

САМАРСКИЙ РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ДЛЯ ОДАРЕННЫХ ДЕТЕЙ
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ
КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ
ОТКРЫТОЙ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ ОЛИМПИАДЫ
ПО АСТРОНОМИИ им. Ф.А. БРЕДИХИНА
СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 7-9 КЛАССОВ.
СЕЗОН: 2022-2023, ТУР № 1



Самара, 2022 г.

Дорогие Друзья!

Вашему вниманию в данном релизе представлены 10 оригинальных задач двух уровней сложности – «Новичок» (уровень А), «Знаток» (уровень В). Задачи составлены в соответствии с *Перечнем вопросов, рекомендуемых Центральной предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады школьников по астрономии для подготовки обучающихся 7-9 классов к решению задач ее различных этапов.*

При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!

Ссылка: «Условия и решения конкурсных задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2023 среди обучающихся 7-9 классов. Тур № 1». – <https://sites.google.com/site/samrasolimp/>

Составитель: – *Филиппов Юрий Петрович*, научный руководитель школы, методист СРЦОД, к.ф.-м.н., доцент кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева.

Верстка в системе *ВТ_EX* – Филиппов Ю.П., Белозерская Л.Н.

Памятка участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2023

1. Официальный сайт Астрошколы:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/>

2. Официальная группа в VK:

vk.com/bredikhinolimp

3. Сроки подачи решений задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2023 тура № 1 на проверку:

15.10.2022-30.11.2022!!!

4. Электронный ящик ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2023:

samrasolimp@mail.ru

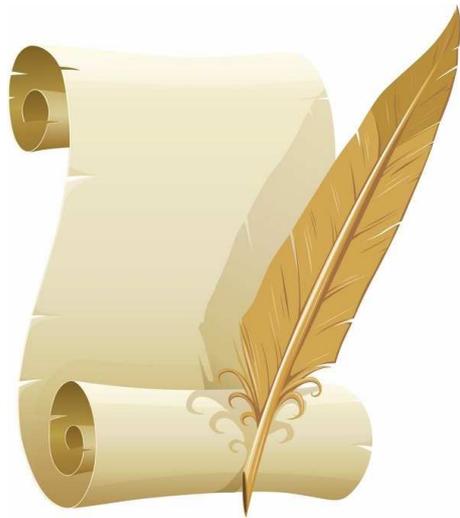
5. Руководство зарегистрированного участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2023:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/maindocs>

ИЛИ

<https://vk.com/bredikhinolimp>

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ



Дорогие Друзья!

Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2023, **внимательно** ознакомьтесь с «**Руководством зарегистрированного участника ОМОА им Ф.А. Бредихина-2023**»! Электронный адрес последнего указан в **Памятке участника.**

Уровень «Новичок» (уровень А)

№1. «Мозаика атмосферных явлений»

На рис. 1 представлена мозаика изображений явлений, происходящих в атмосфере Земли. Определите: (I) название каждого явления; (II) причину его появления; (III) высоту области его образования над поверхностью Земли; (IV) характерное время года его появления в г. Самаре. Заполните табл. 1. В строках (I)-(III) необходимо прописать буквенное обозначение данного явления согласно рисунку. В строке (IV) необходимо написать словами времена года (лето, осень, зима, весна или круглый год). (0.5 балла за каждую правильно названную позицию).

| | Название явления | Радуга | Серебристое облако | Метеор | Молния |
|------------|-----------------------------------|--|--|--|---|
| I | Обозначение | | | | |
| | Причина появления данного явления | Отражение и рассеяние солнечного света на кристаллах водяного льда | Преломление, отражение и дисперсия света на каплях дождя | Искровой разряд между облаком и Землей | Вхождение космической частицы в атмосферу Земли и ее взаимодействие с последней |
| II | Обозначение | | | | |
| | Высота над поверхностью Земли | 0 ÷ 2 км | 0 ÷ 10 км | 75 ÷ 95 км | 80 ÷ 120 км |
| III | Обозначение | | | | |
| | Обозначение | а) | б) | в) | г) |
| IV | Время года для наблюдений | | | | |

Таблица 1. Возможные явления атмосферы Земли, их причины появления, характерная высота расположения области их образования и характерные времена года их наблюдения.

№2. «Значимые события в истории астрономии»

Вашему вниманию представлены ниже две таблицы: в первой таблице представлены названия значимых событий в истории астрономии; во второй –

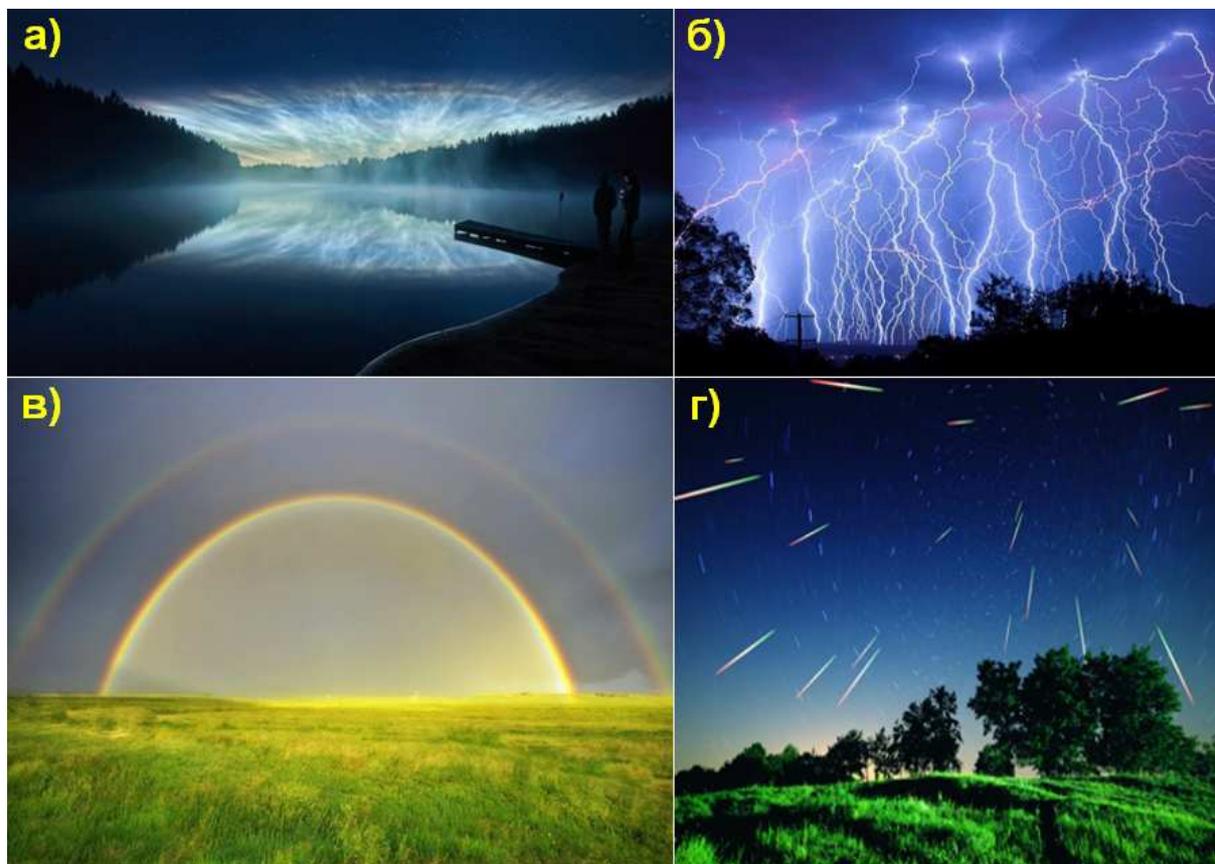


Рис. 1. Явления земной атмосферы.

представлены соответствующие им даты. Установите соответствие между событиями и датами. Каждой позиции первой таблицы поставьте в соответствие позицию второй таблицы. Ответ представьте в виде пары: "цифра-буква", например 2)-3). (1 балл за каждую правильно названную пару).

| | | | |
|---|--|---|---|
| 1) Проверка Артуром Эддингтоном ОТО Эйнштейна по отклонению светового луча в гравитационном поле Солнца | 2) Определение Эратосфеном размеров земного шара | 3) Начало эры телескопических наблюдений, положенное Галилео Галилеем | 4) Введение в Римской империи Юлианского календаря |
| 5) Создание Тихо Браге первой европейской обсерватории – Ураниборг | 6) Построение Гиппархом первого звездного каталога, классификация звезд по видимой яркости | 7) Создание В.Я. Струве первого каталога двойных звезд | 8) Первые оценки Аристарха Самосского для расстояний до Солнца и Луны |

| | | | |
|-------------------|-------------------|-----------------|-------------------|
| А) 1576 г. н.э. | Б) 240 г. до н.э. | В) 1610 г. н.э. | Г) 140 г. до н.э. |
| Д) 46 г. до н. э. | Е) 1919 г. н.э. | Ж) 265 до н. э. | З) 1822 г. н.э. |

№3. «Город Самара: его небосвод и время»

Вашему вниманию представлен ряд утверждений об особенностях наблюдений небосвода и счета времени в городе Самаре. Необходимо строго математически доказать истинность или ложность каждого утверждения. В случае ложности утверждения необходимо также найти правильный ответ. За каждое верное исчерпывающее доказательство для каждого утверждения – 3 балла.

1. Как известно, географическая широта г. Самары составляет $\varphi = 53^{\circ}12'$, а долгота – $\lambda = 50^{\circ}06'$. Этот город относится к пятому часовому поясу.

2. Высота Солнца в полдень в день летнего солнцестояния в г. Самаре составляет $60^{\circ}14'$.

3. Высота над горизонтом звезды Сириус (α Большого Пса, $\alpha_* = 06^{\text{h}}45^{\text{m}}9^{\text{s}}$, $\delta_* = -16^{\circ}42'58''$) в течение суток в г. Самаре не может превышать $+15^{\circ}$.

4. Время пролета низкоорбитального спутника над г. Самарой вдоль меридиана близко к 6.3 секунды. Известно, что протяженность этого города с севера на юг составляет 50 км, а с запада на восток – 20 км.

№4. «Лунный глобус СРЦОД»

В Самарском региональном центре для одаренных детей на уроках астрономии, при изучении природы Луны, используется в качестве демонстрационной модели лунный глобус (см. рис. 2). Глобус имеет диаметр $D_{\text{Г}} = 32$ см, ночную подсветку, осуществляемую лампой накаливания мощностью $P_{\text{Л}} = 25$ Вт. Определите:

1. Во сколько раз радиус Луны больше соответствующего размера глобуса (по сути, необходимо определить линейный масштаб глобуса)? (2 балла)

2. Чему равен диаметр кратера Платон на данном глобусе, если его истинный диаметр равен 100 км? (3 балла)

3. Чему равен истинный диаметр кратера Коперник (в км), если его образ представлен на рис. 2? (3 балла)

4. На каком расстоянии должен располагаться глобус от обучающегося Центра, чтобы последний его мог наблюдать под таким же углом как и Луну? Орбиту Луны считать круговой. (2 балла)

5. Чему равна линейная скорость точек экватора глобуса, если последний вращать с угловой скоростью суточного вращения Луны? (2 балла)

Уровень «Знаток» (уровень В)**№5. «Глобус как Луна»**

На каком расстоянии необходимо расположить лунный глобус (см. условие предыдущей задачи) от наблюдателя, чтобы он создавал на его сетчатке такую же освещенность, что и Луна в полнолуние? Необходимо учесть, что лишь 5% от полной мощности, подаваемой на лампу, приходится на видимый

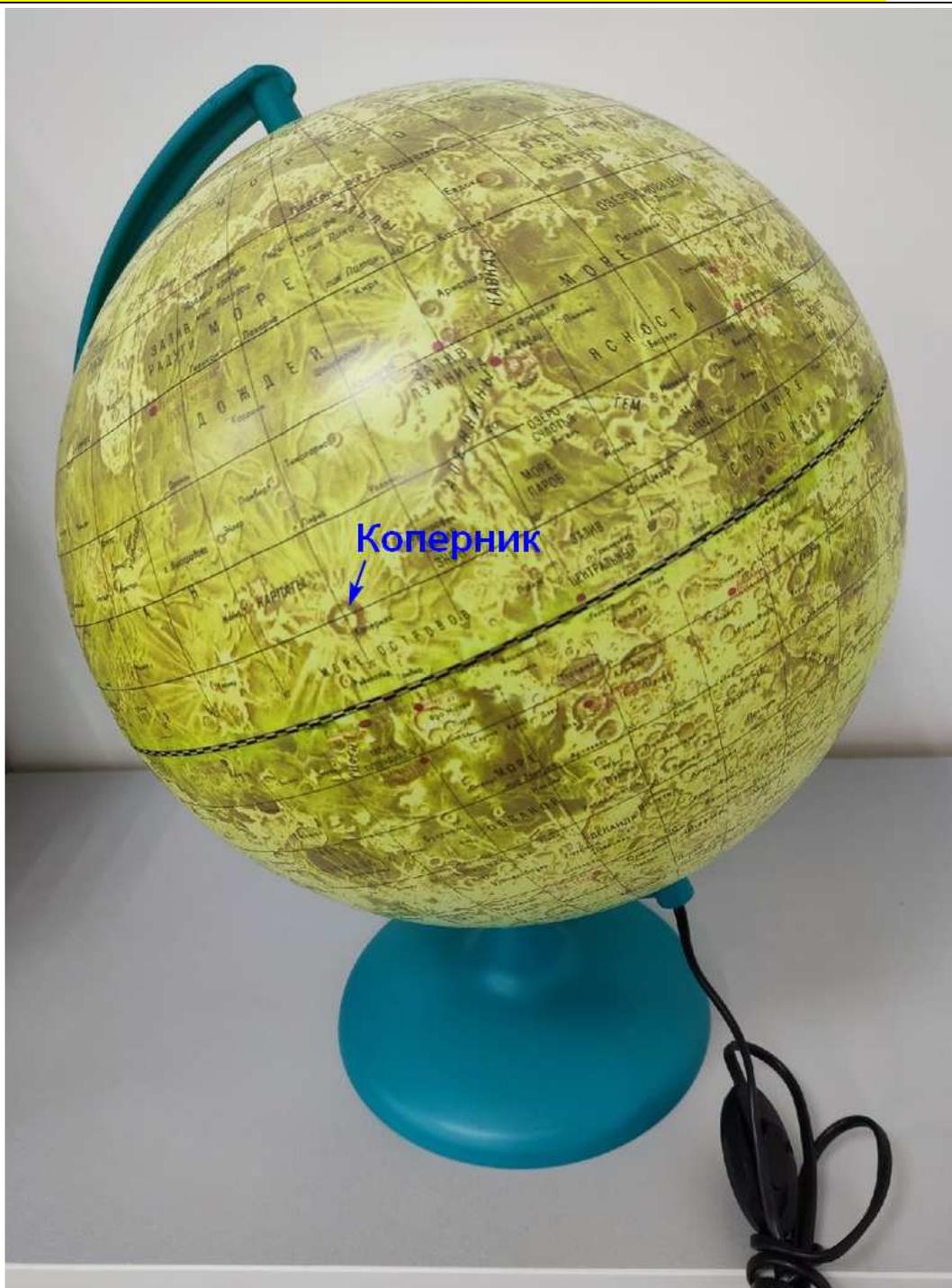


Рис. 2. Лунный глобус (автор фото – Филиппов Юрий).

свет. Коэффициент прозрачности материала глобуса для видимого света составляет 20%. (11 баллов)

№6. «Перedelка маятниковых часов»

Чему должно быть равно относительное изменение длины маятника часов, правильно демонстрирующих ход среднего солнечного времени, чтобы они стали правильно показывать ход звездного времени? Чему равно абсолютное изменение длины маятника часов (в мм), если период их начальных малых колебаний (до переделки) был $T_0 = 1$ средняя солнечная секунда? Следует полагать, что к устройству часов применима модель математического маятника, ускорение свободного падения у поверхности Земли – 10 м/с^2 . (12 бал-

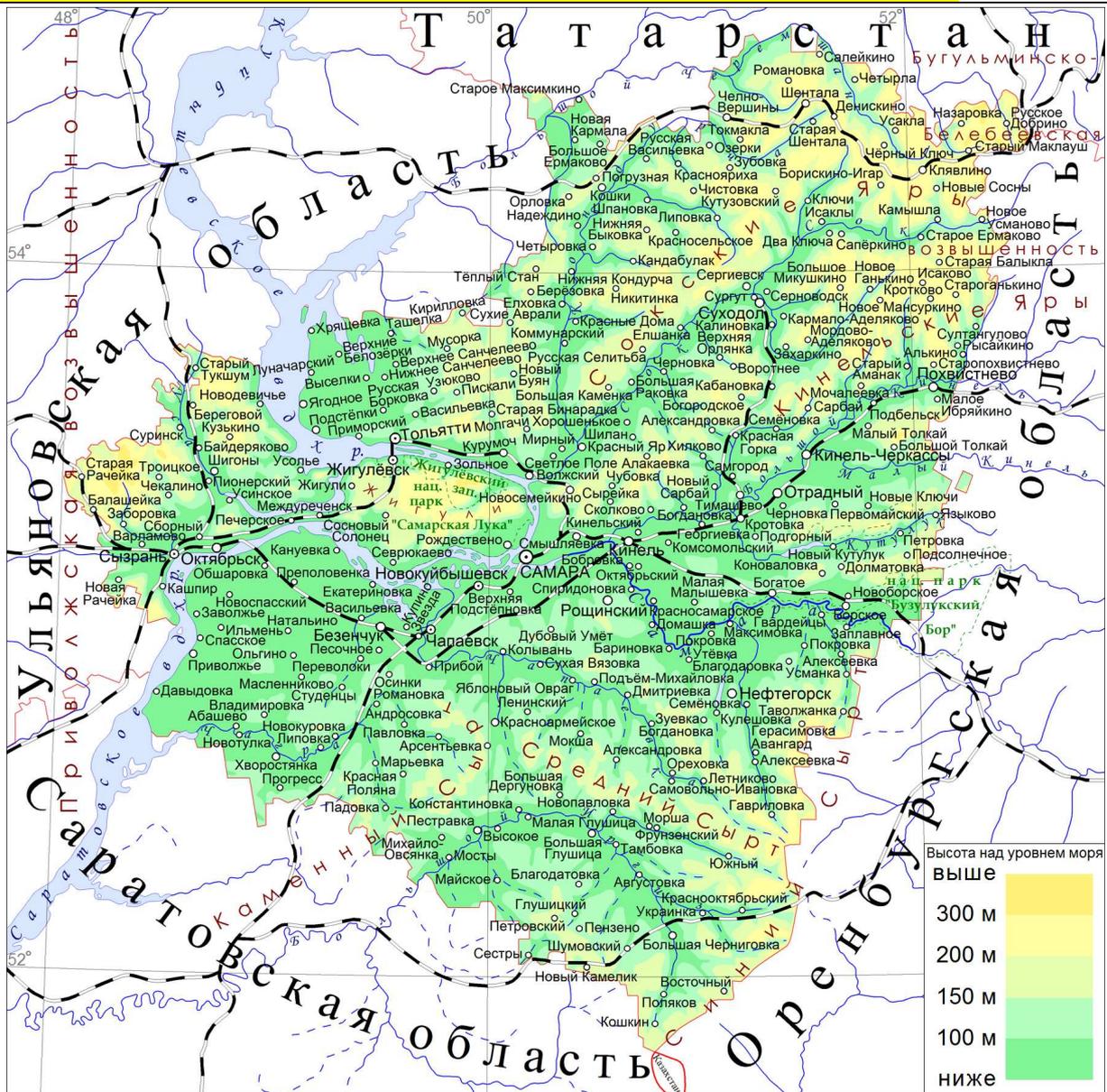


Рис. 3. Карта Самарской области (источник фото – Wikipedia.org).

лов)

№7. «МКС над праздничной Самарой»

В настоящее время Международная космическая станция (МКС) движется вокруг Земли по почти круговой орбите высотой 418 км и наклоном 51.63°. Известны координаты пограничных точек Самарской области, представленные в таблице.

| Пограничные точки Самарской области и их геокоординаты | | | |
|---|---|---|---|
| Южная | Северная | Восточная | Западная |
| $\varphi_S = +51^{\circ}47'$; $\lambda_S = 50^{\circ}47'$ | $\varphi_N = +54^{\circ}41'$; $\lambda_N = 51^{\circ}23'$ | $\varphi_E = +54^{\circ}20'$; $\lambda_E = 52^{\circ}35'$ | $\varphi_W = +53^{\circ}22'$; $\lambda_W = 47^{\circ}55'$ |

Определите:

1. Бывает ли МКС в зените над точками Самарской области? Если да, то укажите на карте Самарской области (см. рис. 3) примеры ее населенных пунктов, над которыми МКС хотя бы иногда бывает в зените? Если не

бывает, то оцените минимальное возможное зенитное расстояние МКС для "ближайшей" точки Самарской области. (2 балла)

2. Оцените минимальное возможное линейное расстояние (в км) между МКС и центром города Самары ($\varphi_0 = 53^\circ 12'$, $\lambda_0 = 50^\circ 06'$)? (2 балла)

3. Оцените максимальное время видимости над горизонтом пролетающей МКС над точкой Самарской области. (3 балла)

4. Оцените звездную величину МКС у горизонта, если видимая звездная величина МКС в верхней кульминации в "ближайшей" точке Самарской области составляет -5.6^m . Бугеровское поглощение света атмосферой в зените есть $\Delta m = 0.3^m$. Земную атмосферу следует считать однородной газовой оболочкой толщиной 100 км. Следует полагать, что все время движения от кульминации до горизонта поток отраженного света корпусом МКС в направлении земного наблюдателя оставался неизменным. (3 балла)

5. 11 сентября 2022 года в г. Самаре на главной площади города состоялся большой праздничный концерт, посвященный дню города, на который пришли около 80 тысяч самарцев. По просьбе конферансье все участники достали свои сотовые телефоны, включили фонарики, посылая свой сигнал пролетающей МКС над Самарой. Оцените интегральную звездную величину всех фонариков площади для члена экипажа МКС, если полагать, что мощность всех фонариков одинакова и равна 0.5 Вт. МКС в этот момент располагалась на минимально возможном расстоянии от города. (4 балла)

№8. «Закат Луны в г. Самаре»

Определите минимальное и максимальное значения времени захода Луны за горизонт в г. Самаре ($\varphi = 53^\circ 12'$, $\lambda = 50^\circ 06'$). Атмосферную рефракцию света не учитывать. (14 баллов)

№9. «Максимальное сжатие диска Луны»

С использованием феноменологических формул

1. **Беннетта** для определения величины рефракции δh (в угловых минутах) в зависимости от видимой высоты светила h_a (в градусах):

$$\delta h = \operatorname{ctg} \left(\frac{h_a}{1^\circ} + \frac{7.31^\circ}{h_a + 4.4^\circ} \right). \quad (1)$$

2. **Смартсона** для определения величины рефракции δh (в угловых минутах) в зависимости от истинной высоты светила h_0 (в градусах):

$$\delta h = 1.02 \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{h_0}{1^\circ} + \frac{10.3^\circ}{h_0 + 5.1^\circ} \right), \quad (2)$$

определите максимальное значение (в %) сжатия лунного диска, обусловленного рефракцией света. Следует полагать, что в этот момент Луна располагалась на среднем расстоянии от Земли. (14 баллов)

№10. «Годы Земли и не только...»

Как известно, сегодня тропический год Земли составляет 365.242188315 суток, а звездный год Земли – 365.256363004 суток. Ответьте на следующие вопросы:

1. Почему тропический год меньше звездного года? (2 балла)
2. В каком направлении движется точка весеннего равноденствия? По какому большому кругу движется эта точка? С использованием представленных данных, оцените угловую скорость годичного движения точки весны (в угловых секундах в год). (4 балла)
3. Оцените количество лет, которое прошло с того момента, когда день зимнего солнцестояния приходился на момент прохождения Землей через перигелий (5 января) своей орбиты? (3 балла)
4. Оцените количество лет спустя от настоящего момента, до момента, когда день зимнего солнцестояния будет приходиться на 21 июня? В каком созвездии при этом будет находиться точка весны? (3 балла)
5. Оцените период прецессионного движения северного полюса мира. Пренебрегая изменением угла между осями мира и эклиптики в течение указанного промежутка времени, оцените количество звезд, видимых невооруженным глазом, которые попадают внутрь **круга прецессии** – области небосвода, описываемой северным/южным полюсом мира в течение одного периода прецессии. Следует полагать, что все звезды, видимые невооруженным глазом, распределены по небосводу равномерно. (3 балла)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



Уровень «Новичок» (уровень А)

№1. «Мозаика атмосферных явлений»

Радуга – это атмосферное оптическое явление, обусловленное отражением, преломлением и дисперсией солнечного света на "стене" из водяных капель (дождя или тумана). Представляется традиционно разноцветной дугой окружности, возвышающейся над поверхностью Земли (см. рис. 1.в). Радуга, как правило, возникает на высоте $0 \div 10$ км и может наблюдаться в любое время года, когда возможно существование облаков из водяных капель, то есть в г. Самаре это весна, лето и осень.

Серебристое облако – это атмосферное явление, облако из ледяных кристаллов, возникающее в мезосфере Земли на высоте $75 \div 95$ км. Данное облако видно у поверхности Земли благодаря отражению солнечного света на кристаллах водяного льда (см. рис. 1.а). Серебристые облака на широте г. Самары можно наблюдать лишь в конце мая, весь июнь и первые две декады июля. Таким образом, их можно наблюдать весной и летом.

Метеор (явление падающей звезды) – это атмосферное явление, возникающее в мезосфере и термосфере Земли, на высоте $80 \div 120$ км и обусловлено вхождением космических частиц в атмосферу Земли, их взаимодействием с последним. Изображения метеоров представлены на рис. 1.г. Данное явление наблюдается круглый год в любой точке поверхности Земли.

Молния – это атмосферное электрическое явление (см. рис. 1.б), видимое как вспышка света, сопровождающая искровой разряд между облаком и Землей. Возникает, как правило, между самыми низкими облаками и по-

| | Название явления | Радуга | Серебристое облако | Метеор | Молния |
|------------|-----------------------------------|--|--|--|---|
| I | Обозначение | в | а | г | б |
| | Причина появления данного явления | Отражение и рассеяние солнечного света на кристаллах водяного льда | Преломление, отражение и дисперсия света на каплях дождя | Искровой разряд между облаком и Землей | Вхождение космической частицы в атмосферу Земли и ее взаимодействие с последней |
| II | Обозначение | а | в | б | г |
| | Высота над поверхностью Земли | $0 \div 2$ км | $0 \div 10$ км | $75 \div 95$ км | $80 \div 120$ км |
| III | Обозначение | б | в | а | г |
| | Обозначение | а) | б) | в) | г) |
| IV | Время года для наблюдений | весна, лето | весна, лето, осень | весна, лето, осень | круглый год |

Таблица 2. Возможные явления атмосферы Земли, их причины появления, характерная высота расположения области их образования и характерные времена года их наблюдения.

верхностью Земли, то есть на высоте $0 \div 2$ км. Молния обычно наблюдается в г. Самаре весной, летом и осенью.

Правильно заполненная табл. 1 представляется в виде табл. 2. (0.5 балла за каждую правильно названную позицию-ячейку таблицы)

№2. «Значимые события в истории астрономии»

1. Проверка А. Эддингтоном Общей теории относительности (ОТО) А. Эйнштейна по отклонению светового луча в гравитационном поле Солнца была выполнена во время наблюдения солнечного затмения с территории Африки в 1919 г. н.э. Эксперимент указал на блестящее согласование прогнозов теории Эйнштейна и результатов эксперимента.

2. Первым, кто достаточно точно определил размеры земного шара, был Эратосфен Киренский. В июне 240 года до н. э. Эратосфен, определяя высоту Солнца в г. Александрии и г. Сиене (Асуане), смог впервые вычислить длину земного меридиана. Ошибка его результата относительного современного точного значения составляла лишь 1.3%!

3. Галилео Галилей занялся экспериментами с линзами в середине 1609 г., после того как узнал, что в Голландии для потребностей мореплавания была изобретена зрительная труба. К январю 1610 г. он создал несколько инструментов с увеличением от $20\times$ до $33\times$. С помощью данных инструментов Галилей начал в тоже время систематические наблюдения звездного неба, что ознаменовало собой начало эры телескопических наблюдений.

4. В 46 г. до н. э. римский император Гай Юлий Цезарь провел календарную реформу, целью которой было восстановить синхронизацию календаря с временами года и избежать подобных проблем в будущем. Проект календаря был разработан александрийским астрономом Созигеном и начал действовать с 1 января 45 года до н. э.

5. 23 мая 1576 года специальным указом датско-норвежского короля Фредерика II Тихо Браге был пожалован в пожизненное пользование остров Вен, расположенный в проливе Эресунн в 20 км от Копенгагена, а также выделены значительные суммы на постройку обсерватории и ее содержание. Браге назвал свою обсерваторию «Ураниборг» («Замок Урании») в честь музы астрономии Урании; часто это название переводится как «Небесный замок». Закладка «Небесного замка» состоялась 8 августа 1576 года. Его строительство велось по проекту Тихо Браге и под его наблюдением. Это было первое в Европе здание, специально построенное для астрономических наблюдений.

6. Гиппарх Никейский – древнегреческий астроном, являющийся автором первой классификации звезд по видимой яркости (140 г. до н.э.). Он же построил первый в истории астрономии каталог звезд (около 129 г. до н.э.), содержащий информацию о более чем тысяча звезд.

7. В 1822 г. н.э. В.Я. Струве (первый директор Пулковской обсерватории)

приступил к созданию первого каталога двойных звезд. А в 1827 году была опубликована его первая версия.

8. К 265 до н. э. Аристархом Самосским были получены первые оценки для расстояний до Солнца и Луны. Несмотря на ошибочность результатов (его результаты отличались от действительных почти в 20 раз!) его концепция расчетов была верной, а ошибочность была обусловлена лишь грубыми данными наблюдений и отсутствием на тот момент в использовании тригонометрических функций. Кроме того, в предложенной им концепции мира, именно Солнце, а не Земля располагалась в его центре, т.е. по сути, вероятно, именно он был первым, кто предложил гелиоцентрическую систему мира.

Т.о., получаем следующие пары ответов:

1)-Е); 2)-Б); 3)-В); 4)-Д); 5)-А); 6)-Г); 7)-З); 8)-Ж). (1 балл за каждую правильно названную пару)

№ 3. «Город Самара: его небосвод и время»

Решение. 1. Как известно, поверхность земного шара поделена на 24 часовых пояса, причем в пределах каждого пояса среднее солнечное время (оно называется *поясным*) одно и тоже и равно местному среднему солнечному времени центрального меридиана этого пояса. Каждый пояс представляет собой сферический двуугольник с вершинами при геополюсах, ширина которого равна примерно 15° на уровне геоэкватора. Нумерация поясов начинается с нуля. Данный номер присваивается поясу, центральным меридианом которого является *Гринвичский меридиан*. Ориентировочные границы нулевого меридиана по долготе ($352.5^\circ, +7.5^\circ$).

Границы (восточная (E) и западная (W)) по долготе N -го часового пояса можно оценить по формулам:

$$\lambda_W = N \cdot 15^\circ + 352.5^\circ - 360^\circ \cdot \theta(N), \quad \lambda_E = 7.5^\circ + N \cdot 15^\circ, \quad (3)$$

где $\theta(x)$ – специальная функция, определяемая выражением:

$$\theta(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ если } x > 0, \\ 0, \text{ если } x \leq 0 \end{array} \right\}.$$

Очевидно, что долгота города Самары попадает в интервал (λ_W, λ_E) при $N = 3$. Следовательно, Самара принадлежит 3-му часовому поясу. Т.о., данное утверждение является *ложным*. (3 балла)

2. Воспользуемся формулой для высоты светила в верхней кульминации:

$$h_{\max}^\odot = 90^\circ - \varphi + \delta_\odot, \quad (4)$$

здесь φ – широта города Самары, δ_\odot – склонение Солнца, которое в течение года изменяется в пределах интервала:

$$-\varepsilon \leq \delta_\odot \leq \varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon = 23^\circ 26'. \quad (5)$$

В день летнего солнцестояния склонение Солнца принимает максимальное значение, т.е. $\delta_{\odot} = \varepsilon$, тогда из (4) следует, что $h_{\max}^{\odot} = 60^{\circ}14'$. Значит данное утверждение является **верным**. (3 балла)

3. С использованием формулы (4) определим максимальную высоту Сириуса над горизонтом:

$$h_{\max}^* = 90^{\circ} - \varphi + \delta_* = 20^{\circ}05' > 15^{\circ}. \quad (6)$$

Значит данное утверждение является **ложным**. (3 балла)

4. Согласно условию задачи протяженность г. Самары вдоль меридиана составляет $\ell_m = 50$ км. Поскольку спутник низкоорбитальный, то его высотой над поверхностью Земли можно пренебречь в сравнении с ее радиусом, тогда его скорость будет равна первой космической скорости у поверхности Земли:

$$V_I = \sqrt{\frac{G M_{\oplus}}{R_{\oplus}}} = 7.91 \text{ км/с.}$$

Следовательно, при движении спутника в плоскости меридиана время прохождения составит

$$\tau_m = \frac{\ell_m}{V_I} = 6.3 \text{ сек.}$$

Значит данное утверждение является **верным**. (3 балла)

Задача № 4. «Лунный глобус СРЦОД»

Решение. 1. Определим линейный масштаб глобуса (2 балла)

$$\mu = \frac{R_{\zeta}}{D_{\Gamma}/2} = \frac{2R_{\zeta}}{D_{\Gamma}} = 1.086 \cdot 10^7 \text{ или } 10.863 \text{ км/1 мм.} \quad (7)$$

2. Определим диаметр кратера Платон из пропорции (3 балла):

$$\mu = \frac{2R_{\zeta}}{D_{\Gamma}} = \frac{D_k}{d_k}, \Rightarrow d_k = \frac{D_k}{\mu} = 9.2 \text{ мм.} \quad (8)$$

3. По фотографии определим диаметр кратера Коперник – $d_k=2$ мм, определим также по фотографии диаметр глобуса – $d_{\Gamma}=71$ мм. Далее можно составить пропорцию (3 балла):

$$\frac{d_k}{d_{\Gamma}} = \frac{D_k}{2R_{\zeta}}, \Rightarrow D_k = 2R_{\zeta} \left(\frac{d_k}{d_{\Gamma}} \right) = 98 \text{ км.} \quad (9)$$

4. В случае круговой орбиты Луны ее угловой диаметр равен:

$$D''_{\zeta} = \frac{2R_{\zeta}}{a_{\zeta}} 3438' = 31.1'. \quad (10)$$

Запишем угловой диаметр глобуса на расстоянии Δ :

$$D''_r = \frac{D_r}{\Delta} 3438'. \quad (11)$$

Согласно условию задачи

$$D''_r = D''_c, \Rightarrow \frac{D_r}{\Delta} = \frac{2\mathfrak{R}_c}{a_c}, \Rightarrow \Delta = \left(\frac{D_r}{2\mathfrak{R}_c} \right) a_c = 35.4 \text{ м.} \quad (12)$$

Т.о., данный глобус будет виден с тем же угловым диаметром, что и Луна с расстояния $\Delta=35.4$ м. (2 балла)

5. Как известно, вращательное орбитальное и осевое движение Луны синхронизированы, т.е. они совершаются с одним и тем же периодом, т.е. с $T_c=27.32$ сут. Значит угловая скорость осевого вращения Луны $\omega_c = \frac{2\pi}{T} = 2.66 \cdot 10^{-6}$ рад/с. Тогда линейную скорость вращения точек экватора глобуса можно записать так (2 балла)

$$V_c = \omega_c \cdot \frac{D_r}{2} = 4.26 \cdot 10^{-7} \text{ м/с} = 0.426 \text{ мкм/с.} \quad (13)$$

Ответ: представляется выражениями (7)-(9), (12)-(13).

Уровень «Знаток» (уровень В)

№5. «Глобус как Луна»

Решение. Прежде всего определим освещенность, которую создает Луна у поверхности Земли в полнолуние. С использованием формулы Погсона, видимой звездной величины Солнца ($m_\odot = -26.74^m$), солнечной постоянной в видимом свете ($f_\odot^{(v)} = 600 \text{ Вт/м}^2$) и видимой звездной величины Луны в полнолуние ($m_c = -12.7^m$) определим освещенность, создаваемую Луной в видимом диапазоне:

$$m_\odot - m_c = -2.5 \lg \left(\frac{f_\odot}{E_c} \right), \Rightarrow E_c^{(v)} = f_\odot \cdot 10^{0.4(m_\odot - m_c)} = 1.45 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/м}^2. \quad (14)$$

Освещенность, которую создает глобус на расстоянии r от его центра можно записать так:

$$E_G = \frac{P \eta \chi}{4\pi r^2}, \quad (15)$$

здесь $\eta=0.05$ – доля от полной мощности, приходящаяся на видимый свет; $\chi=0.2$ – коэффициент прозрачности материала глобуса для видимого света.

Согласно условию задачи, освещенности, определяемые выражениями (14) и (15), должны быть равны. Тогда

$$\frac{P \eta \chi}{4\pi r^2} = E_c^{(v)}, \Rightarrow r = \sqrt{\frac{P \eta \chi}{4\pi E_c^{(v)}}} = 3.70 \text{ м.} \quad (16)$$

Ответ: представляется выражением (16). (11 баллов)

№6. «Переделка маятниковых часов»

Решение. 1. Как известно, основной единицей измерения времени в рамках шкалы средней солнечного времени являются *средние солнечные сутки*. Их продолжительность составляет ровно 24 средних солнечных часа или $\tau_m = 86400$ средних солнечных секунд, определяемых бытовыми часами. За указанный промежуток времени исходный маятник часов должен совершить N полных колебаний. Следовательно период колебаний будет равен:

$$T_m = \frac{\tau_m}{N}. \quad (17)$$

С другой стороны, согласно условию задачи, к маятнику часов применима *модель математического маятника*, значит период его колебаний определяется по формуле:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_0}}, \quad (18)$$

здесь ℓ – длина нити математического маятника, g_0 – ускорение свободного падения у поверхности Земли. Из выражений (17)-(18) следует явное выражение для количества колебаний:

$$N = \frac{\tau_m}{2\pi} \sqrt{\frac{g_0}{\ell_m}}, \quad (19)$$

где ℓ_m – начальная длина математического маятника.

Основной единицей измерения времени в случае шкалы звездного времени являются *звездные сутки*. Этот промежуток времени составляет 86400 звездных секунд или 23 часа 56 минут 4 секунды среднего солнечного времени, что эквивалентно $\tau_s = 86164$ с среднего солнечного времени.

Следовательно на протяжении звездных суток модифицированный маятник часов должен совершить также N колебаний с периодом определяемым формулой:

$$T_s = \frac{\tau_s}{N}, \quad \text{иначе } T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_s}{g_0}}, \quad \Rightarrow \quad N = \frac{\tau_s}{2\pi} \sqrt{\frac{g_0}{\ell_s}}. \quad (20)$$

Здесь ℓ_s – конечная длина математического маятника. Из выражений (19)-(20) следует уравнение вида:

$$\frac{\tau_m}{\tau_s} = \sqrt{\frac{\ell_m}{\ell_s}}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\ell_s}{\ell_m} = \left(\frac{\tau_s}{\tau_m}\right)^2. \quad (21)$$

Из последнего результата следует, что $\ell_s < \ell_m$, поэтому $\Delta\ell = \ell_m - \ell_s$. Тогда искомое относительное изменение (ε_ℓ) длины маятника часов можно определить так

$$1 - \frac{\Delta\ell}{\ell_m} = \left(\frac{\tau_s}{\tau_m}\right)^2, \quad \varepsilon_\ell = \frac{\Delta\ell}{\ell_m} = 1 - \left(\frac{\tau_s}{\tau_m}\right)^2 = 5.46 \cdot 10^{-3}. \quad (22)$$

2. Если период начальных малых колебаний маятника (до переделки) был равен одной средней солнечной секунде ($T_0 = 1$ с), то его длина была при этом равна

$$\ell_m = g_0 \frac{T_0^2}{4\pi^2}.$$

Тогда абсолютное изменение длины маятника часов:

$$\Delta\ell = \varepsilon_\ell \cdot \ell_m = g_0 \frac{T_0^2}{4\pi^2} \left(1 - \left(\frac{\tau_s}{\tau_m} \right)^2 \right) = 1.38 \text{ мм.} \quad (23)$$

Ответ: представляется выражениями (22)-(23). (12 баллов)

№7. «МКС над праздничной Самарой»

Решение. 1. Рассмотрим рис. 4, соответствующий условию задачи. Здесь $O_1O_2CO_3O_4$ – плоскость орбиты МКС, расположенной под углом $i = 51.63^\circ$ по отношению к земному экватору Q_1Q_2 . Здесь дуга меридиана $S_S S_N$ соответствует наибольшей протяженности Самарской области вдоль меридиана. Поскольку $i < \varphi_s$, то МКС не проходит ни над одной точкой Самарской области (см. рис. 4), а значит не бывает в зените. Из рисунка видно, что минимальное зенитное расстояние достигается для самой южной точки (S_S) Самарской области. Оценим его величину. Для этого рассмотрим треугольник $\triangle AS_S O_4$. Данный треугольник является прямоугольным, значит для данного треугольника выполняется соотношение вида:

$$\sin z_{\min} = \frac{AO_4}{S_S O_4} \approx \frac{\ell}{h},$$

здесь $\ell = AO_4$; $S_S O_4 \approx O_3 O_4 = h = 418$ км – высота орбиты МКС. Иначе из треугольника $\triangle AS_S O_4$ следует, что

$$\sin(\varphi_s - i) = \frac{AO_4}{CO_4} = \frac{\ell}{(\mathfrak{R}_\oplus + h)}.$$

Из указанных равенств следует выражение вида:

$$\sin z_{\min} = \left(1 + \frac{\mathfrak{R}_\oplus}{h} \right) \sin(\varphi_s - i) = 0.043, \Rightarrow z_{\min} = 2.5^\circ. \quad (24)$$

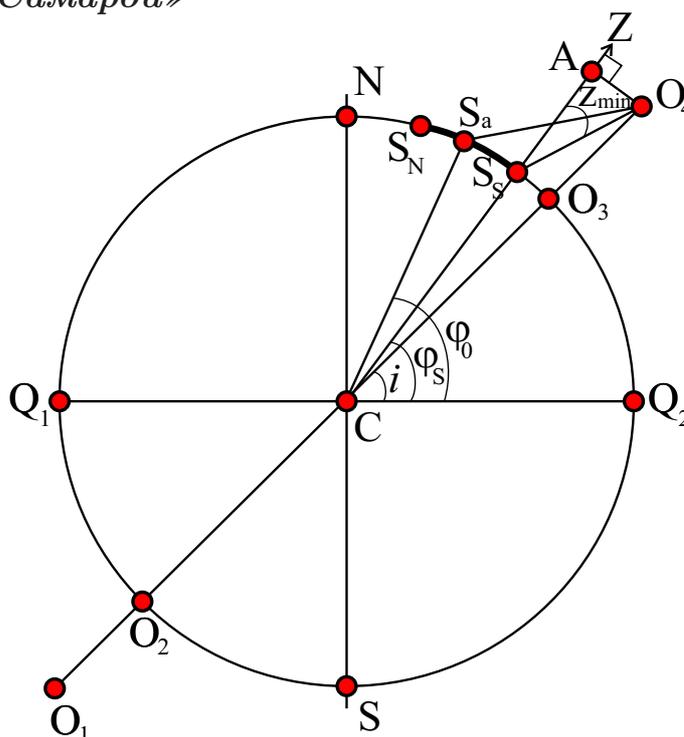


Рис. 4. К определению ориентации орбиты МКС и Самарской области.

Рис. 4. К определению ориентации орбиты МКС и Самарской области.

в этом случае обусловлено лишь поглощением света в толще атмосферы высотой $A_0S_S = h_a = 100$ км (см. рис. 5). Звездная величина m_0 соответствует освещенности E_0 , создаваемой МКС, расположенной в точке H_0 , в южной точке S_S . Согласно определению, параметр E_0 пропорционален потоку Φ_0 , отраженного МКС солнечного излучения в направлении точки S_S , и обратно пропорционален квадрату расстояния h^2 , т.е.

$$E_0 \sim \frac{\Phi_0}{h^2}.$$

В случае атмосферы Земли, моделируемой однородной газовой оболочкой, данное поглощение пропорционально величине геометрического пути света в атмосфере Земли, т.е.

$$\Delta m \sim h_a.$$

Если МКС находится на горизонте (например, в точке H_2), то освещенность E' , создаваемая МКС без учета атмосферного поглощения в точке S_S , и бугеровское поглощение $\Delta m'$ света определяться в виде:

$$E' \sim \frac{\Phi_0}{\ell_H^2}, \quad \Delta m' \sim h',$$

где $\ell_H = H_2S_S = \sqrt{(\mathfrak{R}_\oplus + h)^2 - \mathfrak{R}_\oplus^2}$, $h' = A_2S_S = \sqrt{(\mathfrak{R}_\oplus + h_a)^2 - \mathfrak{R}_\oplus^2}$. С использованием формулы Погсона определим звездную величину m'_0 , соответствующую освещенности E' :

$$m'_0 - m_0 = -2.5 \lg \left(\frac{E'}{E_0} \right), \quad \Rightarrow \quad m'_0 = m_0 + 5 \lg \left(\frac{\sqrt{(\mathfrak{R}_\oplus + h)^2 - \mathfrak{R}_\oplus^2}}{h} \right).$$

Бугеровское поглощение света для МКС на горизонте составит

$$\Delta m' = \Delta m_0 \frac{\sqrt{(\mathfrak{R}_\oplus + h_a)^2 - \mathfrak{R}_\oplus^2}}{h_a}.$$

В итоге, звездная величина МКС у горизонта есть $m'_v = m'_0 + \Delta m'$ или

$$m'_v = m_v - \Delta m + 5 \lg \left(\frac{\sqrt{(\mathfrak{R}_\oplus + h)^2 - \mathfrak{R}_\oplus^2}}{h} \right) + \Delta m_0 \frac{\sqrt{(\mathfrak{R}_\oplus + h_a)^2 - \mathfrak{R}_\oplus^2}}{h_a}. \quad (28)$$

Численный расчет искомой величины дает значение $m'_v = 1.2^m$.

5. Каждый фонарик, ориентированный в небо, высвечивал в полусферу мощность $P_0 = 0.5$ Вт. Суммарная мощность излучения при этом равна

$$P_{\text{tot}} = N \cdot P_0 = 4 \cdot 10^4 \text{ Вт}, \quad (29)$$

здесь $N = 8 \cdot 10^4$ – количество самарцев, присутствовавших на праздничном концерте. Освещенность, создаваемая фонариками всех этих самарцев на минимальном расстоянии r_{\min} от главной площади города, есть

$$E = \frac{P_{\text{tot}}}{2\pi r_{\min}^2} = 3.08 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2. \quad (30)$$

Далее задачу можно решить двумя альтернативными способами.

Способ № 1. Как известно, освещенность, создаваемая звездой нулевой звездной величины есть $E_0 = 2.48 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2$. Следовательно, отношение освещенностей $E/E_0 \approx 1.24$ иначе $E/E_0 = 2.512^{0^m - m_{\text{int}}}$. Методом подбора можно убедиться, что $m_{\text{int}} = -0.23^m$.

Способ № 2. Можно оценить искомую величину иначе, сравнивая освещенность E с солнечной постоянной $f_{\odot} = 1361 \text{ Вт/м}^2$ и используя формулу Погсона:

$$m_{\text{int}} - m_{\odot} = -2.5 \lg \left(\frac{E}{f_{\odot}} \right), \Rightarrow m_{\text{int}} = m_{\odot} - 2.5 \lg \left(\frac{E}{f_{\odot}} \right) = -0.23^m, \quad (31)$$

здесь $m_{\odot} = -26.832^m$ – видимая болометрическая звездная величина Солнца.

Ответ: к задаче представляется выражениями (24)-(25), (27)-(28), (31). (14 баллов)

№8. «Закат Луны в г. Самаре»

Решение. Рассмотрим рис. 6.а), соответствующий условию задачи. Здесь M_1 определяет положение центра диска Луны в момент начала ее захода за горизонт. В этот момент нижняя точка диска B_1 касается горизонта HH' . Точка M_2 определяет положение центра диска Луны в момент окончания ее захода за горизонт. При этом верхняя точка ее диска B_2 в этот момент заходит за горизонт.

Луна, в общем случае, движется вблизи горизонта по дуге O_1O_2 , не совпадающей с дугой ее суточной параллели PP' . Несовпадение O_1O_2 и PP' обусловлено значительным собственным движением Луны по небосводу относительно звезд. Очевидно, время захода Луны за горизонт можно определить формулой вида:

$$\tau_{\text{заход}} = \frac{M_1\overset{\smile}{M}_2}{\omega_{\text{vis}}}, \quad (32)$$

где ω_{vis} – угловая скорость видимого движения Луны по небосводу. В силу малости угловых размеров видимого диска Луны, дугу $M_1\overset{\smile}{M}_2$ можно рассматривать как отрезок прямой, при этом, согласно рис. 6.а), имеем

$$M_1\overset{\smile}{M}_2 \approx \frac{2\rho_{\zeta}''}{\sin(90^\circ - \varphi + \gamma)} = \frac{2\rho_{\zeta}''}{\cos(\varphi - \gamma)}, \quad (33)$$

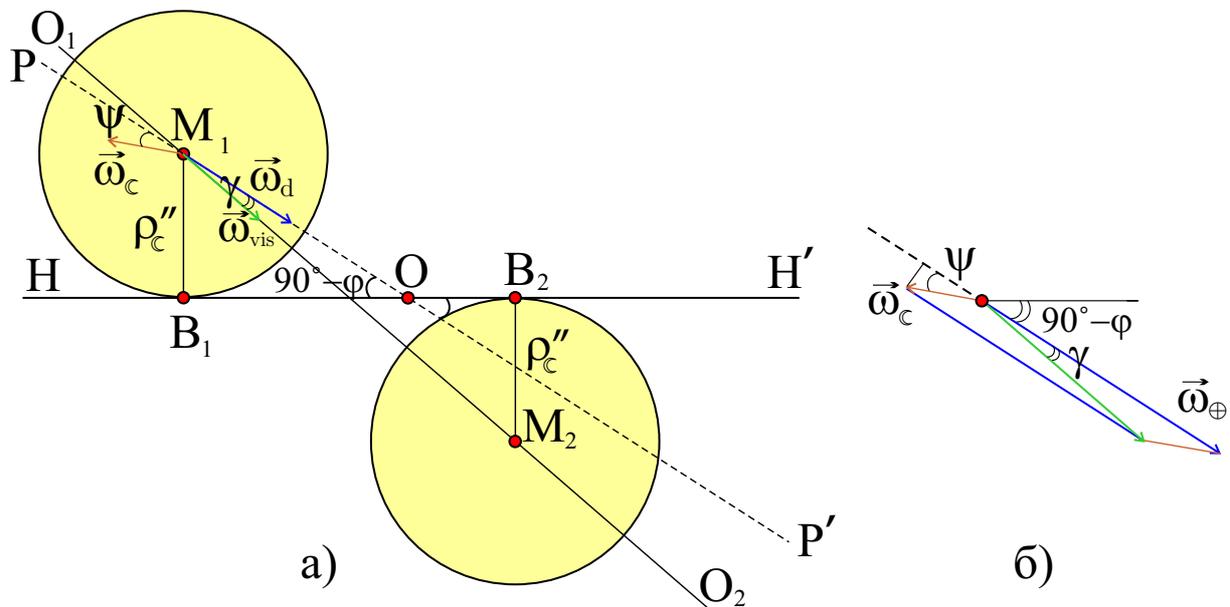


Рис. 6. К определению времени захода Луны за горизонт.

здесь ρ_c'' – угловой радиус видимого диска Луны; φ – широта места наблюдения Луны; γ – угол между суточной параллелью Луны и дугой ее видимого движения (будет определен ниже). Параметр ρ_c'' определяется выражением вида:

$$\rho_c'' = \frac{\mathfrak{R}_c}{r_c} \times 3438', \quad \text{где } a_c(1 - \varepsilon_c) \leq r_c \leq a_c(1 + \varepsilon_c), \Rightarrow$$

$$14.73' \leq \rho_c'' \leq 16.45', \quad (34)$$

где \mathfrak{R}_c , r_c – радиус Луны и геоцентрическое расстояние соответственно; a_c, ε_c – большая полуось и эксцентриситет орбиты Луны, определенные относительно центра Земли.

Очевидно, угловая скорость $\vec{\omega}_{\text{vis}}$ является векторной суммой угловой скорости $\vec{\omega}_d$ суточного перемещения Луны вдоль суточной параллели и $\vec{\omega}_c$ – угловой скорости ее собственного движения по небосводу относительно звезд:

$$\vec{\omega}_{\text{vis}} = \vec{\omega}_d + \vec{\omega}_c, \quad \Rightarrow \quad \omega_{\text{vis}} = \sqrt{\omega_d^2 + \omega_c^2 - 2\omega_d\omega_c \cos \psi}. \quad (35)$$

Угловая скорость суточного перемещения Луны вдоль суточной параллели можно определить через угловую скорость вращения Земли ($\omega_{\oplus} = 15''/\text{с}$) и склонение Луны δ_c посредством выражения вида:

$$\omega_d = \omega_{\oplus} \cos \delta_c, \quad \text{где } -(i_c + \varepsilon) \leq \delta_c \leq (i_c + \varepsilon), \quad \text{или } -28^{\circ}35' \leq \delta_c \leq 28^{\circ}35',$$

здесь $i_c = 5^{\circ}09'$ – наклонение лунной орбиты к плоскости эклиптики, $\varepsilon = 23^{\circ}26'$ – угол наклона эклиптики к небесному экватору. Следовательно, интервал допустимых значений (ИДЗ) для ω_d есть

$$\omega_{\oplus} \cos(i_c + \varepsilon) \leq \omega_d \leq \omega_{\oplus}, \quad \text{или } 13.21'/\text{мин} \leq \omega_d \leq 15.04'/\text{мин}. \quad (36)$$

Угловая скорость собственного движения Луны по небосводу определяется интервалом:

$$\frac{V_{\zeta}^{(Q)}}{a_{\zeta}(1+\varepsilon_{\zeta})} \leq \omega_{\zeta} \leq \frac{V_{\zeta}^{(Q)}}{a_{\zeta}(1-\varepsilon_{\zeta})}, \Rightarrow \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_{\oplus}(1-\varepsilon_{\zeta})}{a_{\zeta}^3(1+\varepsilon_{\zeta})^3}} \leq \omega_{\zeta} \leq \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_{\oplus}(1+\varepsilon_{\zeta})}{a_{\zeta}^3(1-\varepsilon_{\zeta})^3}},$$

$$0.49'/\text{мин} \leq \omega_{\zeta} \leq 0.61'/\text{мин}, \quad (37)$$

здесь $V_{\zeta}^{(q)}$, $V_{\zeta}^{(Q)}$ – скорости Луны в перигее и апогее своей орбиты. Модуль угла ψ , очевидно, должен изменяться в пределах:

$$0^{\circ} \leq |\psi| \leq (i_{\zeta} + \varepsilon) \text{ или } 0^{\circ} \leq |\psi| \leq 28^{\circ}35'. \quad (38)$$

Нетрудно убедиться в том, что левая граница ИДЗ (38) достигается в наиболее далеких точках орбиты Луны относительно небесного экватора и эклиптики; правая граница ИДЗ (38) достигается лишь в случае совпадения узлов орбиты Луны с точками равноденствий, при этом последние должны совпадать с точками востока и запада.

Определим ИДЗ для угла γ . Для этого рассмотрим рис. 6.б). Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega_{\zeta} \sin \psi}{\omega_{\oplus} \cos \delta_{\zeta} - \omega_{\zeta} \cos \psi}, \Rightarrow 0^{\circ} \leq \gamma \leq 1^{\circ}07'. \quad (39)$$

Причем правая граница последнего интервала достигается в случае, когда угол ψ достигает своего максимума, т.е. когда склонение Луны $\delta_{\zeta} \approx 0^{\circ}$.

Очевидно, искомая величина (32) зависит от ряда значений параметров. Поэтому будем решать задачу методом последовательных приближений. Преобразуем выражение (35), учитывая, что $\omega_{\zeta} \ll \omega_d$:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{vis}} &= \omega_d \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{\zeta}}{\omega_d}\right)^2 - 2 \left(\frac{\omega_{\zeta}}{\omega_d}\right) \cos \psi} \approx \omega_d \sqrt{1 - 2 \left(\frac{\omega_{\zeta}}{\omega_d}\right) \cos \psi} \approx \\ &\approx \omega_d \left[1 - \left(\frac{\omega_{\zeta}}{\omega_d}\right) \cos \psi\right] \approx \omega_d. \end{aligned} \quad (40)$$

При записи последнего выражения использовано биномиальное приближение (см. справочные данные, параграф А.5, последняя формула) и факт, что $(\omega_{\zeta}/\omega_d) \cos \psi \leq 0.046$. Поскольку угол γ имеет очень малый ИДЗ, то при его возможной вариации функция $\cos(\varphi - \gamma)$ в выражении (33) меняется крайне незначительно относительно значения $\cos \varphi$. В итоге время захода Луны за горизонт $\bar{\tau}_{\text{заход}}$ в низшем приближении есть

$$\bar{\tau}_{\text{заход}} \approx \frac{2 \mathfrak{R}_{\zeta}}{r_{\zeta}} \times \frac{3438'}{\omega_{\oplus} \cos \varphi \cos \delta_{\zeta}}. \quad (41)$$

Т.о., искомое время, главным образом, определяется широтой места наблюдения, склонением Луны и ее положением на орбите. В итоге минимальное и максимальное время захода Луны за горизонт есть

$$\bar{\tau}_{\text{заход}}^{(\max)} \approx \frac{2 \rho''_{\max}}{\omega_{\oplus} \cos \varphi \cos \delta_{\zeta}^{(\max)}} = 4.16 \text{ мин}, \quad \bar{\tau}_{\text{заход}}^{(\min)} \approx \frac{2 \rho''_{\min}}{\omega_{\oplus} \cos \varphi} = 3.27 \text{ мин}. \quad (42)$$

Ошибка определения $\bar{\tau}_{\text{заход}}^{(\max)}$ определяется лишь неточностью определения ω_{vis} , ошибка определения которой не превосходит $(\omega_{\zeta} / \omega_d) \leq 0.046$. Следовательно, искомая абсолютная погрешность $\Delta \tau_{\text{заход}}^{(\max)} \approx 0.046 \cdot \bar{\tau}_{\text{заход}}^{(\max)} = 0.19$ мин, при этом на эту величину искомое время может только увеличиваться. Значит $\tau_{\text{заход}}^{(\max)} = \bar{\tau}_{\text{заход}}^{(\max)} + \Delta \tau_{\text{заход}}^{(\max)} \approx 4.35$ мин.

Ошибка определения $\bar{\tau}_{\text{заход}}^{(\min)}$ определяется неточностью определения ω_{vis} , ошибка определения которой не превосходит $(\omega_{\zeta} / \omega_d) \cos \psi_{\max} \leq 0.040$ и ошибкой определения множителя $\cos(\varphi - \gamma)$, который в случае максимального значения γ не превосходит значения $(\cos(\varphi) - \cos(\varphi - \gamma)) / \cos(\varphi) = 0.025$. При этом обе ошибки приводят лишь к увеличению времени захода. Следовательно, искомая абсолютная погрешность $\Delta \tau_{\text{заход}}^{(\min)} \approx (0.040 + 0.025) \cdot \bar{\tau}_{\text{заход}}^{(\min)} = 0.21$ мин. В итоге $\tau_{\text{заход}}^{(\min)} = \bar{\tau}_{\text{заход}}^{(\min)} + \Delta \tau_{\text{заход}}^{(\min)} \approx 3.48$ мин.

Ответ: $\tau_{\text{заход}}^{(\max)} \approx 4.35$ мин; $\tau_{\text{заход}}^{(\min)} \approx 3.48$ мин. (14 баллов)

№9. «Максимальное сжатие диска Луны»

Решение. 1. Согласно определению, *угловым диаметром* видимого диска Луны называется величина, определяемая выражением вида:

$$D''_{\zeta} = \frac{2 \mathfrak{R}_{\zeta}}{r_{\zeta}} \times 3438', \quad (43)$$

здесь r_{ζ} – геоцентрическое расстояние Луны. Согласно условию задачи, Луна на момент наблюдений находилась на среднем расстоянии от Земли. Значит величина r_{ζ} должна быть равна большой полуоси a_{ζ} лунной орбиты, определенной относительно центра Земли. С использованием справочных данных, получаем итоговое значение для углового диаметра Луны D''_{ζ} на момент наблюдений: $D''_{\zeta} = 31.1'$.

2. В случае, когда Луна находится в зените, то земному наблюдателю она видится круглым диском с угловым диаметром D''_{ζ} . Рассмотрим ситуацию, когда земной наблюдатель видит Луну на горизонте. Если в некоторый момент времени нижняя точка A' видимого диска Луны коснулась горизонта, то ее видимая высота $h_{A'} = 0^{\circ}$ (см. рис. 7). При этом, согласно формуле (1), угол рефракции данной точки есть $\delta h_A = 34.5'$. Следовательно, высота нижней точки (A) истинного диска Солнца есть

$$h_A = h_{A'} - \delta h_A = -34.5'. \quad (44)$$

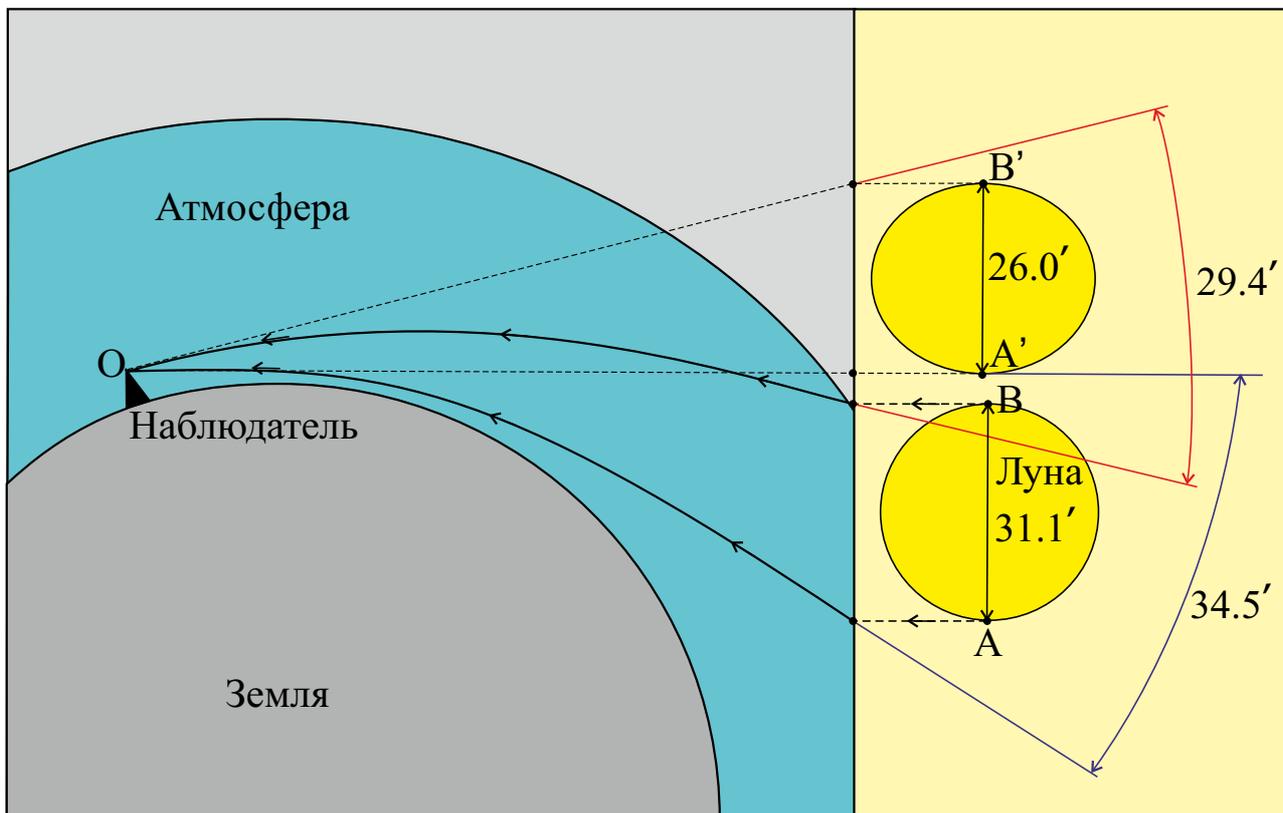


Рис. 7. К определению сжатия видимого диска Луны у горизонта, в силу атмосферной рефракции.

Высота верхней точки (B) истинного диска Солнца есть

$$h_B = h_A + D''_{\zeta} = -3.4'.$$

С использованием формулы (2) можно вычислить угол рефракции для данной точки $\delta h_B = 29.4'$. Следовательно, высота верхней точки B' видимого диска Солнца есть

$$h_{B'} = h_B + \delta h_B = 26.0'. \quad (45)$$

Следовательно, у горизонта видимый диск Луны представляется сплюснутым вдоль отвесной линии эллипсом с большой осью $a''_{\zeta} = D''_{\zeta} = 31.1'$ и малой осью $b''_{\zeta} = 26.0'$.

3. Согласно определению, *сжатием видимого диска небесного тела* называется безразмерная геометрическая величина, определяемая выражением вида:

$$\kappa = \frac{a''_{\zeta} - b''_{\zeta}}{a''_{\zeta}} \cdot 100\% = 16.4\%. \quad (46)$$

Очевидно, последнее значение является максимально возможным для данной величины, поскольку эффект сжатия лунного диска максимально проявляется на горизонте именно из-за достижения максимального значения углом рефракции, значит и величина κ также максимальна.

Ответ: представляется выражением (46). (14 баллов)

№10. «Годы Земли и не только...»

Решение. Согласно определению, *тропическим годом* называется промежуток времени между двумя последовательными прохождением истинным солнцем точки весеннего равноденствия.

Звездным годом Земли называется промежуток времени, в течение которого Земля делает один полный оборот вокруг Солнца относительно далеких звезд.

1. В силу прецессии оси вращения Земли относительно оси эклиптики, точка весеннего равноденствия движется по эклиптике навстречу Солнцу. Поэтому для последовательного прохождения истинным солнцем точки весны требуется меньше времени, нежели на совершение одного полного оборота. Поэтому тропический год меньше звездного.

2. Вычислим угловую скорость прецессионного движения точки весны (Υ) по эклиптике. Определим разность продолжительностей данных промежутков времени:

$$\Delta T = T_{\text{зв}} - T_{\text{тр}} = 0.014174689 \text{ сут.}$$

За время $T_{\text{зв}}$ Земля делает один полный оборот вокруг Солнца относительно далеких звезд и таким образом поворачивается на 360 градусов в пространстве. Следовательно, средняя угловая скорость ее орбитального движения составляет

$$\bar{\omega}_{\oplus} = \frac{360^{\circ}}{T_{\text{зв}}}.$$

За промежуток времени $T_{\text{тр}}$ точка весны смещается по эклиптике на угол $\Delta \ell = \omega_{\oplus} \cdot \Delta T$. Следовательно, угловую скорость годичного движения точки весны можно представить так:

$$\mu_{\Upsilon} = \frac{\Delta \ell}{T_{\text{тр}}} \approx \frac{\Delta \ell}{1 \text{ год}} = 50.295''/\text{год}. \quad (47)$$

3. Именно прецессия земной оси приводит к смещению дат равноденствий и солнцестояний относительно календарных дат в сторону меньших значений. Будем полагать, что день зимнего солнцестояния приходится на 22 декабря. Тогда разница дней между указанной и моментом прохождения Земли через перигелий (5 января) составляет $\tau_1 = 14$ сут. Тогда угол, который проходит Солнце по эклиптике (в приближении равномерного движения) за время τ_1 , есть

$$\Delta \varphi_1^{(0)} = \bar{\omega}_{\oplus} \cdot \tau_1 = \frac{360^{\circ}}{T_{\text{зв}}} \tau_1.$$

Однако данный результат можно уточнить, учитывая тот факт, что Земля движется в окрестности перигелия. Как было показано в задаче №8 настоящего релиза, угловая скорость орбитального движения Земли, а значит и

Солнца по эклиптике, достигает максимального значения в окрестности перигелия и принимает вид:

$$\omega_{\oplus}^{\max} = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_{\odot} (1 + \varepsilon_{\oplus})}{a_{\oplus}^3 (1 - \varepsilon_{\oplus})^3}} \approx \bar{\omega}_{\oplus} (1 + 2\varepsilon_{\oplus}).$$

При записи последнего приближенного выражения, учитывалась малость эксцентриситета орбиты Земли и использовалось биномиальное приближение (см. справочные данные, §1.5). Значит искомый угол можно представить в виде:

$$\Delta\varphi_1^{(1)} = \omega_{\oplus}^{\max} \cdot \tau_1 = \frac{360^\circ}{T_{\text{ЗВ}}} (1 + 2\varepsilon_{\oplus}) \tau_1.$$

В итоге, искомое количество лет можно представить в виде:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta\varphi_1^{(1)}}{\mu_{\Upsilon}} = \frac{360^\circ}{\mu_{\Upsilon}} \frac{\tau_1}{T_{\text{ЗВ}}} (1 + 2\varepsilon_{\oplus}) = 1021 \text{ год.} \quad (48)$$

Т.о., указанное событие было в 1001 г. н.э. Расчет искомого промежутка времени с использованием угла $\Delta\varphi_1^{(0)}$ дает значение 988 лет. Очевидно, уточненный результат больше приближенного на 33 года!

4. Нетрудно подсчитать, что интервал между днем зимнего солнцестояния (22 декабря) и днем летнего солнцестояния (21 июня) составляет $\tau_2 = 184$ суток (при подсчете в направлении зима \rightarrow осень \rightarrow лето). Что приблизительно полгода. Значит точка зимнего солнцестояния должна сместиться на 180° по эклиптике. Тогда точка весеннего равноденствия должна также сместиться на 180° по эклиптике и занять сегодняшнюю позицию точки осеннего равноденствия. Следовательно точка весны должна располагаться в *созвездии Девы*. Искомый промежуток времени можно посчитать так:

$$\Delta t_2 = \frac{180^\circ}{\mu_{\Upsilon}} = 12884 \text{ год.} \quad (49)$$

5. Определим период прецессионного движения Земли:

$$T_{\text{пр}} = \frac{360^\circ}{\mu_{\Upsilon}} = 25768 \text{ лет.}$$

Как известно, ось эклиптики с осью мира образует угол $\varepsilon = 23^\circ 26'$. Следовательно, угловой радиус конуса, который замечает ось мира относительно оси эклиптики в результате прецессионного движения Земли также равен ε .

Телесный угол, соответствующий части небосвода, заключенной внутри круга прецессии, составляет

$$\Omega_1 = 2\pi(1 - \cos \varepsilon), \quad \text{где } [\Omega_1] = \text{срад.}$$

Как известно, всей небесной сфере соответствует телесный угол $\Omega_{\text{сф}} = 4\pi$ срад. Тогда доля от всего небосвода (небесной сферы), заключенная внутри круга прецессии, есть

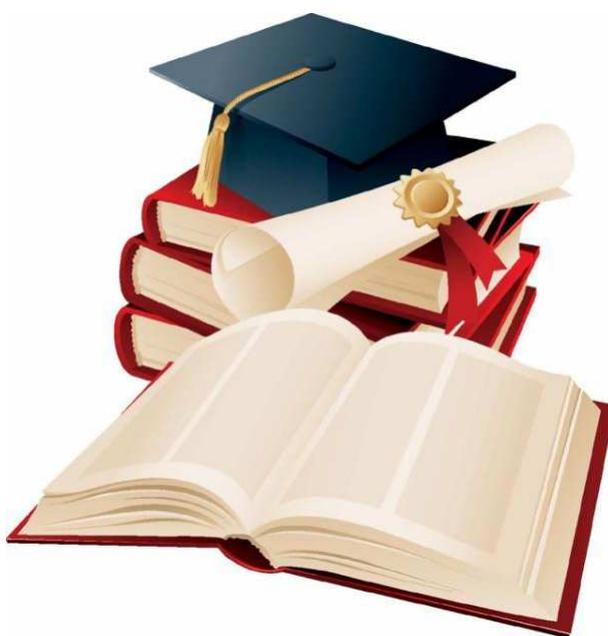
$$\chi = \frac{\Omega_1}{\Omega_{\text{сф}}} = \frac{1}{2}(1 - \cos \varepsilon).$$

Как известно, на всем небосводе можно наблюдать невооруженным глазом всего $N = 6 \cdot 10^3$ звезд. Поскольку последние распределены равномерно по небесной сфере, то искомое количество N_1 есть

$$N_1 = \chi \cdot N = \frac{N}{2}(1 - \cos \varepsilon) \approx 250 \text{ звезд.} \quad (50)$$

Ответ: представляется выражениями (47)-(50); точка весеннего равноденствия движется по эклиптике навстречу Солнцу. (15 баллов)

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ



А.1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Постоянная Авогадро – $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

А.2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина – -26.74^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Солнечная постоянная (во всем спектре) на расстоянии Земли – 1361 Вт/м^2
- Солнечная постоянная (в видимом свете) на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

А.3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$

- Средний по объему радиус – 6371.0 км
- Средний экваториальный радиус – 6378.14 км
- Длина земного меридиана – 20004.276 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24}$ кг
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

А.4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^\circ 09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или $1/81.3$ массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

А.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \text{tg } x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\text{tg}(x \pm \alpha) \approx \text{tg } \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n x;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.

А.6. Характеристики орбит планет

| Планета | Большая полуось | | Эксцентриситет | Наклон к плоскости эклиптики | Период обращения | Синодический период |
|----------|-----------------|---------|----------------|------------------------------|------------------|---------------------|
| | млн. км | а.е. | | | | |
| Меркурий | 57.9 | 0.3871 | 0.2056 | 7.004 | 87.97 сут | 115.9 |
| Венера | 108.2 | 0.7233 | 0.0068 | 3.394 | 224.70 сут | 583.9 |
| Земля | 149.6 | 1.0000 | 0.0167 | 0.000 | 365.26 сут | – |
| Марс | 227.9 | 1.5237 | 0.0934 | 1.850 | 686.98 сут | 780.0 |
| Юпитер | 778.3 | 5.2028 | 0.0483 | 1.308 | 11.862 лет | 398.9 |
| Сатурн | 1429.4 | 9.5388 | 0.0560 | 2.488 | 29.458 лет | 378.1 |
| Уран | 2871.0 | 19.1914 | 0.0461 | 0.774 | 84.01 лет | 369.7 |
| Нептун | 4504.3 | 30.0611 | 0.0097 | 1.774 | 164.79 лет | 367.5 |

А.7. Физические характеристики Солнца и планет

| Планета | Масса | | Радиус | | Плотность | Период вращения вокруг оси | Наклон экватора к плоскости орбиты | Геометрич. альbedo | Вид. звездная величина* |
|----------|-----------------------|-------------|--------|---------------|-----------|----------------------------|------------------------------------|--------------------|-------------------------|
| | кг | массы Земли | км | радиусы Земли | | | | | |
| Солнце | $1.989 \cdot 10^{30}$ | 332946 | 695500 | 108.97 | 1.41 | 25.380 сут | 7.25 | – | -26.8^m |
| Меркурий | $3.302 \cdot 10^{23}$ | 0.05271 | 2439.7 | 0.3825 | 5.42 | 58.646 сут | 0.00 | 0.10 | -0.1 |
| Венера | $4.869 \cdot 10^{24}$ | 0.81476 | 6051.8 | 0.9488 | 5.20 | 243.019 сут [†] | 177.36 | 0.65 | -4.4^m |
| Земля | $5.974 \cdot 10^{24}$ | 1.00000 | 6378.1 | 1.0000 | 5.52 | 23.934 час | 23.45 | 0.37 | – |
| Марс | $6.419 \cdot 10^{23}$ | 0.10745 | 3397.2 | 0.5326 | 3.93 | 24.623 час | 25.19 | 0.15 | -2.0^m |
| Юпитер | $1.899 \cdot 10^{27}$ | 317.94 | 71492 | 11.209 | 1.33 | 9.924 час | 3.13 | 0.52 | -2.7^m |
| Сатурн | $5.685 \cdot 10^{26}$ | 95.181 | 60268 | 9.4494 | 0.69 | 10.656 час | 25.33 | 0.47 | 0.4^m |
| Уран | $8.683 \cdot 10^{25}$ | 14.535 | 25559 | 4.0073 | 1.32 | 17.24 час [†] | 97.86 | 0.51 | 5.7^m |
| Нептун | $1.024 \cdot 10^{26}$ | 17.135 | 24746 | 3.8799 | 1.64 | 16.11 час | 28.31 | 0.41 | 7.8^m |

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.8. Характеристики некоторых спутников планет

| Спутник | Масса | Радиус | Плотность | Радиус орбиты | Период обращения | Геометрич. альbedo | Вид. звездная величина* |
|---------------|-----------------------|--------|--------------------|---------------|----------------------|--------------------|-------------------------|
| | кг | км | г·см ⁻³ | км | сут | | |
| Земля | | | | | | | |
| Луна | $7.348 \cdot 10^{22}$ | 1738 | 3.34 | 384400 | 27.32166 | 0.12 | -12.7 |
| Марс | | | | | | | |
| Фобос | $1.08 \cdot 10^{16}$ | ~ 10 | 2.0 | 9380 | 0.31910 | 0.06 | 11.3 |
| Деймос | $1.8 \cdot 10^{15}$ | ~ 6 | 1.7 | 23460 | 1.26244 | 0.07 | 12.4 |
| Юпитер | | | | | | | |
| Ио | $8.94 \cdot 10^{22}$ | 1815 | 3.55 | 421800 | 1.769138 | 0.61 | 5.0 |
| Европа | $4.8 \cdot 10^{22}$ | 1569 | 3.01 | 671100 | 3.551181 | 0.64 | 5.3 |
| Ганимед | $1.48 \cdot 10^{23}$ | 2631 | 1.94 | 1070400 | 7.154553 | 0.42 | 4.6 |
| Каллисто | $1.08 \cdot 10^{23}$ | 2400 | 1.86 | 1882800 | 16.68902 | 0.20 | 5.7 |
| Сатурн | | | | | | | |
| Тефия | $7.55 \cdot 10^{20}$ | 530 | 1.21 | 294660 | 1.887802 | 0.9 | 10.2 |
| Диона | $1.05 \cdot 10^{21}$ | 560 | 1.43 | 377400 | 2.736915 | 0.7 | 10.4 |
| Рея | $2.49 \cdot 10^{21}$ | 765 | 1.33 | 527040 | 4.517500 | 0.7 | 9.7 |
| Титан | $1.35 \cdot 10^{23}$ | 2575 | 1.88 | 1221850 | 15.94542 | 0.21 | 8.2 |
| Япет | $1.88 \cdot 10^{21}$ | 730 | 1.21 | 3560800 | 79.33018 | 0.20 | ~ 11.0 |
| Уран | | | | | | | |
| Миранда | $6.33 \cdot 10^{19}$ | 235.8 | 1.15 | 129900 | 1.413479 | 0.27 | 16.3 |
| Ариэль | $1.7 \cdot 10^{21}$ | 578.9 | 1.56 | 190900 | 2.520379 | 0.34 | 14.2 |
| Умбриэль | $1.27 \cdot 10^{21}$ | 584.7 | 1.52 | 266000 | 4.144177 | 0.18 | 14.8 |
| Титания | $3.49 \cdot 10^{21}$ | 788.9 | 1.70 | 436300 | 8.705872 | 0.27 | 13.7 |
| Оберон | $3.03 \cdot 10^{21}$ | 761.4 | 1.64 | 583500 | 13.46324 | 0.24 | 13.9 |
| Нептун | | | | | | | |
| Тритон | $2.14 \cdot 10^{22}$ | 1350 | 2.07 | 354800 | 5.87685 [†] | 0.7 | 13.5 |

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.9. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике и график для уравнения времени

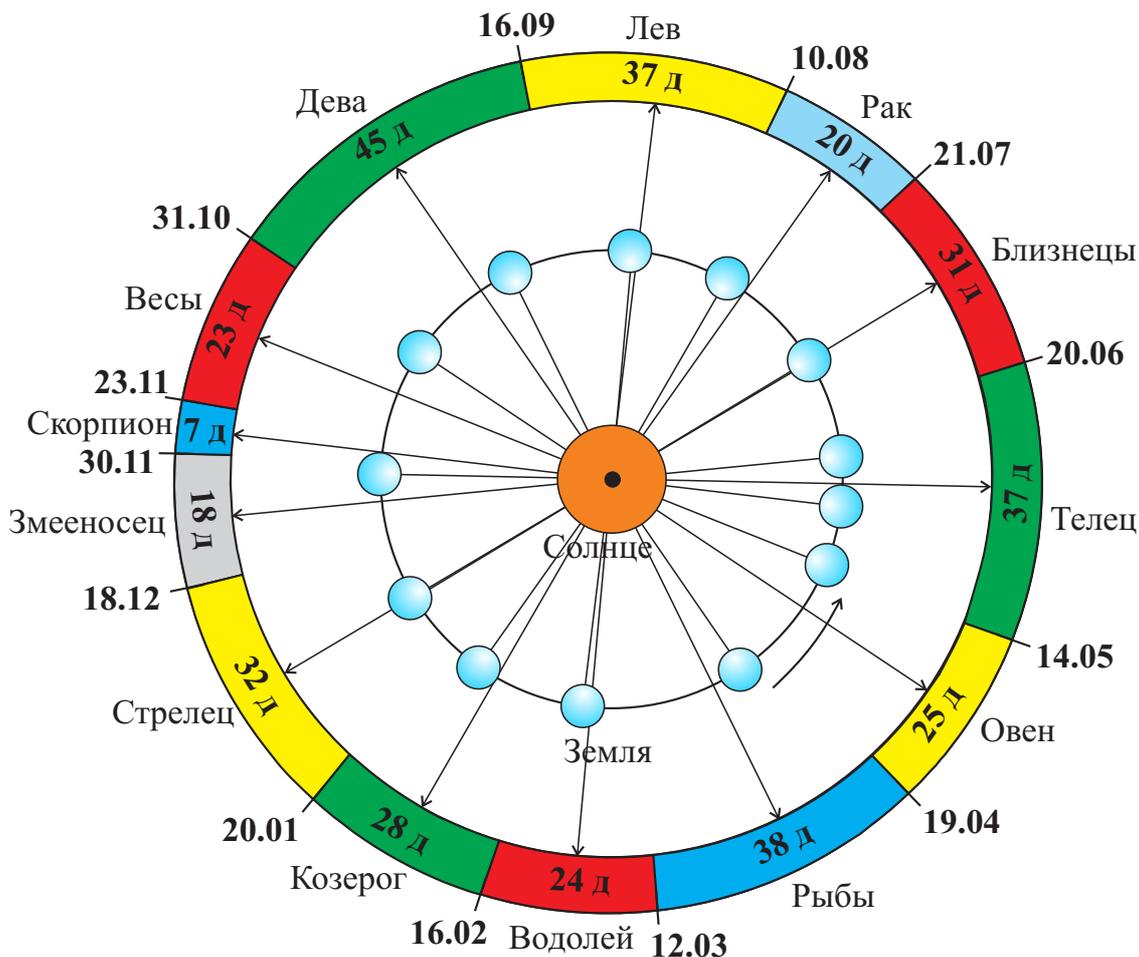


Рис. А.1. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике.

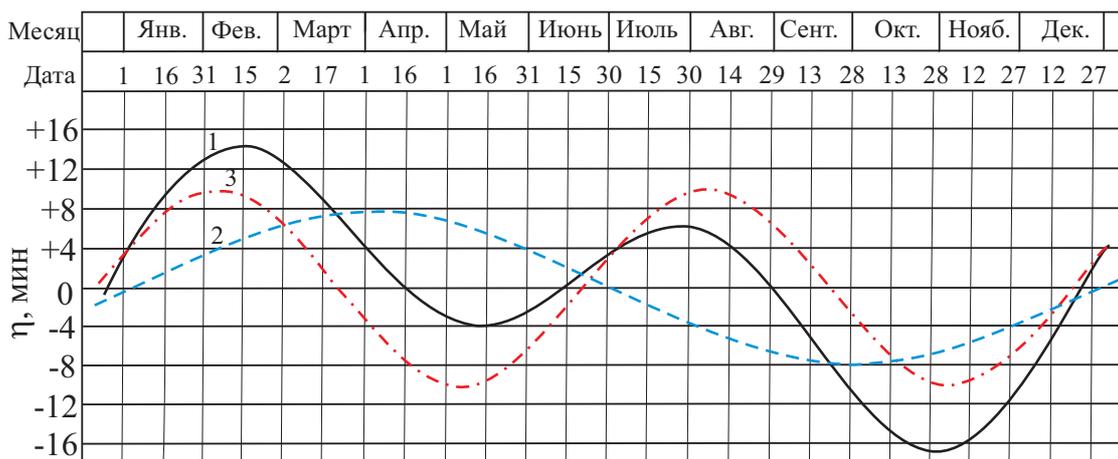


Рис. А.2. График уравнения времени: 1 – уравнение времени, 2 – уравнение центра, 3 – уравнение от наклона эклиптики.

А.10. Некоторые характеристики звезд

Болометрические поправки ΔM_b

| Спектр | ΔM_b | Спектр | ΔM_b | | |
|--------|--------------|--------|------------------------|---------|--------------|
| | | | Гл. последовательность | Гиганты | Сверхгиганты |
| B0 | - 2.70 | F5 | - 0.04 | - 0.08 | - 0.12 |
| B5 | - 1.58 | F8 | - 0.05 | - 0.17 | - 0.28 |
| A0 | - 0.72 | G0 | - 0.06 | - 0.25 | - 0.42 |
| A5 | - 0.31 | G2 | - 0.07 | - 0.31 | - 0.52 |
| F0 | - 0.09 | G5 | - 0.10 | - 0.39 | - 0.65 |
| F2 | - 0.04 | G8 | - 0.10 | - 0.47 | - 0.80 |
| | | K0 | - 0.11 | - 0.54 | - 0.93 |
| | | K2 | - 0.15 | - 0.72 | - 1.20 |
| | | K3 | - 0.31 | - 0.89 | - 1.35 |
| | | K4 | - 0.55 | - 1.11 | - 1.56 |
| | | K5 | - 0.85 | - 1.35 | - 1.86 |
| | | M0 | - 1.43 | - 1.55 | - 2.2 |
| | | M1 | - 1.70 | - 1.72 | - 2.6 |
| | | M2 | - 2.03 | - 1.95 | - 3.0 |
| | | M3 | - 2.35 | - 2.26 | - 3.6 |
| | | M4 | - 2.7 | - 2.72 | - 3.8 |
| | | M5 | - 3.1 | - 3.4 | - 4.0 |

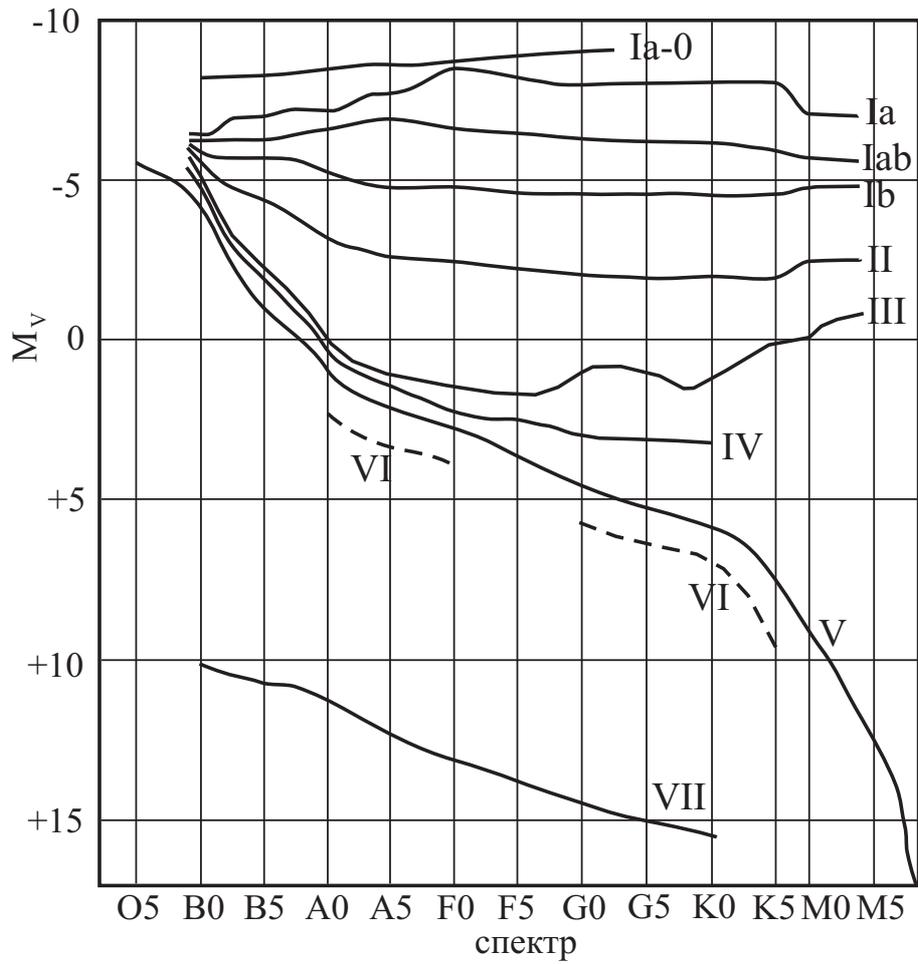


Рис. А.3. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

| ПЕРИОДЫ | A | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X | XI | XII | |
|---------|--|-------------------|-------------------------------|-----------------|-----------------|-------------------------------|-----------------|-----------------|-------------------------------|------------------|--------------|------------------|----------------|-----------------|
| | IA | IIA | IIIA | IVA | VA | VIA | VIIA | VIIB | VIIA | VIII | IX | X | XI | |
| 1 | (H) | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | Li Литий | Be Бериллий | B Бор | C Углерод | N Азот | O Кислород | F Фтор | Ne Неон | He Гелий | | | | | |
| 3 | Na Натрий | Mg Магний | Al Алюминий | Si Кремний | P Фосфор | S Сера | Cl Хлор | Ar Аргон | Ne Неон | | | | | |
| 4 | K Калий | Ca Кальций | Sc Скандий | Ti Титан | V Ванадий | Cr Хром | Mn Марганец | Fe Железо | Co Кобальт | Ni Никель | | | | |
| 5 | Rb Рубидий | Sr Стронций | Y Иттрий | Zr Цирконий | Nb Ниобий | Mo Молибден | Tc Технеций | Ru Рутений | Rh Родий | Pd Палладий | | | | |
| 6 | Cs Цезий | Ba Барий | La* Лантан | Hf Гафний | Ta Тантал | W Вольфрам | Re Рений | Os Осмий | Ir Иридий | Pt Платина | | | | |
| 7 | Fr Франций | Ra Радий | Ac** Актиний | Pb Свинец | Bi Висмут | Po Полоний | At Астат | Rn Радон | | | | | | |
| | R ₂ O | RO | R ₂ O ₃ | RH ₄ | RO ₂ | R ₂ O ₅ | RH ₂ | RO ₃ | R ₂ O ₇ | RH | | | | |
| | FORMULY ВЕЩЕСТВ ОДИНОВИДНЫХ СОЕДИНЕНИИ | | | | | | | | | | | | | |
| | Ce Церий | Pr Прозермий | Nd Неодим | Pm Прометий | Sm Самарий | Eu Европий | Gd Гадолиний | Tb Тербий | Dy Диurioпий | Ho Гольмий | Er Эрбий | Tm Тулий | Yb Иттербий | Lu Лютеций |
| | Th Торий | Pa Протактиний | U Уран | Np Нептуний | Pu Плутоний | Am Америций | Cm Кюрий | Bk Берклий | Cf Калифорний | Es Эйнштейний | Fm Фермий | Md Менделевий | No Нобелий | Lr Лавренсий |
| | ACTINOIDY** | | | | | | | | | | | | | |

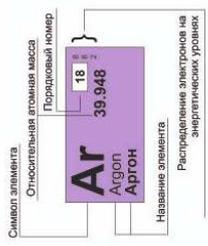


Рис. А.4. Таблица Менделеева.