рассуждая аналогичным образом, не трудно понять, что на южном географическом полюсе полярный день начнется, когда высота истинного солнца на северном географическом полюсе станет равной $(\rho''_{\odot} + \delta z_H) = +51'$. При этом она будет продолжаться на северном полюсе до тех пор, пока его высота не станет равной значению $-(\rho''_{\odot} + \delta z_H) = -51'$. (2 балла) Очевидно, указанные моменты отстоят друг от друга на промежуток времени $2\Delta t$. (2 балла) Вновь учитывая такую же ситуацию в окрестности дня весеннего равноденствия, получаем общую продолжительность в течение года полярного дня, одновременно наблюдаемого на геополюсах Земли, равную (2 балла)

$$\tau_{2\text{pd}} = 4\Delta t = 8 \text{ сут } 16^{\text{h}} 12^{\text{m}}. \quad (19)$$

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Указаны причины неодинаковости продолжительностей полярной ночи и дня: эллиптичность орбиты Земли + конечность размеров диска Солнца + атмосферная рефракция	2+1+1
Выполнен расчет продолжительности полярного дня в приближении точечного солнца без учета атмосферной рефракции	2
Определение высоты истинного солнца в момент его захода за горизонт с учетом конечности размеров диска и явления рефракции	2
Расчет эклиптической долготы (15) Солнца с использованием сферического треугольника + определение промежутка времени Δt (16)	2+2
Вычисление продолжительности полярного дня и ночи с учетом конечностей размеров видимого диска Солнца и рефракции света	1 + 1
Определение момента времени начала и окончания полярного дня на двух географических полюсах + расчет продолжительности полярного дня на полюсах в окрестности одного из равноденствий + расчет искомой продолжительности полярного дня в течение года	2+2+2

№ 5. «Запуск капсулы сквозь тело Земли»

Условие. Между полюсами Земли (представляющей собой однородный шар) прорыли прямую цилиндрическую шахту, из которой был откачан газ. Термостойкая капсула была запущена в эту шахту с поверхности Земли из состояния покоя в день летнего солнцестояния. В момент пролета через центр Земли капсула включила импульсный двигатель и получила приращение скорости ΔV вдоль направления своего движения. Определите:

1. Зависимость ускорения свободного падения от расстояния до центра Земли. (3 балла)
2. Работу, которую совершает сила тяжести при падении капсулы, как функцию расстояния от центра. (4 балла)
3. Скорость капсулы в центре Земли до включения двигателей. (3 балла)
4. Скорость капсулы в момент вылета из шахты. (3 балла)
5. Минимальную величину ΔV_1 , при которой капсула сможет покинуть гравитационное поле Земли? (3 баллов)
6. Минимальную величину ΔV_2 , при которой капсула сможет покинуть гравитационное поле Солнечной системы? Орбиту Земли считать круговой. (4 балла)

Решение. 1. Сила тяжести, действующая на капсулу у поверхности Земли, равна силе притяжения, определяемой законом всемирного тяготения Ньютона (1 балл):

$$mg_0 = \frac{G m \mathcal{M}_\oplus}{\mathcal{R}_\oplus^2}, \Rightarrow g_0 = \frac{G \mathcal{M}_\oplus}{\mathcal{R}_\oplus^2} = 9.82 \text{ м/с}^2. \quad (20)$$

Учитывая, что массу Земли – однородного шара плотности ρ_\oplus можно представить в виде:

$$\mathcal{M}_\oplus = \frac{4\pi}{3} \rho_\oplus \mathcal{R}_\oplus^3.$$

Ускорение свободного падения на поверхности Земли можно переписать так (1 балл):

$$g_0 = \frac{4\pi}{3} G \rho_\oplus \mathcal{R}_\oplus. \quad (21)$$

Выполним ряд логических рассуждений:

1.а) Очевидно, ускорение свободного падения должно зависеть от расстояния до центра Земли в теле последней. Например, на поверхности Земли эта величина 9.82 м/с^2 , а в центре Земли, очевидно, ускорение должно быть равно нулю. В этом можно легко убедиться, если мысленно разбить шар на большое количество очень малых элементов и вычислить результирующую всех сил притяжения, действующих на точечное пробное тело, расположенное в центре Земли, со стороны всех таких элементов. В силу сферически симметричного расположения пробного тела в центре Земли, результирующая сила будет равна нулю.

1.б) Выражение (21) является лишь частным случаем более общей зависимости $g(r)$ в теле Земли. Однако в этом выражении лишь параметр \mathcal{R}_\oplus может подлежать вариации, все остальные параметры являются константами! С другой стороны, общее аналитическое выражение $g(r)$ для ускорения свободного падения на расстоянии r от центра Земли должно воспроизводить структуру (21) при $r = \mathcal{R}_\oplus$. Следовательно, ускорение свободного падения $g(r)$ на расстоянии r может быть записано по аналогии с (21):

$$g(r) = \frac{4\pi}{3} G \rho_\oplus r. \quad (22)$$

Разделим выражение (22) на выражение (21) (1 балл):

$$\frac{g(r)}{g_0} = \frac{r}{\mathcal{R}_\oplus}, \Rightarrow g(r) = g_0 \left(\frac{r}{\mathcal{R}_\oplus} \right), \text{ или } g(r) = \frac{G \mathcal{M}_\oplus}{\mathcal{R}_\oplus^2} \left(\frac{r}{\mathcal{R}_\oplus} \right). \quad (23)$$

2. Определим малую работу по перемещению капсулы в шахте на расстояние Δr к центру Земли (1 балл):

$$\Delta A = m g(r) \Delta r = m g_0 \left(\frac{r}{\mathcal{R}_\oplus} \right) \Delta r.$$

Пусть в начальный момент времени расстояние от центра Земли до капсулы было r_1 , а в конечный момент времени – r_2 ($r_1 > r_2$). Тогда пройденный путь и расстояние r можно определить в виде:

$$\Delta r = r_1 - r_2, \quad r = \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Тогда искомую малую работу можно переписать так (1 балла)

$$\Delta A = m g_0 \left(\frac{r_1 + r_2}{2\mathcal{R}_\oplus} \right) (r_1 - r_2) = \frac{1}{2} m g_0 \frac{r_1^2 - r_2^2}{\mathcal{R}_\oplus}.$$

Заметим, что последний результат никак не связан с малостью перемещения капсулы, следовательно его можно рассматривать как общее выражение для работы силы тяжести по перемещению капсулы в теле Земли на любое расстояние (не превышающее диаметра Земли). Адаптируем последний результат к данным условиям задачи: $r_1 = \mathcal{R}_\oplus$, $r_2 = r$. В результате искомую работу можно представить так (2 балла)

$$A = \frac{1}{2} m g_0 \left(\mathcal{R}_\oplus - \frac{r^2}{\mathcal{R}_\oplus} \right). \quad (24)$$

3. Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии: работа силы тяжести по перемещению капсулы в шахте равна изменению кинетической энергии тела, т.е. (1 балл)

$$A = \frac{m V_2^2}{2} - \frac{m V_1^2}{2}.$$

Заметим, что капсула начинает свое движение из состояния покоя с поверхности Земли, следовательно ее начальная скорость V_1 равна нулю. Конечная скорость определяется в центре Земли ($r = 0$) и равна V_c . Тогда исходное выражение можно переписать в виде (2 балла):

$$A = \frac{m V_c^2}{2}, \text{ где } A(r=0) = \frac{1}{2} m g_0 \mathfrak{R}_\oplus, \Rightarrow V_c = \sqrt{g_0 \mathfrak{R}_\oplus} = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus}} = 7.91 \text{ км/с.} \quad (25)$$

Таким образом, капсула в центре Земли будет иметь первую космическую скорость Земли V_1 !

4. После работы импульсного двигателя скорость капсулы в центре Земли будет $V_c + \Delta V$. (1 балл) Вновь применим теорему об изменении кинетической энергии (2 балла):

$$\frac{m V_{\text{out}}^2}{2} - \frac{m (V_c + \Delta V)^2}{2} = -\frac{1}{2} m g_0 \mathfrak{R}_\oplus, \Rightarrow V_{\text{out}} = \sqrt{(V_c + \Delta V)^2 - V_c^2} = \sqrt{2V_c \Delta V + \Delta V^2}.$$

5. Чтобы капсула смогла покинуть гравитационное поле Земли, необходимо чтобы на выходе из шахты ее скорость относительно центра Земли была равна второй космической скорости – $V_{\text{out}} = \sqrt{2} \cdot V_1$. Следовательно, имеем квадратное уравнение вида (1 балл):

$$\Delta V^2 + 2V_c \Delta V = V_{\text{out}}^2, \Rightarrow \Delta V = \sqrt{V_{\text{out}}^2 + V_c^2} - V_c.$$

В данном случае (2 балла):

$$\Delta V_1 = \sqrt{2V_c^2 + V_c^2} - V_c = (\sqrt{3} - 1)V_c = 5.79 \text{ км/с.} \quad (26)$$

Очевидно, полученное приращение скорости существенно меньше второй космической скорости (11.2 км/с), которую нужно достичь капсуле у поверхности Земли, при старте с ее поверхности, чтобы покинуть ее гравитационное поле. Таким образом, мы имеем дело с одной из разновидностей гравитационного маневра, которая позволяет использовать гравитационную энергию массивных тел для ускорения космических аппаратов с меньшими затратами собственной энергии.

6. Чтобы капсула покинула гравитационное поле Солнечной системы, необходимо чтобы ее полная механическая энергия на выходе из шахты стала равной нулю:

$$\frac{1}{2} m (V_{\text{II}}^{(\odot)})^2 - \frac{G \mathfrak{M}_\odot}{a_\oplus} - \frac{G \mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus} = 0, \Rightarrow V_{\text{II}}^{(\odot)} = \sqrt{\frac{2G \mathfrak{M}_\odot}{a_\oplus} + \frac{2G \mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus}} = 42.86 \text{ км/с,}$$

здесь a_\oplus , \mathfrak{M}_\odot – радиус земной орбиты и масса Солнца соответственно; $V_{\text{II}}^{(\odot)}$ – вторая космическая (гелиоцентрическая) скорость капсулы, определенная с учетом гравитации Земли. (1 балл) Согласно условию, запуск капсулы произведен в день летнего солнцестояния. В этот день ось вращения Земли перпендикулярна скорости ее орбитального движения V_\oplus , поскольку Земля ориентирована своим южным географическим полюсом на Солнце. (1 балла) С использованием классического закона сложения скоростей и теоремы Пифагора, вторую космическую скорость можно представить так (1 балл)

$$(V_{\text{II}}^{(\odot)})^2 = V_\oplus^2 + V_{\text{out}}^2, \Rightarrow V_{\text{out}} = \sqrt{(V_{\text{II}}^{(\odot)})^2 - V_\oplus^2} = 30.81 \text{ км/с.} \quad (27)$$

При записи последнего выражения учтено явное выражение для орбитальной скорости Земли:

$$V_\oplus = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_\odot}{a_\oplus}} = 29.79 \text{ км/с.}$$



Рис. 6. Две фотографии Луны, полученные с помощью одного астрографа с одинаковыми настройками.

Тогда с использованием решения квадратного уравнения получаем (1 балл)

$$\Delta V_2 = \sqrt{V_{\text{out}}^2 + V_c^2} - V_c = 23.90 \text{ км/с.} \quad (28)$$

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Использовано равенство силы тяжести и силы притяжения у поверхности Земли + с использованием выражения для массы шара определено ускорение свободного падения в терминах плотности и радиуса Земли + получена явная аналитическая зависимость $g(r)$	1+1+1
Записано явное выражение для работы ΔA на малом перемещении Δr + представление работы в терминах начального r_1 и конечного r_2 расстояний от центра Земли + записано явное аналитическое выражение для работы по перемещению капсулы с поверхности Земли до точки шахты на расстоянии r	1+1+2
Использована теорема об изменении кинетической энергии + получено явное аналитическое выражение для скорости в центре Земли + ее правильный численный расчет	1+1+1
С использованием закона сложения скоростей определена скорость капсулы после работы импульсного двигателя в центре Земли + с использованием теоремы об изменении кинетической энергии вычислена скорость на выходе из шахты	1+2
Построено квадратное уравнение относительно ΔV и получено его решение + вычислено превращение скорости ΔV_1 в аналитическом + численном виде	1+1+1
Определена вторая космическая скорость капсулы относительно Солнца + явно указано на взаимную ориентацию шахты и орбитальной скорости Земли + вычислена скорость выхода капсулы из шахты для данного случая + численный расчет приращение скорость ΔV_2	1+1+1+1

№ 6. «Две фотографии Луны»

Условие. На рис. 6 представлены две фотографии Луны (прямое изображение, без обработки), полученные с помощью одного астрографа с одинаковыми настройками, через некоторый

промежуток времени τ_0 . Определите:

1. К какой основной фазе ближе всего была "расположена" Луна на моменты съемки? Свой ответ поясните и укажите знаком «+» в ячейке под соответствующей фазой Луны в табл. 11. (2 балла)

Основные фазы Луны			
Новолуние	Первая четверть	Полнолуние	Последняя (третья) четверть

Таблица 11. Основные фазы Луны.

2. В какое время суток автор снимков мог выполнить съемку Луны? Свой ответ поясните и укажите знаком «+» в ячейке под соответствующим временем суток в табл. 12. (2 балла)

Части земных суток			
Утро	День	Вечер	Ночь

Таблица 12. Части земных суток.

3. В какой стороне света располагалась Луна если известно, что на момент съемки ее диск был расположен невысоко над горизонтом, вблизи небесного экватора? Свой ответ поясните и укажите знаком «+» в ячейке под соответствующей стороной света в табл. 13. (2 балла)

Стороны света			
Восток	Юг	Запад	Север

Таблица 13. Стороны света горизонта.

4. Вычислите фазу Луны на каждой фотографии. (8 баллов)

5. Определите промежуток времени τ_0 между сеансами съемки. Орбиту Луны считать круговой. (6 баллов)

Решение. 1. Очевидно, на обеих фотографиях диск Луны освещен чуть более чем наполовину. Поскольку изображение является прямым, его обработка не производилась и на снимке освещена правая половина диска, следовательно ближе всего Луна была "расположена" к первой четверти на момент съемки, т.е. (2 балла)

Основные фазы Луны			
Новолуние	Первая четверть	Полнолуние	Последняя (третья) четверть
	+		

Таблица 14. Основные фазы Луны (ответы).

2. Очевидно, съемка производилась в темное время суток. На это явно указывает черный фон фотографии. Как известно, Луна в фазе первой четверти видна после захода Солнца и до полуночи. Поскольку здесь фаза больше первой четверти, а съемка выполнена, когда Луна была невысоко над горизонтом (незадолго до ее захода), то это могло быть вечером или ночью. Значит ответ должен быть (2 балла)

Части земных суток			
Утро	День	Вечер	Ночь
		+	+

Таблица 15. Части земных суток (ответы).

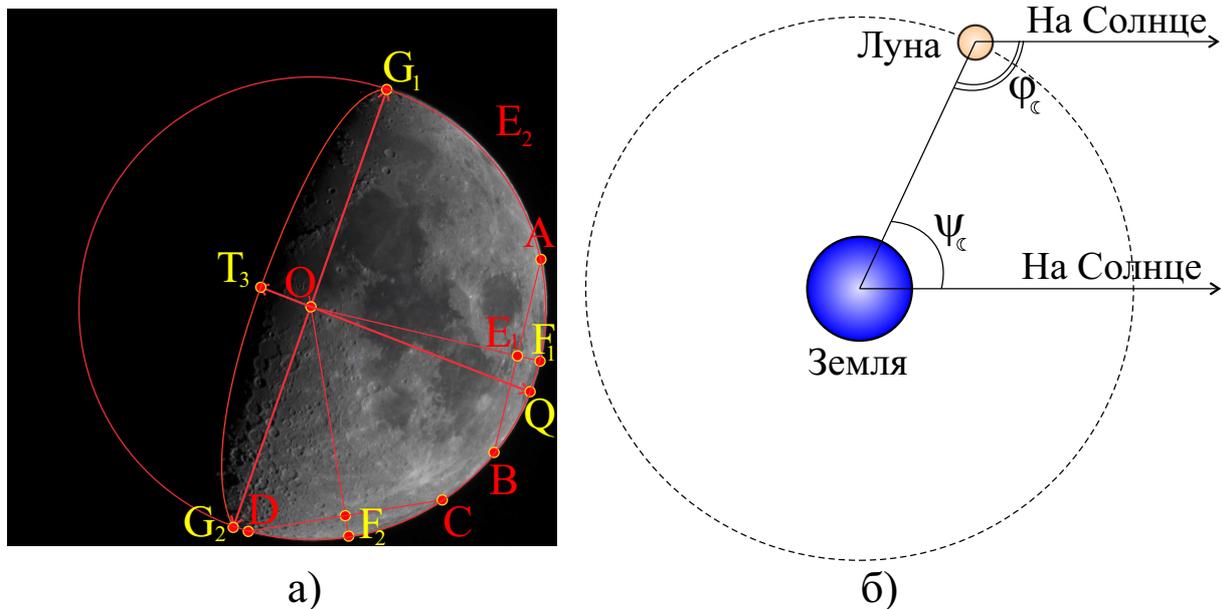


Рис. 7. К определению а) фазы Луны, б) связи позиционного и фазового угла Луны.

3. Очевидно, съемка Луны была выполнена, когда последняя располагалась на западной стороне небосвода (незадолго до ее захода; все светила заходят на западной стороне). Правильный ответ представлен в табл. 16. (2 балла)

Стороны света			
Восток	Юг	Запад	Север
		+	

Таблица 16. Стороны света горизонта (ответы).

4. Для определения фазы Луны на фотографиях воспользуемся следующей методикой. Согласно определению, **фазой небесного тела** называется скалярная величина, равная отношению площади $S_{\text{осв}}$ освещенной части поверхности видимого диска к площади $S_{\text{д}}$ всего диска небесного тела, то есть

$$\Phi = \frac{S_{\text{осв}}}{S_{\text{д}}}. \quad (29)$$

Выполнив ряд геометрических преобразований, легко показать, что исходное определение можно свести к отношению ширины серпа (измеряемой вдоль диаметра данного тела) освещенной части диска к диаметру всего диска (2 балла):

$$\Phi = \frac{d_{\text{серп}}}{D_{\text{д}}}. \quad (30)$$

С использованием циркуля "натянем" окружность на образ Луны (см. рис. 7.а), представленный на рис. 6.а). Выберем две неблизкие хорды AB и CD . Проведем через их центры перпендикуляры E_1F_1 и E_2F_2 . Найдем точку O их пересечения – центр данной окружности (видимого диска). Построим огибающую линию $G_1T_3G_2$, определяющую терминатор диска Луны. Соединим прямой G_1OG_2 крайние точки терминатора G_1 и G_2 и определим диаметр $G_1G_2 = D_{\text{д}} = 146$ мм. Через центр последнего проведем перпендикулярно отрезок $QT_3 = d_{\text{серп}} = 91$ мм (здесь и далее Ваши значения линейных размеров, определенные по фотографии, могут отличаться от указанных здесь, в силу использования фотографии с иными линейными размерами). (4 балла) Из (30) следует, что $\Phi_{\zeta}^{(1)} = 0.623$. (1 балл) Аналогично рассуждая, получаем фазу $\Phi_{\zeta}^{(2)} = 0.684$ для образа, представленного на рис. 6.б). (1 балл)

5. Фазу Луны можно определить иначе через ее **фазовый угол** (φ_{ζ}) – угол между направлениями на источник излучения (Солнце) и приемник излучения (Землю), если смотреть из центра Луны (1 балл):

$$\Phi_{\zeta} = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi_{\zeta}). \quad (31)$$

Поскольку геоцентрическое расстояние до Луны много меньше гелиоцентрического расстояния системы «Земля-Луна», а орбита Луны является круговой, то, согласно рис. 7.б), фазовый угол Луны можно связать с ее позиционным углом (ψ_{ζ}) посредством уравнения (1 балл):

$$\varphi_{\zeta} + \psi_{\zeta} = \pi. \quad (32)$$

Из выражений (31)-(32) следует, что (1 балл)

$$\Phi_{\zeta} = \frac{1}{2}(1 - \cos \psi_{\zeta}), \Rightarrow \psi_{\zeta} = \arccos [1 - 2\Phi_{\zeta}]. \quad (33)$$

С другой стороны, позиционный угол Луны можно представить через синодический период S_{ζ} обращения Луны вокруг Земли в виде: $\psi_{\zeta} = \frac{360^{\circ}}{S_{\zeta}}t$, где t – время, прошедшее от момента последнего новолуния до момента получения данной фотографии. Откуда следует ответ для t (1 балл):

$$t = S_{\zeta} \left(\frac{\psi_{\zeta}}{360^{\circ}} \right) = \left(\frac{S_{\zeta}}{360^{\circ}} \right) \arccos [1 - 2\Phi_{\zeta}]. \quad (34)$$

Выполняя численный расчет позиционного угла для полученных выше фаз, получаем два момента времени создания данных кадров $t_1 = 8.551$ сут и $t_2 = 9.154$ сут. (1 балл) Следовательно, искомый промежуток времени τ_0 есть (1 балл)

$$\tau_0 = t_2 - t_1 = 0.603 \text{ сут} = 14.47 \text{ часа}. \quad (35)$$

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Даны правильные ответы на вопросы 1-3 + пояснения к ним	1+1(2*3)
Представлено аналитическое выражение для фазы Луны в терминах ширины светлого серпа и диаметра видимого диска + представлено последовательная эффективная методика определения ширины серпа и диаметра видимого диска + вычислены фазы луны для каждого кадра с отклонением от авторского не более чем на ± 0.1	2+4 +1+1
Представлено явное выражение для фазы Луны через фазовый угол + установлена связь между фазовым и позиционным углом Луны + явно выражен позиционный угол Луны через фазу + вычислено время, прошедшее от последнего новолуния до момента получения фотографии + получены численные значения искомых моментов с отклонением от авторского не более чем на $\pm 10\%$ + выполнен расчет искомого времени τ_0 с отклонением от авторского не более чем на ± 3 часа	1+1+ 1+ 1+ 1+ 1

На решение задач данного этапа Олимпиады участникам отводится 4 часа.

Основные справочные данные

§1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Световой год – $1 \text{ св. г.} = 9.461 \cdot 10^{15} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 70.0 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

§2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая визуальная звездная величина – -26.74^m
- Видимая болометрическая звездная величина – -26.80^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Интегральный поток энергии на расстоянии Земли – 1360 Вт/м^2
- Поток энергии в видимых лучах на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

§3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$
- Экваториальный радиус – 6378.14 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Средний (по объему) радиус – 6371.01 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

§4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 363300 км
- Максимальное расстояние от Земли – 405500 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055

- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^{\circ}09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или $1/81.3$ массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

§5. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность г·см ⁻³	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты градусы	Геометрич. альbedo	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики градусы	Период обращения	Синодический период сут
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

§7. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбе-до	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§8. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.