

Решения задач
Открытой межрегиональной олимпиады
по астрономии имени Ф.А. Бредихина
10-11 класс

№ 1. «Оптические инструменты и их возможности»

Условие. Вашему вниманию представлены оптические инструменты, которые астроном-любитель может использовать для наблюдения объектов земного небосвода.

Оптические инструменты				
А) Невооруженный глаз	В) Театральный бинокль 2.5×30	С) Полевой бинокль 7×50	Д) Телескоп Ньютона ($D = 150$ мм, $F = 750$ мм)	Е) Телескоп Максутова-Кассегрена ($D = 127$ мм, $F = 1300$ мм)
разрешающая способность = $1'$		+ солнечный фильтр	+ редуктор фокуса 0.85 + окуляр 25 мм	+ линза Барлоу $3\times$ + окуляр 15 мм

Таблица 1. К определению оптических инструментов, используемых астрономом-любителем.

Ответьте на следующие вопросы (в соответствующую ячейку таблицы ниже запишите латинскую букву выбранного инструмента):

1.	В поле зрения какого оптического инструмента может полностью поместиться радуга?	2 балла	
2.	Какой оптический инструмент следует использовать для наблюдения Солнца?	2 балла	
3.	Какой оптический инструмент является оптимальным для близорукого человека, стремящегося рассмотреть звездные поля и целые созвездия?	2 балла	
4.	Какой из представленных инструментов обладает наибольшей проникающей силой?	2 балла	
5.	Какой из представленных инструментов наибольшей апертуры еще можно использовать в наблюдениях без штатива?	2 балла	
6.	Какой из представленных инструментов является оптимальным для наблюдений классических планет и планетарных туманностей?	2 балла	
7.	У какого инструмента с уменьшением яркости объекта ухудшается разрешающая способность?	2 балла	
8.	Какой из представленных инструментов обладает лучшей разрешающей способностью?	2 балла	
9.	В какой из инструментов (не считая глаз) невозможно рассмотреть Сатурн (без колец, в противостоянии) как неточечный объект?	2 балла	
10.	В поле зрения какого инструмента полностью не войдет диск Луны в полнолуние?	2 балла	

Решение. Правильно данные ответы представлены в таблице ниже.

1.	В поле зрения какого оптического инструмента может полностью поместиться радуга?	2 балла	А
2.	Какой оптический инструмент следует использовать для наблюдения Солнца?	2 балла	С

3.	Какой оптический инструмент является оптимальным для близорукого человека, стремящегося рассмотреть звездные поля и целые созвездия?	2 балла	В
4.	Какой из представленных инструментов обладает наибольшей проникающей силой?	2 балла	Д
5.	Какой из представленных инструментов наибольшей апертуры еще можно использовать в наблюдениях без штатива?	2 балла	С
6.	Какой из представленных инструментов является оптимальным для наблюдений классических планет и планетарных туманностей?	2 балла	Е
7.	У какого инструмента с уменьшением яркости объекта ухудшается разрешающая способность?	2 балла	А
8.	Какой из представленных инструментов обладает лучшей разрешающей способностью?	2 балла	Д
9.	В какой из инструментов (не считая глаз) невозможно рассмотреть Сатурн (без колец, в противостоянии) как неточечный объект?	2 балла	В
10.	В поле зрения какого инструмента полностью не войдет диск Луны в полнолуние?	2 балла	Е

Краткие комментарии:

1. Как известно, угловой радиус основной радуги составляет 42° , а значит угловой диаметр – 84° . Следовательно угловой диаметр поля зрения данного инструмента должен быть не меньше последней величины. Среди всех представленных инструментов наибольшим полем зрения, очевидно, обладает невооруженный глаз. Лишь в поле зрения глаз человека может поместиться полностью столь протяженный объект.

2. Среди представленных инструментов лишь полевой бинокль оснащен специальными солнечными фильтрами, позволяющими наблюдать Солнце. У остальных инструментов таких фильтров нет, а значит в данной комплектации их нельзя применять для наблюдения Солнца.

3. **Близорукость** – это недостаток зрения человека, проявляющийся в неспособности видеть четко удаленные предметы (в нашем случае – объекты небосвода). Однако это можно исправить посредством применения оптического инструмента. Из общей теории оптических инструментов известно, что *чем больше увеличение инструмента тем меньше его поле зрения*. Для наблюдения протяженных полей и целых созвездий необходим инструмент с большим полем зрения. Среди представленных инструментов наименьшим увеличением ($2.5\times$) обладает театральный бинокль, значит его поле зрения является наибольшим (не считая невооруженного глаза). Для достижения поставленной цели этот инструмент является оптимальным.

4. **Проникающей силой телескопа** традиционно называется максимальная звездная величина самых тусклых звезд, еще доступных в наблюдениях визуально с помощью данного инструмента. Эта величина может быть определена по формуле:

$$m_T = 2.1^m + 5^m \lg D, \text{ где } [D] = \text{мм}, \quad (1)$$

здесь D – диаметр объектива (главного зеркала или фронтальной линзы) телескопа. Из последнего выражения следует, что чем больше диаметр объектива, тем больше проникающая сила телескопа. Среди представленных инструментов наибольшим диаметром объектива обладает *рефлектор Ньютона*, $D = 150$ мм.

5. Чем больше фокусное расстояние объектива (или увеличение) оптического инструмента, тем больше его чувствительность к вибрациям и колебаниям его корпуса и тем хуже качество картинки в визуальных наблюдениях при этом. Лишь бинокли с небольшим увеличением вплоть до $10\times$ еще можно использовать без штатива. Оптические инструменты с большим увеличением рекомендуется использовать совместно со штативом. Следовательно ответом на данный вопрос является *полевой бинокль*.

6. Как известно, классические планеты и планетарные туманности обладают малыми угловыми размерами. Для визуальных наблюдений данных объектов необходимы оптические инструменты с большим увеличением. Среди представленных таким является телескоп Максудова-Кассегрена. Его увеличение в данной комплектации: $\Gamma = 1300 \times 3/15 = 260\times$.

7. Как известно, сетчатка *человеческого глаза* содержит два типа рецепторов: колбочки и палочки. Колбочки являются ответственными за цветовое восприятие образа и более требовательны к потокам падающего света. При низкой освещенности они перестают функционировать. Палочки, которые чувствительны к малым потокам света, отвечает за черно-белое изображение. При "отключении" колбочек функционируют лишь палочки, расстояние между которыми становится больше (нежели между палочками и колбочками), а значит угол, определяющий его разрешающую способность, будет больше! Говорят, что при этом разрешающая способность глаза (острота зрения) падает.

8. Разрешающая способность оптического инструмента (β_T), предназначенного для визуальных наблюдений, ограничена дифракцией света. Согласно, общей теории дифракции света, данный параметр, определяющий угловой радиус центрального диска Эйри, можно определить формулой:

$$\beta_T = 1.22 \frac{\lambda}{D}, \quad (2)$$

где λ – длина волны, на которой проводятся наблюдения; D – диаметр объектива инструмента. Из последнего выражения следует, что чем больше диаметр объектива, тем меньше угол β и тем выше разрешающая способность инструмента. Следовательно, среди всех представленных инструментов лучшей разрешающей способностью обладает рефлектор Ньютона.

9. Оценим угловой диаметр Сатурна без колец, в противостоянии:

$$D_s'' = \frac{2 \mathfrak{R}_s}{a_s} \times 206265'' = 17.4''.$$

Чтобы Сатурн наблюдался как неточный объект, его видимый угловой диаметр в оптический инструмент должен быть не меньше разрешающей способности человеческого глаза, т.е. $\Delta_s'' \geq 1' = 60''$. Отношение параметров Δ_s'' и D_s'' определяет увеличение оптического инструмента:

$$\Gamma = \frac{\Delta_s''}{D_s''} \geq \frac{60''}{17''} = 3.5\times.$$

Очевидно, что среди представленных инструментов меньшим увеличением, чем указанное значение, обладает лишь *театральный бинокль*.

10. Как было сказано выше, чем больше увеличение телескопа (Γ), тем меньше его поле зрения. Оценку для поля зрения телескопа можно получить следующим образом. Поле зрения среднестатистического окуляра, используемого с телескопом, составляет $\psi = 56^\circ$. Тогда угловой диаметр поля зрения телескопа будет определяться формулой:

$$\Psi_T = \frac{\psi}{\Gamma}.$$

Наибольшим увеличением среди представленных инструментов обладает телескоп Максудова-Кассегрена, для него имеем $\Psi_T = 0.21^\circ = 12.9'$, что меньше углового диаметра Луны ($32'$). Отметим, что угловой диаметр поля зрения человеческого глаза составляет более 90° , для театрального бинокля – $13 \div 16^\circ$, для полевого бинокля – $6 \div 8^\circ$, для телескопа Ньютона в данной комплектации – чуть более 2° .

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
За каждый правильно данный ответ	2(20)



Рис. 1. К определению малого солнечного гало.

№ 2. «Солнечное гало на экваторе в день равноденствия»

Условие. На рис. 1 представлена фотография малого солнечного гало – атмосферного оптического метеорологического явления, представляющего собой светящееся кольцо, образующееся вокруг Солнца, имеющее угловой радиус 22° и являющееся результатом рассеяния света на гексагональных кристаллах водяного льда. Предположим, что в результате влажной прохладной погоды данный феномен наблюдался в некоторой точке земного экватора все светлое время, в сутки равноденствия. Определите моменты местного среднего солнечного времени (уравнением времени пренебечь), соответствующие

1. Началу «восхода» и окончанию «захода» гало за горизонт. (6 баллов) Какая часть суток должна наблюдаться в эти моменты? Свой ответ укажите знаком «+» в ячейке под соответствующей частью суток в табл. 2. (2 балла)
2. Окончанию «восхода» и началу «захода» гало за горизонт. (4 балла) Чему равны продолжительность «восхода/захода» гало + время его пребывания полностью над горизонтом? (2 балла)
3. Чему равен телесный угол области небосвода, которую «замечает» солнечное гало в результате суточного движения Солнца, *полностью пребывая над горизонтом*. (6 баллов)

Часть суток				
День	Гражданские су- мерки	Навигационные сумерки	Астрономические сумерки	Астрономическая ночь

Таблица 2. К определению части суток в моменты начала «восхода»/окончания «захода» малого гало за горизонт.

Атмосферной рефракцией и искажениями образа гало вблизи горизонта пренебречь.

Решение. 1. Очевидно, начало «восхода»/окончание «захода» малого гало за горизонт отождествляются с моментами времени, когда его верхняя точка попадает на горизонт. При этом само Солнце должно располагаться под горизонтом на высоте $h_{\odot} = -\rho_H = -22^{\circ}$ (здесь ρ_H – угловой радиус малого гало). Поскольку в сутки равноденствия Солнце движется по небесному экватору, то легко связать часовой угол истинного солнца t_{\odot} с его высотой для наблюдателя на земном экваторе в момент начала «восхода» (1 балл):

$$t_{\odot}^{(H.B.)} = 270^{\circ} - h_{\odot} = 248^{\circ} = 16^{\text{h}}32^{\text{m}}.$$

Аналогично рассуждая, определим часовой угол окончания его «захода» за горизонт (1 балл):

$$t_{\odot}^{(O.З.)} = 90^{\circ} + h_{\odot} = 112^{\circ} = 7^{\text{h}}28^{\text{m}}.$$

Поскольку в указанные моменты высота Солнца меньше -18° , значит в эти моменты в месте наблюдения имеет место *астрономическая ночь*, поэтому начало «восхода» и окончание «захода» гало конечно увидеть невозможно. (2 балла)

Местное среднее солнечное время (T_m) связано с истинным солнечным временем T_{\odot} посредством уравнения времени (η) (1 балл):

$$T_m = T_{\odot} + \eta,$$

$\eta = 0$ – согласно условию задачи. Истинное солнечное время, в свою очередь, можно определить через часовой угол истинного солнца t_{\odot} (1 балл):

$$T_{\odot} = t_{\odot} + 12^{\text{h}}.$$

Из представленных формул получаем искомые моменты среднего солнечного времени (2 балла):

$$T_m = t_{\odot} + 12^{\text{h}}, \Rightarrow T_m^{(H.B.)} = t_{\odot}^{(H.B.)} + 12^{\text{h}} = 4^{\text{h}}32^{\text{m}}, \quad T_m^{(O.З.)} = t_{\odot}^{(O.З.)} + 12^{\text{h}} = 19^{\text{h}}28^{\text{m}}. \quad (3)$$

2. Окончанию «восхода» / началу «захода» гало за горизонт соответствуют моменты времени, когда нижняя точка гало будет расположена строго на математическом горизонте, при этом высота Солнца над горизонтом будет $h_{\odot} = \rho_H = 22^{\circ}$. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем (2 балла):

$$t_{\odot}^{(O.B.)} = 270^{\circ} + h_{\odot} = 292^{\circ} = 19^{\text{h}}28^{\text{m}}, \quad t_{\odot}^{(H.З.)} = 90^{\circ} - h_{\odot} = 68^{\circ} = 4^{\text{h}}32^{\text{m}}.$$

Соответствующие моменты среднего солнечного времени будут (1+1 балл)

$$T_m^{(O.B.)} = t_{\odot}^{(O.B.)} + 12^{\text{h}} = 7^{\text{h}}28^{\text{m}}, \quad T_m^{(H.З.)} = t_{\odot}^{(H.З.)} + 12^{\text{h}} = 16^{\text{h}}32^{\text{m}}. \quad (4)$$

Продолжительность «восхода/захода» гало и время его пребывания полностью над горизонтом определяются выражениями (2 балла):

$$\Delta T_m^{(B)} = T_m^{(O.B.)} - T_m^{(H.B.)} = 2^{\text{h}}56^{\text{m}}, \quad \Delta T_m^{(H.Г.)} = T_m^{(H.З.)} - T_m^{(O.B.)} = 9^{\text{h}}04^{\text{m}}. \quad (5)$$

3. Вычислим искомый телесный угол. Заметим, что область, которую замечает гало, пребывая полностью над горизонтом, можно представить в виде прямоугольной полосы (1), плоскостью симметрии которой является плоскость небесного экватора, и двух полукругов (2). Соответствующий телесный угол будет (1 балл)

$$\Omega_{\text{tot}} = \Omega_1 + \Omega_2. \quad (6)$$

Определим телесный угол Ω_2 , соответствующий двум полукругам, которые отвечают двум предельным положениям гало над горизонтом. Воспользуемся формулой для телесного угла, соответствующего шаровому сегменту с углом раствора α , видимому из центра сферы (1 балл):

$$\Omega_{\text{ш.с.}} = 2\pi(1 - \cos \alpha). \quad (7)$$

Очевидно, что $\Omega_2 = \frac{1}{2}\Omega_{\text{ш.с.}} + \frac{1}{2}\Omega_{\text{ш.с.}} = \Omega_{\text{ш.с.}}$, при этом в нашем случае $\alpha = \rho_H = 22^\circ$. В результате $\Omega_2 = 0.4575$ срад = 1502 кв. град. (1 балл)

Телесный угол прямоугольной полосы, плоскостью симметрии которого является небесный экватор, можно вычислить разными методами. Рассмотрим далее точный метод его расчета. Найдем прежде телесный угол прямоугольной полосы, протянувшейся вдоль всего небесного экватора. Заметим, что всей небесной сфере отвечает телесный угол $\Omega_{\text{сф.}} = 4\pi$. Вычтем из него два телесных угла, соответствующих шаровым сегментам сферы, где гало не может быть в указанные сутки. Каждый такой угол есть

$$\Omega_3 = 2\pi(1 - \cos \beta),$$

здесь $\beta = 90^\circ - \rho_H = 68^\circ$ – угол раствора конуса, на который опирается данный шаровой сегмент. Тогда телесный угол всей экваториальной полосы будет (1 балл)

$$\Omega_{\text{пол.}} = 4\pi - 2\Omega_3 = 4\pi \sin \rho_H.$$

Наша прямоугольная область лишь часть этой полосы. Причем ее протяженность вдоль экватора составляет угол $\psi = 180^\circ - 2\rho_H$. Тогда искомое значение телесного угла Ω_1 можно представить в виде (1 балл):

$$\Omega_1 = \frac{\psi}{360^\circ} \Omega_{\text{пол.}} = \pi \left(2 - \frac{\rho_H}{45^\circ} \right) \sin \rho_H = 1.7784 \text{ срад} = 5838 \text{ кв. град.}$$

В итоге искомый телесный угол представляется значением $\Omega_{\text{tot}} = 2.2359$ срад = 7340 кв. град. (1 балл)

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Определены часовые углы в момент начала «восхода» и окончания «захода» гало за горизонт	1+1
Использована корректная связь среднего солнечного и истинного солнечного времени + определено истинное солнечное время через часовой угол истинного солнца + вычислены моменты среднего солнечного времени для начала «восхода» + окончания «захода» гало за горизонт	1+1+1+1
Правильно определено время суток (астрономическая ночь), соответствующее указанным моментам	2
Определены часовые углы в момент окончания «восхода» и начала «захода» гало за горизонт	1+1
Вычислены моменты среднего солнечного времени для начала «захода» + окончания «восхода» гало над горизонтом	1+1
Вычислено время восхода/захода гало + время его пребывания над горизонтом	1+1
Представлен искомый телесный угол в виде суммы двух телесных углов, соответствующих шаровому сегменту и прямоугольной полосе + использована формула для телесного угла шарового сегмента + получено численное значение последнего + вычислен телесный угол для экваториальной полосы, заматаемой гало в течение суток + вычислен телесный угол рассматриваемой полосы + вычислен полный телесный угол	1+1+1+1 + 1+1

№ 3. «Угол между суточной параллелью Солнца и горизонтом»

Условие. Как известно, в течение года угол между суточной параллелью Солнца и горизонтом в точках его восхода и захода не остается постоянным.

1. Получите аналитическую формулу, устанавливающую связь между указанным углом, склонением Солнца и широтой места наблюдения. (8 баллов)

2. Определите интервал возможных значений для данного угла, достигаемых им в течение года в г. Самаре (широта – $53^{\circ}12'$, долгота – $50^{\circ}06'$). (6 баллов)

3. Представьте данный угол как функцию времени, прошедшего с момента весеннего равноденствия. (6 баллов)

Решение. 1. Искомую аналитическую зависимость между указанными параметрами можно получить в рамках двух альтернативных подходов: в рамках векторного анализа и сферической геометрии. Применение последнего метода осложняется тем фактом, что нам необходимо определить угол между плоскостью большого (математический горизонт) и малого круга (суточная параллель). Основным геометрическим объектом, используемым в сферической геометрии, является сферический треугольник, который определен на основе трех больших кругов. Однако суточная параллель – это малый круг. Чтобы избежать указанной трудности, всегда можно провести вспомогательный большой круг небесной сферы, дуга которого в малой окрестности точки захода небесного тела совпадает с его дугой суточной параллели. В результате исходная задача сводится к задаче определения угла между двумя большими кругами небесной сферы. (2 балла)

Определим угол α . Для этого рассмотрим сферический треугольник $\triangle_S SOW$, составленный из математического горизонта WO , небесного экватора SW и большого вспомогательного круга OS , дуга которого имитирует суточную параллель Солнца в точке (O) захода истинного солнца, см рис. 2. Заметим, что данный круг должен составлять с небесным экватором угол δ_{\odot} – склонение Солнца на данный момент, а его точка пересечения с ним должна отстоять на $1/4$ от полной дуги окружности (на 90°) от точки O. (1 балл) Воспользуемся формулами синусов и косинусов для элементов данного треугольника (1+1+1 балл):

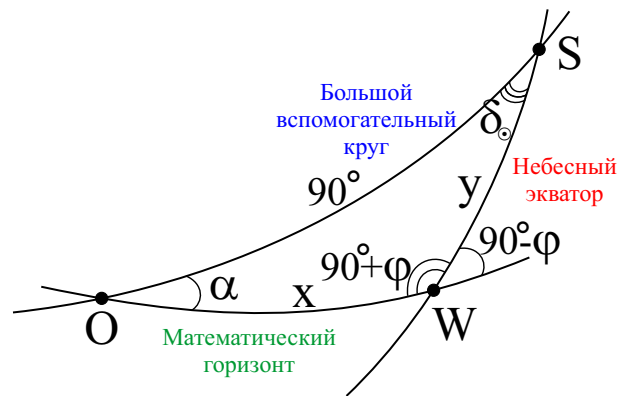


Рис. 2. К определению сферического треугольника $\triangle_S SOW$ и его элементов.

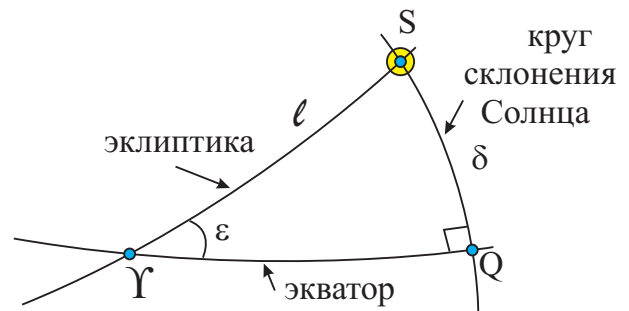


Рис. 3. К определению склонения Солнца.

$$\sin x \sin(90^{\circ} + \varphi) = \sin \delta_{\odot} \sin 90^{\circ}, \Rightarrow \sin x = \frac{\sin \delta_{\odot}}{\cos \varphi},$$

$$\sin \alpha \sin 90^{\circ} = \sin y \sin(90^{\circ} + \varphi), \Rightarrow \sin \alpha = \sin y \cos \varphi, \Rightarrow \sin y = \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi},$$

$$\cos y = \cos 90^{\circ} \cos x + \sin 90^{\circ} \sin x \cos \alpha, \Rightarrow \cos y = \sin x \cos \alpha, \Rightarrow$$

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1, \Rightarrow \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\sin \delta_{\odot}}{\cos \varphi} \cos \alpha \right)^2 = 1, \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \delta_{\odot}}}{\cos \delta_{\odot}}.$$

В результате получаем (2 балла)

$$\alpha = \arcsin \left[\frac{\sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \delta_{\odot}}}{\cos \delta_{\odot}} \right]. \quad (8)$$

2. Учтем далее, что склонение Солнца (δ_{\odot}), принимает значения из интервала (2 балла):

$$-\varepsilon \leq \delta_{\odot} \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 23^{\circ}26'.$$

Тогда на широте г. Самары в итоге имеем следующий интервал возможных значений (4 балла):

$$(21 \div 22.12, 20 \div 21.06)29^{\circ}13' \leq \alpha \leq 36^{\circ}48'(20 \div 21.03, 22 \div 23.09). \quad (9)$$

3. Для определения искомой зависимости заметим, что от времени в (8) может зависеть только склонение Солнца. Следовательно необходимо получить склонение как функцию времени, т.е. $\delta_{\odot}(t)$. Для этого рассмотрим сферический треугольник $\Delta_s \Upsilon SQ$ – в вершинах, которого располагаются точка весны Υ , Солнце (S), точка пересечения круга склонения Солнца с экватором (Q), см. рис. 3. Воспользуемся формулой синусов для него (2 балла)

$$\sin \delta_{\odot} \cdot \sin 90^{\circ} = \sin \ell_{\odot} \cdot \sin \varepsilon, \Rightarrow \sin \delta_{\odot} = \sin \ell_{\odot} \sin \varepsilon, \Rightarrow$$

$$\delta_{\odot} = \arcsin [\sin \ell_{\odot} \sin \varepsilon], \quad (10)$$

здесь $\ell_{\odot} = \omega_{\odot} t$ – эклиптическая долгота Солнца, отсчитываемая от точки весеннего равноденствия, t – время, отсчитываемое от момента наступления весеннего равноденствия; угловая скорость ω_{\odot} видимого движения Солнца по эклиптике есть (2 балла)

$$\omega_{\odot} = \frac{2\pi}{T_{\text{тр}}}, \quad T_{\text{тр}} = 365.24219 \text{ сут}, \quad (11)$$

где $T_{\text{тр}}$ – продолжительность тропического года. В результате искомая функциональная зависимость представляется в виде (2 балла):

$$\alpha(t) = \arcsin \left[\sqrt{\frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \omega_{\odot} t \sin^2 \varepsilon}{1 - \sin^2 \omega_{\odot} t \sin^2 \varepsilon}} \right]. \quad (12)$$

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Формулировка проблемы определения угла α на качественном уровне между большим и малым кругами + определение некоторых свойств вспомогательного большого круга	2 + 1
Применение двух формул синусов и одной формулы косинусов для сферического треугольника + явное аналитическое выражение для угла α как функции склонения Солнца и широты местности	2+1+2
Явно представлен диапазон возможных значений для склонения Солнца + определен интервал возможных значений для угла α	2 + 4
С использованием сферического треугольника получена аналитическая формула для склонения Солнца как функция его эклиптической долготы + представление последней через угловую скорость видимого движения Солнца по эклиптике	2+2
Представлен явный вид зависимости $\alpha(t)$	2

№ 4. «Незнайка на МКС и запуск наноспутников»

Условие. Незнайка отправился на Международную космическую станцию (МКС) в качестве космического туриста. Желая создать свою собственную сеть наноспутников, Незнайка решил самовольно запустить четыре наноспутника собственной сборки с помощью пневматической пушки с борта станции. Запуск был выполнен в четырех различных направлениях, со скоростью $V_0 = 50$ м/с относительно МКС: 1-ый – по направлению движения МКС, 2-ой – против направления движения МКС. В направлении, перпендикулярном плоскости орбиты, в северную полусферу небосвода был запущен 3-ий спутник, а 4-ый – перпендикулярно плоскости орбиты, в южную полусферу. Физику и астрономию Незнайка в школе, как известно, толком не учил, и потому не догадывался, что создал серьезную опасность столкновения МКС и запущенных спутников. Определите:

1. Какой(ие) из запущенных спутников представляе(ю)т опасность столкновения с МКС спустя один ее полный оборот? Сближение с МКС следует считать опасным, если расстояние между МКС и наноспутником меньше 5 км. Свой ответ обоснуйте строго математически.

2. Чему равны эксцентриситеты орбит, большие полуоси и сидерические периоды этих наноспутников? Орбиту МКС считать круговой, высота которой $h = 418$ км. (20 баллов)

Решение. 1. Очевидно, что радиус орбиты МКС составляет величину $a_0 = \mathfrak{R}_\oplus + h = 6789$ км, где \mathfrak{R}_\oplus – средний радиус Земли. Следовательно орбитальная скорость МКС и сидерический период ее обращения вокруг центра Земли составляют (1+1 балл)

$$V_0 = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_\oplus}{a_0}} = 7.663 \text{ км/с}, \quad T_0 = \frac{2\pi a_0}{V_0} = 5567 \text{ с}, \quad (13)$$

здесь G – универсальная гравитационная постоянная, \mathfrak{M}_\oplus – масса Земли.

2. Рассмотрим подробно движение первого спутника. Поскольку его запустили по направлению движения станции, то его геоцентрическая скорость на расстоянии a_0 стала больше круговой и составляла

$$V_1 = V_0 + \delta V = 7.713 \text{ км/с}, \quad (14)$$

при этом была ориентирована перпендикулярно направлению на центр Земли. Значит 1-ый наноспутник должен начать двигаться по эллиптической орбите с большой полуосью a_1 и эксцентриситетом ε_1 , при этом точка его запуска стала перигеем его орбиты. Следовательно его скорость в точке запуска можно записать иначе

$$V_1 = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_\oplus}{a_1} \frac{1 + \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}} = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_\oplus}{a_0} (1 + \varepsilon_1)} = V_0 \sqrt{1 + \varepsilon_1} \approx V_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right). \quad (15)$$

При записи последнего выражения было учтено, что малое приращение δV орбитальной скорости должно повлечь за собой малое изменение круговой орбиты. Следовательно орбита 1-ого спутника должна быть слабо сплюснутым эллипсом, а эксцентриситет ε_1 его орбиты должен быть малой величиной, для которой выполняется биномиальное приближение вида: $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, когда $x \ll 1$. Из сопоставления результатов (14) и (15) следует, что (1+1 балл)

$$\varepsilon_1 = \frac{2\delta V}{V_0} = 0.013, \Rightarrow a_0 = a_1(1 - \varepsilon_1), \Rightarrow a_1 = \frac{a_0}{(1 - \varepsilon_1)} \approx a_0(1 + \varepsilon_1) = 6877 \text{ км}. \quad (16)$$

С использованием третьего закона Кеплера можно определить сидерический период обращения 1-ого наноспутника вокруг Земли (1 балл):

$$\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3, \Rightarrow T_1 = T_0 \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{3/2} \approx T_0 \left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon_1\right) = 5676 \text{ с},$$

здесь T_0 – сидерический период обращения МКС вокруг центра Земли. Следовательно период 1-го спутника больше периода обращения МКС на величину $\Delta T_1 = T_1 - T_0 = \frac{3}{2}\varepsilon_1 T_0 = 3\delta V T_0/V_0 = 109$ с. Значит через время T_0 , когда МКС вновь окажется в точке запуска спутников, 1-ому спутнику до своего перигея придется двигаться еще время ΔT_1 . В силу близости его орбиты к круговой, расстояние от 1-го спутника до МКС можно оценить по формуле: $S_1 \approx V_1 \Delta T_1 \approx 3\delta V T_0 = 835$ км, (2 балла) что много больше $\Delta r = 5$ км, поэтому данный спутник не представляет угрозы столкновения для МКС в указанный момент. (1 балл)

3. В случае второго спутника имеем стартовую геоцентрическую скорость вида:

$$V_2 = V_0 - \delta V = 7.613 \text{ км/с}.$$

При этом, как и в случае 1-го спутника, начальная скорость в момент старта была ориентирована перпендикулярно направлению на Землю и по значению была меньше круговой скорости МКС, значит точка старта – это апогей орбиты данного спутника. Можно легко показать (по аналогии с 1-ым спутником), что эксцентриситет ε_2 , большая полуось a_2 орбиты и сидерический период обращения 2-го спутника будут (1+1+1 балл)

$$\varepsilon_2 = \frac{2\delta V}{V_0} = 0.013, \quad a_2 \approx a_0(1 - \varepsilon_1) = 6701 \text{ км}, \quad T_2 \approx T_0 \left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon_1\right) = 5458 \text{ с}. \quad (17)$$

Следовательно период 2-го спутника меньше периода обращения МКС на величину $\Delta T_2 = T_0 - T_2 = \frac{3}{2}\varepsilon_1 T_0 = 3\delta V T_0/V_0 = 109$ с. Следовательно через время T_0 , когда МКС вновь окажется в

точке запуска спутников, 2-ой спутник уже пройдет свой апогей раньше на ΔT_1 . В силу близости его орбиты к круговой, расстояние от 2-го спутника до МКС можно оценить по формуле: $S_2 \approx V_2 \Delta T_2 \approx 3\delta V T_0 = 835$ км, (2 балла) что много больше Δr , поэтому данный спутник также не представляет угрозы столкновения для МКС в указанный момент. (1 балл)

4. Рассмотрим движение 3-го и 4-го спутников. В момент старта их геоцентрическая скорость составит

$$V_3 = V_4 = \sqrt{V_0^2 + \delta V^2} \approx V_0 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta V}{V_0} \right)^2 \right) \approx 7.663 \text{ км/с.}$$

Как и в случае 1-го спутника, точка старта для 3-го и 4-го спутников является перигеями их орбит, причем начальная скорость отличается на очень малую величину от круговой скорости МКС. Значит и их орбиты есть слабо сплюснутые эллипсы с малыми эксцентриситетами. Из сравнения выражений (15) и (18) следует, что эксцентриситеты их орбит будут одинаковы и равны (1+1+1 балл)

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \left(\frac{\delta V}{V_0} \right)^2 = 4.26 \cdot 10^{-5}, \quad a_3 = a_4 = a_0(1 + \varepsilon_3) = 6789.3 \text{ км,} \quad (18)$$

$$T_3 = T_4 \approx T_0 \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon_3 \right) = 5567.4 \text{ с.} \quad (19)$$

Далее все рассуждения аналогичны случаю 1-го спутника. В результате можно оценить расстояние от данных наноспутников до МКС через время T_0 : $S_3 = S_4 \approx V_0 \cdot \frac{3}{2} \varepsilon_3 T_0 = \frac{3}{2} (\delta V_0 T_0) (\delta V / V_0) = 2.72$ км, (2 балла) что меньше величины Δr . Значит 3-й и 4-й спутники представляют опасность столкновения с МКС спустя один ее полный оборот. (1 балл) При этом возможное столкновение следует ожидать со стороны, противоположной направлению запуска спутника.

Т.о., 3-й и 4-й спутники представляют опасность столкновения с МКС спустя один ее полный оборот, остальные спутники такой опасности не представляют.

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Выполнен расчет орбитальной скорости МКС + сидерического периода обращения МКС	1+1
Вычислен эксцентриситет орбиты+ большая полуось+ сидерический период обращения для первого спутника с отклонением от авторского значения не более чем на $\pm 10\%$	1+1+1
Выполнена количественная оценка расстояния между МКС и первым наноспутником спустя период T_0 + явно указано на безопасность первого спутника	2 + 1
Вычислен эксцентриситет орбиты+ большая полуось + сидерический период обращения для второго наноспутника с отклонением от авторского значения не более чем на $\pm 10\%$	1 + 1 + 1
Выполнена количественная оценка расстояния между МКС и вторым наноспутником спустя период T_0 + явно указано на безопасность второго спутника	2 + 1
Вычислен эксцентриситет орбиты+ большая полуось + сидерический период обращения для третьего и четвертого наноспутников с отклонением от авторского значения не более чем на $\pm 10\%$	1 + 1 + 1
Выполнена количественная оценка расстояния между МКС и третьим и четвертым наноспутниками спустя период T_0 + явно указано на их опасность для МКС	2 + 1

№ 5. «Линзовидная галактика и темная материя»

Условие. Существует крупная линзовидная галактика с диаметром $D = 40$ кпк. Доминирующая часть звезд галактики входит в сферическую подсистему – звездный балдж, диаметр которого $d = 4$ кпк. Диск галактики состоит из звезд с пренебрежимо малой массой по сравнению с балджем. В балдже звезды распределены равномерно, а в диске звезды движутся по орбитам,

близким к круговым. Наблюдения показали, что зависимость линейной скорости движения звезд в галактике относительно ее центра от расстояния до него (в пределах балджа) возрастает по линейному закону, а далее (в диске) уже не зависит от расстояния до центра галактики (вплоть до границы) и равна $v_0 = 220$ км/с. Такое явление может быть объяснено наличием «темной материи», распределенной сферически симметрично относительно центра галактики. Определите:

1. Массу M_B балджа галактики (в кг и в массах Солнца), полагая, что количество темной материи в нем пренебрежимо мало. (3 балла)

2. Среднюю плотность $\bar{\rho}_B$ вещества балджа (в кг/м³) галактики и концентрацию звезд n_B (в пк⁻³) в нем, полагая, что он состоит из звезд, подобных Солнцу. (6 баллов)

3. Постройте график зависимости (в линейном или логарифмическом масштабе) средней массовой плотности галактики от расстояния до ее центра. (7 баллов)

4. Определите полную массу всей галактики (в кг и в массах Солнца). Какую долю (в %) составляет масса «темной материи», расположенной за пределами балджа, от массы галактики. (4 балла)

Решение. 1. С использованием второго закона Ньютона, записанного для звезды диска, расположенной у поверхности балджа и движущейся вокруг центра галактики по круговой траектории со скоростью v_0 , можно легко определить массу балджа (1+1+1 балла):

$$m \frac{v_0^2}{d/2} = \frac{G m \mathfrak{M}_B}{(d/2)^2}, \Rightarrow \mathfrak{M}_B = \frac{v_0^2 d}{2G} = 4.48 \cdot 10^{40} \text{ кг} = 2.25 \cdot 10^{10} \mathfrak{M}_\odot. \quad (20)$$

2. Среднюю плотность и концентрацию звезд определим стандартными выражениями (2+1+2+1 балл):

$$\bar{\rho}_B = \frac{\mathfrak{M}_B}{\frac{1}{6}\pi d^3} = \frac{3 v_0^2}{G \pi d^2} = 4.55 \cdot 10^{-20} \text{ кг/м}^3, \quad n = \frac{\mathfrak{M}_B/\mathfrak{M}_\odot}{\frac{1}{6}\pi d^3} = \frac{3 v_0^2}{\pi G \mathfrak{M}_\odot d^2} = 0.67 \text{ пк}^{-3}. \quad (21)$$

3. Согласно условию задачи, внутри балджа галактики орбитальная скорость v звезд линейно растет с расстоянием r до центра. Можно легко показать, что такая ситуация имеет место быть в случае его постоянной плотности ρ_0 . Действительно, (1 балл)

$$v(r) = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_B(r)}{r}} = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0 r^3}{3r}} = \sqrt{\frac{4\pi}{3} G \rho_0 \cdot r}.$$

Очевидно, что при $r = d/2$, $v = v_0$, тогда (1 балл)

$$\rho_0 = \frac{3 v_0^2}{G \pi d^2} = \bar{\rho}_B = 4.55 \cdot 10^{-20} \text{ кг/м}^3. \quad (22)$$

На расстояниях $r \geq d/2$ (за пределами балджа галактики) орбитальная скорость звезд – постоянная величина, следовательно из выражения для $v(r)$ следует, что (1 балл)

$$\mathfrak{M}_G(r) = \frac{v_0^2 r}{G}. \quad (23)$$

Рассмотрим тонкий сферический слой в гало между радиусами r и $r + \Delta r$. Его объем равен $\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r$, а масса составляет (1 балл)

$$\Delta \mathfrak{M}_G = \mathfrak{M}_G(r + \Delta r) - \mathfrak{M}_G(r) = \frac{v_0^2 \Delta r}{G} = \rho(r) 4\pi r^2 \Delta r, \Rightarrow \rho(r) = \frac{v_0^2}{4\pi G r^2} = \frac{\bar{\rho}_B}{3} \left(\frac{d}{2r} \right)^2.$$

В итоге имеем следующую зависимость плотности вещества галактики от расстояния до ее центра (1 балл):

$$\rho(r) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}_B = 4.55 \cdot 10^{-20} \text{ кг/м}^3, \text{ если } r \leq d/2, \\ \frac{\bar{\rho}_B}{3} \left(\frac{d}{2r} \right)^2 \text{ } r > d/2. \end{array} \right\} \quad (24)$$

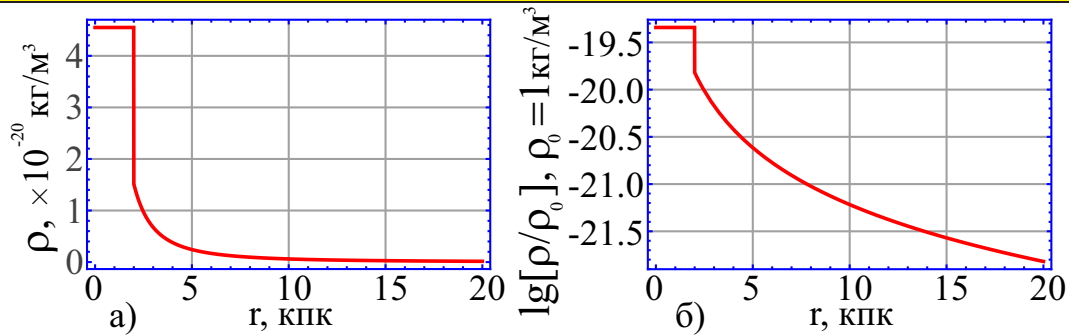


Рис. 4. Зависимость массовой плотности ρ в линзовидной галактике от расстояния r до ее центра: в а) линейном, б) логарифмическом масштабе.

Т.о., плотность постоянна до внешней границы балджа, затем скачком падает в 3 раза и далее убывает обратно пропорционально r^2 (см. рис. 4). (2 балла) Этот скачок соответствует излому кривой зависимости $v(r)$. В галактиках наблюдается быстрое уменьшение плотности при переходе от балджа к гало.

4. Полную массу линзовидной галактики можно определить по движению звезд диска на ее внешней границе, с помощью (23) (2 балла):

$$\mathfrak{M}_G = \frac{v_0^2 D}{2G} = 4.48 \cdot 10^{41} \text{ кг} = 2.25 \cdot 10^{11} \mathfrak{M}_\odot. \quad (25)$$

Следовательно, масса темной материи в периферийной части галактики будет (1 балл)

$$\mathfrak{M}_{DM} = \mathfrak{M}_G - \mathfrak{M}_B = \frac{v_0^2 (D - d)}{2G}.$$

Тогда искомая доля будет определяться выражением (1 балл):

$$\eta = \frac{\mathfrak{M}_{DM}}{\mathfrak{M}_G} \times 100\% = \frac{(D - d)}{D} \times 100\% = 90\%. \quad (26)$$

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Использован второй закон Ньютона + получено явное аналитическое выражение для массы балджа + выполнен корректный численный расчет данной величины в двух единицах измерения	1 + 1 + 1
Получены явно аналитические выражения для средней массовой плотности вещества балджа + концентрации звезд в терминах известных величин и фундаментальных констант + их корректные численные значения	2+2+1+1
Обосновано постоянство плотности внутри балджа + получено явное аналитическое выражение для данного параметра + определена зависимость массы Галактики от расстояния до центра за пределами балджа + получена аналитическая зависимость плотности вещества от расстояния до центра за пределами балджа + построена общая формула зависимости плотности от расстояния до центра в теле галактики + построен искомый график	1+1+1+1+1+2
Определена полная масса галактики + вычислена масса темной материи в данной галактике + определена искомая доля	2+1+1

№ 6. «Сатурн и Рея в кадре АМС Кассини»

Условие. Во второй декаде 21 века автоматической межпланетной станцией (АМС) Кассини в процессе движения вокруг Сатурна по орбите, близкой к круговой, был получен любопытный снимок (см. рис. 5) центральной планеты и его второго по размерам спутника – Реи. Определите:

1. Радиус (в км) круговой орбиты АМС на момент съемки. (9 баллов)
2. Планетоцентрическую орбитальную скорость АМС (в км/с) и период ее обращения вокруг Сатурна (в сут.). (3+3 баллов)



Рис. 5. Сатурн и его спутник Рея. Кадр, получен АМС Кассини (Источник – NASA/Goddard Space Flight Center).

3. Расстояние (в км), на котором находилась АМС от Реи на момент съемки. Орбиту Реи следует считать круговой. (3 балла)

4. Чему равен угловой диаметр Реи (в угловых минутах) на фотографии? (2 балла)

Решение. 1. Для определения радиуса круговой орбиты АМС на момент съемки, прежде всего, определим линейный масштаб μ_ℓ фотографии, соответствующий расстоянию от АМС до лимба части видимого диска Сатурна, представленной на рис. 5 (1 балл):

$$\mu_\ell = \frac{\mathfrak{R}_h}{R_h}, \quad (27)$$

здесь $\mathfrak{R}_h = 60268$ км – истинное значение экваториального радиуса Сатурна, представленное в справочных данных; R_h – экваториальный радиус Сатурна, определенный по фотографии. Последний параметр определить непосредственно по фотографии не представляется возможным, поскольку диск центральной планеты не виден даже наполовину из-за малости поля зрения камеры, использованной для получения фото. Поэтому воспользуемся следующей методикой и рассмотрим рис. 6.а). Выполним дополнительное построение. Отметим точку A пересечения видимого диска с правой границей кадра. Как известно, кольца Сатурна лежат в плоскости его экватора и на рис. 5 они фактически перпендикулярны верхней границе фотографии, значит и плоскость экватора планеты перпендикулярна верхней границы кадра. Проведем горизонтальную хорду AB и найдем ее середину – точку C . Определим половину ее длины – $\ell = AB/2 = 72.5$ мм (здесь и далее Ваши значения могут отличаться от указанных, при использовании фотографии в ином масштабе). Далее построим перпендикуляр CD до границы видимого диска. Определим его длину – $h = 14.5$ мм. Полученный круговой сегмент $ACBD$ не должен быть слишком большим и должен располагаться симметрично относительно экватора, чтобы уменьшить погрешности определения искомых величин, обусловленных существенным изменением радиуса планеты при увеличении планетоцентрической широты (планета обладает самым большим сжатием среди классических планет!). Воспользуемся теоремой Пифагора для треугольника $\triangle OAC$, катетами

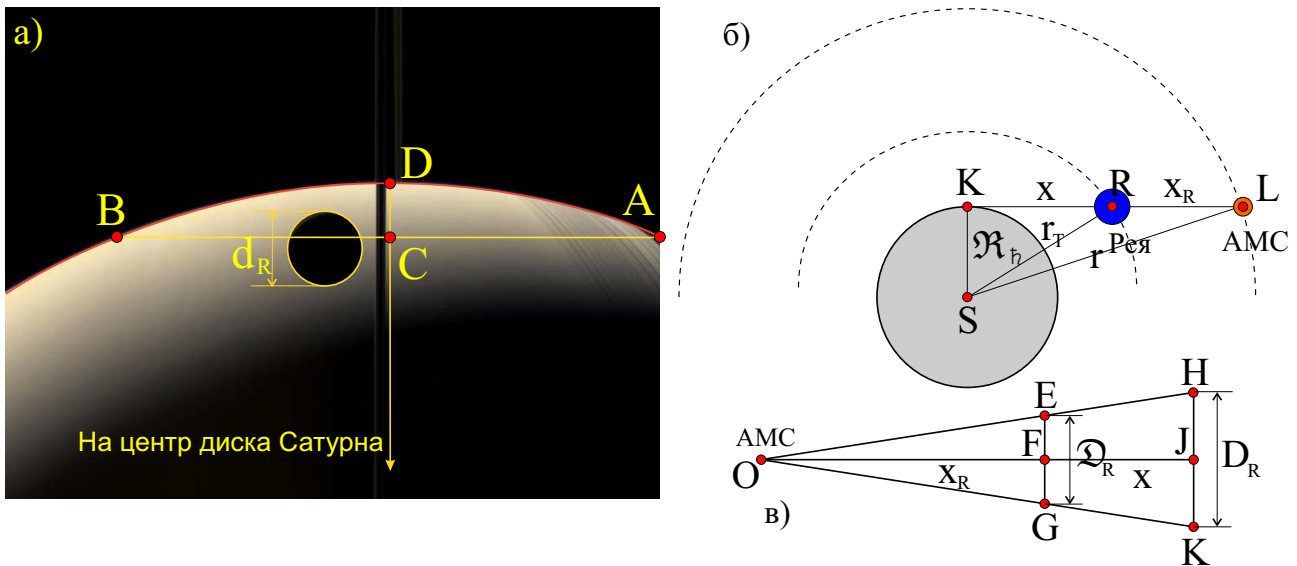


Рис. 6. К определению а) линейного масштаба фотографии, б) радиуса орбиты AMC.

которого являются стороны AC , CO , где O – центр диска Сатурна (на фото не представлен), и гипотенузой $AO = R_h$ (3 балла):

$$R_h^2 = (R_h - h)^2 + \ell^2, \Rightarrow R_h = \frac{\ell^2 + h^2}{2h} = 188.5 \text{ мм.} \quad (28)$$

Следовательно линейный масштаб фотографии (1 балл):

$$\mu_\ell = 319.7 \text{ км/мм.} \quad (29)$$

Представим взаимное расположение Сатурна, Реи и AMC на момент съемки (см. рис. 6.б). Заметим, что полученный линейный масштаб μ_ℓ позволяет определить линейные размеры всех объектов, расположенных на расстоянии $KL = x + x_R$ – расстоянии от AMC до лимба видимого диска Сатурна. По фотографии определим диаметр видимого диска Реи – $d_R = 20$ мм. С использованием масштаба, определим истинный диаметр Реи, если бы последняя находилась на расстоянии x и имела тот же угловой диаметр, что и на фото: $D_R = \mu_\ell \cdot d_R = 6394.5$ км. Истинный диаметр Реи согласно справочным данным составляет $\mathfrak{D}_R = 1530$ км. Из подобия треугольников $\triangle OEF$ и $\triangle OHJ$ (см. рис. 6.в) следует, пропорция вида (1 балл):

$$\frac{D_R}{x + x_R} = \frac{\mathfrak{D}_R}{x_R}, \Rightarrow x_R = \frac{x \mathfrak{D}_R}{(D_R - \mathfrak{D}_R)}.$$

Из прямоугольного треугольника $\triangle SKR$ (см. рис. 6.б) следует, что (1 балл)

$$x = \sqrt{r_R^2 - \mathfrak{R}_h^2} = 523583 \text{ км,}$$

здесь $r_R = 527040$ км – радиус круговой орбиты Реи (согласно справочным данным).

В итоге получаем явное выражение для радиуса орбиты AMC из прямоугольного треугольника $\triangle SKL$ (см. рис. 6.б) (1+1 балл):

$$r = \sqrt{(x + x_R)^2 + \mathfrak{R}_h^2} = \sqrt{\frac{D_R^2}{(D_R - \mathfrak{D}_R)^2} (r_R^2 - \mathfrak{R}_h^2) + \mathfrak{R}_h^2} = 6.909 \cdot 10^5 \text{ км.} \quad (30)$$

2. Планетоцентрическую орбитальную скорость AMC и период ее обращения вокруг Сатурна можно вычислить по формулам вида (2+1/2+1 балл):

$$V = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_h}{r}} = 7.41 \text{ км/с, } T = \frac{2\pi r}{V} = 5.86 \cdot 10^5 \text{ с} = 6.78 \text{ сут.} \quad (31)$$

3. Расстояние, на котором находилась АМС от Реи в момент съемки, очевидно, можно записать так (2+1 балл)

$$x_R = \frac{\mathfrak{D}_R}{(D_R - \mathfrak{D}_R)} \sqrt{r_R^2 - \mathfrak{R}_\eta^2} = 6.883 \cdot 10^5 \text{ км.} \quad (32)$$

4. Угловой диаметр Реи на фотографии представляется в виде (1+1 балл):

$$D''_R = \left(\frac{\mathfrak{D}_R}{x_R} \right) \times 3438' = 7.64'. \quad (33)$$

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Представлена формула для линейного масштаба фотографии + правильная методика определения линейного радиуса Сатурна на фотографии + получено численное значение линейного масштаба + из подобия треугольников получена связь между расстоянием до Реи (x_R) и от нее до лимба Сатурна (x) + вычислено расстояние x + получено аналитическое выражение для радиуса орбиты АМС + получено корректное численное значение с отклонением от авторского не более чем на $\pm 10\%$	1+3+1+1+ 1+ 1+ 1
Представлены аналитические формулы для орбитальной скорости АМС и периода ее обращения + получены корректные численные значения с отклонением от авторского не более чем на $\pm 10\%$	(2+2)+(1+1)
Представлено итоговое аналитическое выражение для расстояния от АМС до Реи + получено правильное численное значение с отклонением от авторского не более чем на $\pm 10\%$	2+1
Представлена аналитическая формула + получено численное значение для углового диаметра Реи с отклонением от авторского не более чем на $\pm 10\%$	1+1

На решение задач данного этапа Олимпиады участникам отводится 4 часа.

Основные справочные данные

§1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Световой год – $1 \text{ св. г.} = 9.461 \cdot 10^{15} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 70.0 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

§2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая визуальная звездная величина – -26.74^m
- Видимая болометрическая звездная величина – -26.80^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Интегральный поток энергии на расстоянии Земли – 1360 Вт/м^2
- Поток энергии в видимых лучах на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

§3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$
- Экваториальный радиус – 6378.14 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Средний (по объему) радиус – 6371.01 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

§4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 363300 км
- Максимальное расстояние от Земли – 405500 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055

- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^{\circ}09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или $1/81.3$ массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – 12.7^m

§5. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность г·см ⁻³	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты градусы	Геометрич. альbedo	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики градусы	Период обращения	Синодический период сут
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

§7. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбе-до	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§8. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.