

САМАРСКИЙ РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ДЛЯ ОДАРЕННЫХ ДЕТЕЙ
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ
КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ
ОТКРЫТОЙ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ ОЛИМПИАДЫ
ПО АСТРОНОМИИ им. Ф.А. БРЕДИХИНА
СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ.
СЕЗОН: 2022-2023, ТУР № 2



Самара, 2023 г.

Дорогие Друзья!

Вашему вниманию в данном релизе представлены 10 оригинальных задач двух уровней сложности – «Новичок» (уровень А), «Знаток» (уровень В). Задачи составлены в соответствии с *Перечнем вопросов, рекомендуемых Центральной предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады школьников по астрономии для подготовки обучающихся 10-11 классов к решению задач ее различных этапов.*

При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!

Ссылка: «Условия и решения конкурсных задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2023 среди обучающихся 10-11 классов. Тур № 2». – <https://sites.google.com/site/samrasolimp/>

Составитель: – *Филиппов Юрий Петрович*, научный руководитель школы, методист СРЦОД, к.ф.-м.н., доцент кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева.

Верстка в системе *ВТ_EX* – Филиппов Ю.П., Белозерская Л.Н.

Памятка участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2023

1. Официальный сайт Астрошколы:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/>

2. Официальная группа в VK:

vk.com/bredikhinolimp

3. Сроки подачи решений задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2023 тура № 2 на проверку:

15.02.2023-31.03.2023!!!

4. Электронный ящик ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2023:

samrasolimp@mail.ru

5. Руководство зарегистрированного участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2023:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/maindocs>

ИЛИ

<https://vk.com/bredikhinolimp>

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ



Дорогие Друзья!

Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2023, **внимательно** ознакомьтесь с **«Руководством зарегистрированного участника ОМОА им Ф.А. Бредихина-2023»!** Электронный адрес последнего указан в **Памятке участника.**

Уровень «Новичок» (уровень А)

№1. «Арктур – ярчайшая звезда северной полушеры небосвода»

Самой яркой звездой северной полушеры ночного небосвода является Арктур. С использованием лишь его экваториальных координат ($\alpha_* = 14^{\text{h}}16^{\text{m}}$, $\delta_* = 19^{\circ}11'$) и карт звездного небосвода (см. приложение В.1), определите:

1. В каком созвездии располагается эта звезда? К югу или к северу от зенита расположена точка ее верхней кульминации в г. Самаре (широта: $\varphi = 53^{\circ}12'$, долгота: $\lambda = 50^{\circ}06'$)? (2 балла)

2. Чему равна его угловая скорость (в угловых секундах за секунду временную, с точностью до целых) видимого суточного движения по небосводу? (2 балла)

3. Чему равна высота звезды в верхней кульминации в г. Самаре? Является ли данная звезда в этом городе незаходящей? (3 балла)

4. Какой сезон года является оптимальным для наблюдений Арктура на ночном небосводе г. Самары? Свой ответ обоснуйте строго математически. (2 балла)

№2. «Взгляд на Солнце с Арктура»

С использованием лишь карт звездного небосвода (см. приложение В.1) и экваториальных координат Арктура (см. условие предыдущей задачи), определите:

1. В каком созвездии должно наблюдаться Солнце, с точки зрения гипотетического наблюдателя, расположенного в малой окрестности Арктура? Укажите положение Солнца на копии карты звездного неба. (2 балла)

2. Оцените угловое расстояние между Солнцем и самой яркой звездой этого созвездия земного небосвода. (2 балла)

3. Чему равна видимая звездная величина Солнца с позиции гипотетического наблюдателя, если годичный параллакс Арктура равен $\pi_* = 0.0888''$. Будет ли видно Солнце из окрестностей Арктура невооруженным глазом? (3 балла)

4. Оцените, во сколько раз Солнце будет ярче/тусклее самой яркой звезды (видимой с Земли) созвездия, на которое оно проецируется? (3 балла)

№ 3. «Точка осеннего равноденствия и ее "судьба"»

1. Что такое точка осеннего равноденствия? (1 балл)

2. С использованием карт звездного небосвода (см. приложение В.1), определите: в каком созвездии она располагается сегодня? На копии соответствующей карты укажите ее положение. (2 балла)

3. Почему ее иногда называют «точкой Весов»? Оцените с использованием лишь карт звездного неба (см. приложение В.1), значений тропического ($T_{\text{тр}} = 365.242188315$ сут) и звездного года ($T_{\oplus} = 365.256363004$ сут) Земли, какое минимальное количество лет тому назад это утверждение было корректным? (5 баллов)

4. Оцените минимальное количество лет спустя от настоящего момента, через которые эту точку можно будет назвать «точкой Льва»? (2 балла)

№ 4. «Сигнальные вышки Самары и Тольятти»

Вам дана карта Самарской области (проекция трехмерной поверхности Земли на сферическую поверхность). Определите:

1. Геоцентрическое угловое расстояние (α) между крупнейшими городами Самарской области – г. Самарой и г. Тольятти (если смотреть на них из центра Земли). Следует считать, что Земля является шаром, ее радиус на уровне моря равен $R_{\oplus} = 6371$ км. (2 балла)

2. Расстояние (по прямой, r) между указанными городами, если высоты г. Самары и г. Тольятти над уровнем моря равны соответственно $H_S = 100$ м и $H_T = 92$ м. Какова относительная погрешность определения r , если в расчетах пренебрегать высотами городов. (3 балла)

3. Расстояние (по поверхности Земли, s) между указанными городами, если высота (относительно уровня моря) точек земной поверхности на большом круге, соединяющем данные города, меняется по закону:

$$H = H_T + V \cdot \beta, \quad \text{где } V = \frac{H_S - H_T}{\alpha}, \quad (1)$$

здесь β – геоцентрическое угловое расстояние, отсчитываемое вдоль указанного большого круга от г. Тольятти. Какова относительная погрешность определения s , если в расчетах пренебрегать зависимостью $H(\beta)$. (4 балла)

4. Минимальную высоту вышек (h_{\min}), выставленных в этих городах, с верхних точек которых уже можно передавать друг другу световые сигналы? Атмосферным поглощением света и влиянием рельефа пренебречь. (2 балла)

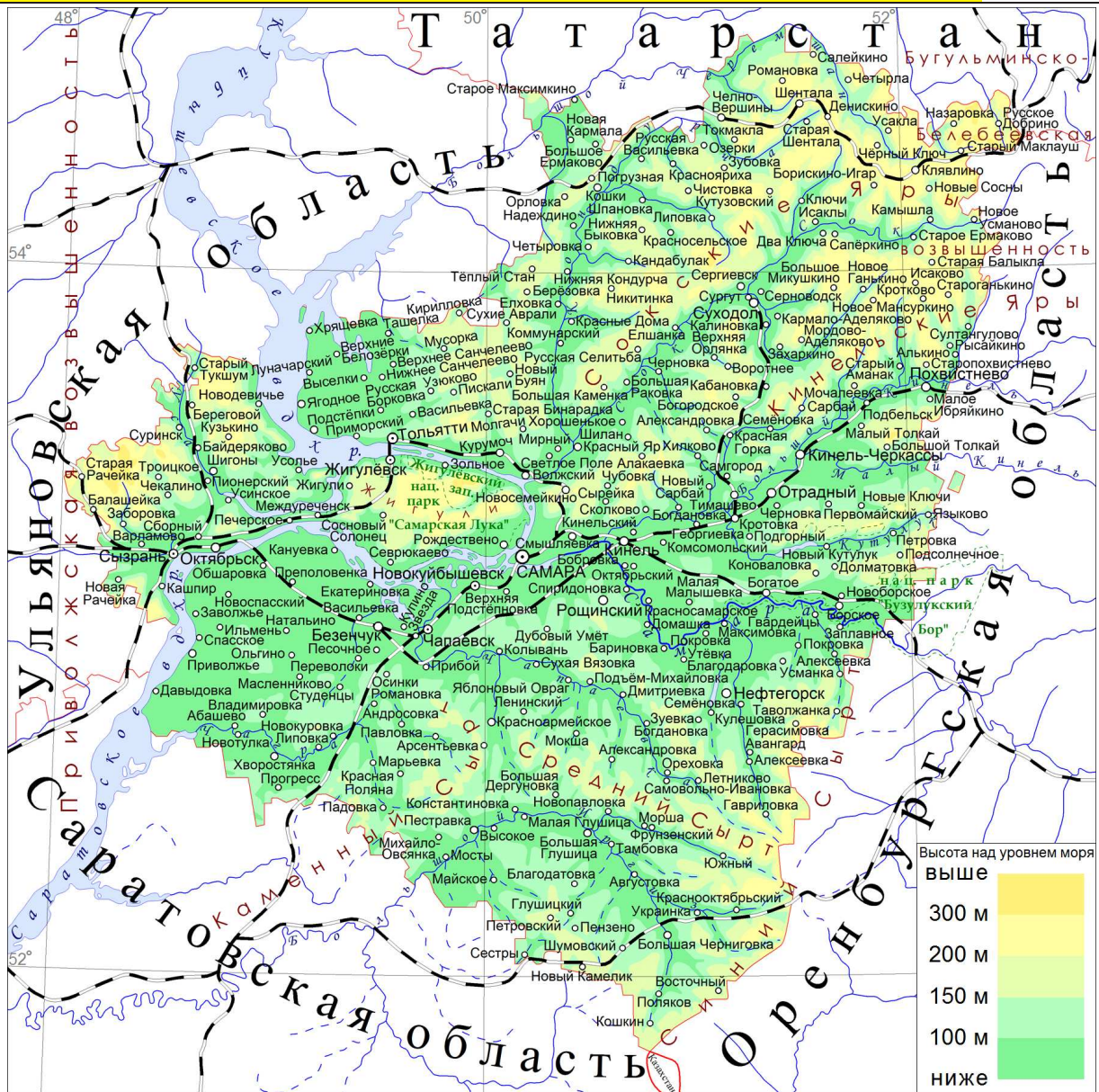


Рис. 1. Карта Самарской области (источник фото – Wikipedia.org).

Уровень «Знарок» (уровень В)

№5. «Прецессия земной оси и эпохи южных полярных звезд»

С использованием лишь карты звездного неба (см. приложение В.1)

1. Постройте круг прецессии, который описывает южный полюс мира на копии соответствующей карты. Укажите на данном круге направление видимого движения данного полюса. Следует при этом полагать, что ось мира в прецессионном движении описывает в пространстве круговой конус с углом раствора $\varepsilon = 23.5^\circ$. Какие созвездия проходит южный полюс мира в течение одного периода прецессии земной оси? (3 балла)

2. Какие яркие звезды (блеск которых $m_* \leq 5^m$) могут выполнять роль полярной звезды при таком движении (следует относить к таким звездам, к которым полюс мира подходит на расстояние $\Delta \leq 3^\circ$). Оцените, через какое количество лет южный полюс мира подойдет к соответствующей звезде, на минимальное расстояние? (5 баллов)

3. Чему равен телесный угол (в квадратных градусах) полосы небосвода, в котором располагаются "полярные звезды"? (3 балла)

№6. «Павлов день и прибавка к продолжительности дня»

28 января каждого года русская православная церковь отмечает день памяти Павла Фивейского, которого считают первым христианским монахом. В народном календаре примет и фольклора Руси с этим праздником связано утверждение: «Пришел Павел – день прибавил», отмечая тем самым, что зима неуклонно движется к завершению, ночи становятся короче, а дни – длиннее. Определите для г. Самары:

1. Продолжительность дня в сутки зимнего солнцестояния (22 декабря). Моменты восхода и захода Солнца по самарскому времени (Всемирное время + 4 часа) в эти сутки. (5 баллов)

2. Продолжительность дня 28 января. Моменты восхода и захода Солнца по самарскому времени в эти сутки. (5 баллов)

3. Насколько продолжительность дня 28 января больше продолжительности дня зимнего солнцестояния в г. Самаре? (2 балла)

В расчетах следует учесть конечность размеров видимого диска Солнца и явление рефракции; необходимо также учесть эффекты, приводящие к изменению продолжительности дня: а) непостоянство угловой скорости видимого движения Солнца; б) эллиптичность земной орбиты и ее наклон к плоскости земного экватора.

№ 7. «Взрыв сверхновой, породившей Солнечную систему»

Согласно современным представлениям, изотопы урана ^{238}U , ^{235}U , и торий ^{232}Th , являются родоначальниками радиоактивных рядов и образуются, по-видимому, при взрывах сверхновых звезд. Близлежащие газопылевые облака, в которые попадают эти продукты взрыва, могут породить звезды следующего "поколения", в частности, Солнце и планеты Солнечной системы. По-видимому, в этих выбросах изотопов урана и тория было примерно поровну. Определите, сколько лет назад произошел взрыв сверхновой (Котликуэ) и соответствующий выброс вещества, из которого сформировалась наша Солнечная система (и, в частности, Земля). Из лабораторных исследований, известно, что объемная доля ^{238}U составляет $\eta_1 = 99.2739\%$, для $^{235}\text{U} - \eta_2 = 0.7024\%$. Известно также, что на каждые 10^3 атомов ^{238}U приходится 1870 атомов ^{232}Th . Период полураспада, то есть время, в течение которого число атомов данного изотопа уменьшается в 2 раза, для ^{238}U равно $T_1 = 4.51 \cdot 10^9$ лет, для $^{235}\text{U} - T_2 = 7.13 \cdot 10^8$ лет, для $^{232}\text{Th} - T_3 = 1.405 \cdot 10^{10}$ лет. (14 баллов)

№ 8. «Комета в окрестности полюса мира»

На рис. 2 представлена карта видимого собственного движения кометы

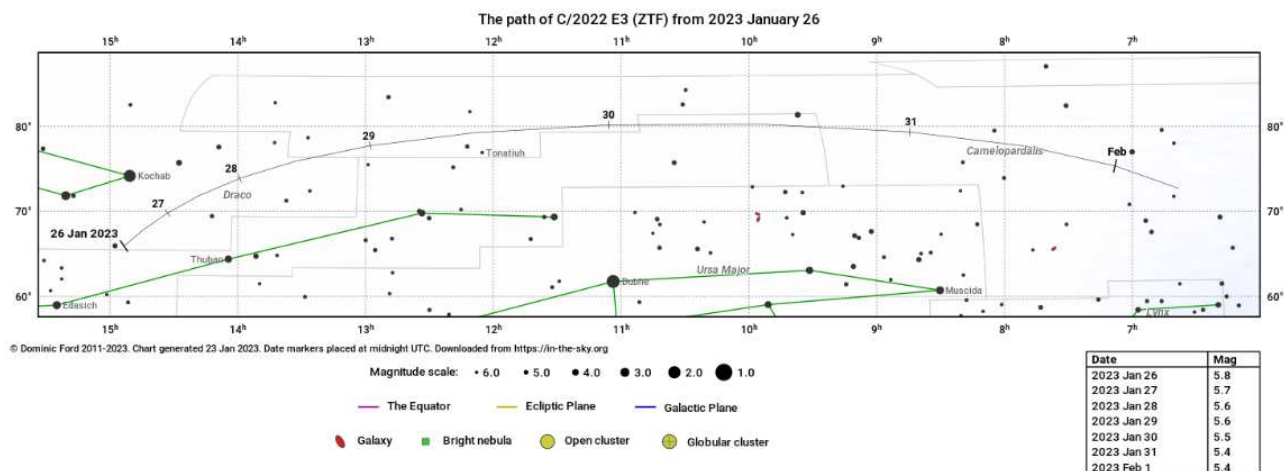


Рис. 2. Карта видимого собственного движения кометы C/2022 E3 (ZTF) в период 26.01-01.02.2023 года (источник – in-the-sky.org).

C/2022 E3 (ZTF) в период 26.01-01.02.2023 года. Оцените:

1. Дату и время момента наибольшего сближения данной кометы с северным полюсом мира. (2 балла)
2. Чему равны экваториальные координаты кометы в этот момент времени? (2 балла)
3. Угловое расстояние между кометой и Полярной звездой ($\alpha_* = 02^{\text{h}}31^{\text{m}}$, $\delta_* = +89^{\circ}15'$) в этот момент для земного наблюдателя. (2 балла)
4. Собственное движение кометы в этот момент. (2 балла)
5. Чему равно максимально возможное время выдержки при получении одиночного кадра (в период 26.01-01.02.2023 года), которое может выставить начинающий астроном-любитель на цифровой камере с размерами пикселя 4.3×4.3 мкм, при съемке с неподвижного штатива и с использованием объектива с фокусным расстоянием $f = 135$ мм? Следует учесть, что согласно теореме Котельникова, для формирования элементарного цифрового изображения звезды необходимо использование не менее двух пикселей матрицы. (3 балла)
6. Чему равна максимальная продолжительность одного сеанса съемки кометы одиночными кадрами с тем же оборудованием, в пределах которого комета на кадрах будет оставаться неподвижной относительно ближайших звезд. Какое максимальное количество одиночных кадров (с максимально допустимой выдержкой) можно получить в рамках одного такого сеанса? (3 балла)

№ 9. «Звезды в полуденном небосводе Самарской области»

В южных районах самарской степной местности (широта – $\varphi = 52^{\circ}03'$, долгота – $\lambda = 50^{\circ}53'$) 21 июня в безоблачный полдень проводился сеанс астрономических наблюдений звезд и планет с помощью: 1) невооруженных глаз и 2) телескопа с диаметром объектива $D_T = 150$ мм и относительным отверстием $\chi = D_T/F = 1 : 5$ (здесь F – фокусное расстояние объектива телескопа) и большим набором окуляров с широким спектром фокусных расстояний. На-

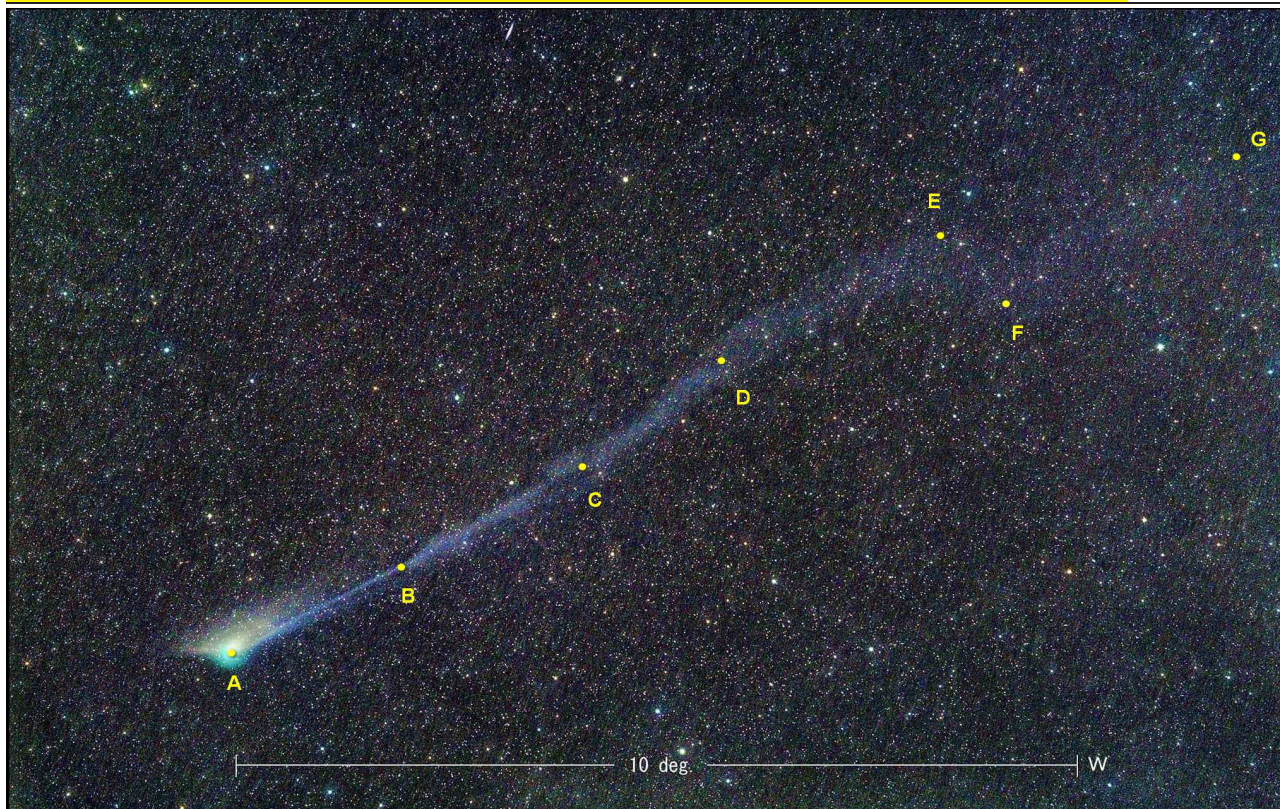


Рис. 3. Фотография кометы C/2022 E3 (ZTF) от 19.01.2023 года, 19 часов 33 мин по всемирному времени (автор фото – Mitsunori Tsumura, Япония).

блюдения стали возможны после проливного дождя, при этом синг достиг рекордно низкого значения $s_{\min} = 0.5''$. Известно, что сферическое альbedo безоблачной атмосферы Земли составляет $A_a = 0.07$, а зенитная оптическая толщина чистой земной атмосферы – $\tau_0 = 0.0984$. Какое количество звезд можно увидеть в идеальных условиях в полдень: а) невооруженным глазом (его разрешающая способность $\beta_y = 1'$), б) в этот телескоп? Какие планеты можно увидеть с помощью указанных оптических инструментов, при условии что они располагаются над горизонтом. Рассеяние света в земной атмосфере следует считать изотропным. При решении задачи может оказаться полезной статистика распределения звезд по звездным величинам (см. справочные данные, блок А.12). (14 баллов)

№ 10. «Массовые потери кометы C/2022 E3 (ZTF)»

На рис. 3 представлена фотография кометы C/2022 E3 (ZTF) от 19.01.2023 года. На момент съемки экваториальные координаты Солнца составляли $\alpha_{\odot} = 20^{\text{h}}06^{\text{m}}$, $\delta_{\odot} = -20^{\circ}16'$, экваториальные координаты кометы – $\alpha_c = 15^{\text{h}}36^{\text{m}}$, $\delta_c = +48^{\circ}40'$, ее геоцентрическое расстояние – $\Delta_c = 76.379$ млн км и гелиоцентрическое расстояние – $r_c = 167.270$ млн км. Определите:

1. Угловой видимый размер газового (ионного) хвоста (ABCDEFGG). (1 балл)
2. Фазовый угол кометы на момент ее съемки. (2 балла)
3. Линейный размер газового (ионного) хвоста (ABCDEFGG). (2 балла)
4. Скорость истечения потоков газа из комы в хвост кометы, если известно,

что ровно за 3 суток до съемки наблюдался разрыв газового хвоста (ему соответствует участок EF). Известно, что незадолго до момента съемки комета прошла свой перигелий. (3 балла)

5. Поток массы газа, теряемого кометой в результате сублимации ядра радиусом $R_N = 10$ км, со сферическим альбедо $A_N = 0.04$. Следует полагать, что доля энергии солнечного излучения, поглощенного ядром и затрачиваемая на сублимацию, равна $\chi_N = 0.5$. Удельная теплота сублимации водяного льда (как основного летучего компонента ядра) – $h_w = 1.884 \cdot 10^6$ Дж/кг. (3 балла)

6. Диаметр внутренней комы кометы, откуда главным образом выдувается газ давлением солнечного ветра (распространяющегося строго от Солнца) и уходит в хвост (участок АВ). Концентрацию молекул воды в газовом джете АВ. (2 балла)

7. Максимальное изменение блеска звезд фона, обусловленного экстинкцией света газовым джетом АВ (состоящим только из водяного пара, вкладом других газов следует пренебречь). Следует полагать, что молекулы воды имеют форму шара диаметром 0.28 нм. (2 балла)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



Уровень «Новичок» (уровень А)

№1. «Арктур – ярчайшая звезда северной полушеры небосвода»

1. Согласно экваториальным координатам звезды и рис. В.3 приложения В, звезда Арктур принадлежит созвездию *Волопас*. Поскольку широта места наблюдения превосходит склонение звезды, то данная звезда должна кульминировать к югу от зенита в г. Самаре. (2 балла)

2. Угловую скорость видимого суточного движения Арктура по небосводу можно определить по формуле:

$$\omega_{\odot} = \omega_{\oplus} \cos \delta_* = 14.17''/c \approx 14''/c, \quad (2)$$

здесь $\omega_{\oplus} = 15''/c$ – угловая скорость суточного вращения Земли, δ_* – склонение Арктура. (2 балла)

3. Воспользуемся формулой для высоты светила в верхней кульминации к югу от зенита (поскольку $\varphi > \delta_*$) и определим ее для Арктура:

$$h_{\max}^{(*)} = 90^\circ - \varphi + \delta_* = 55^\circ 59'. \quad (3)$$

Определим высоту Арктура в нижней кульминации:

$$h_{\min}^{(*)} = \varphi + \delta_* - 90^\circ = -17^\circ 37' < 0^\circ. \quad (4)$$

Поскольку значение последнего параметра меньше нуля, значит данная звезда в течение суток обязательно пребывает ниже горизонта. Поэтому она не является незаходящим светилом в г. Самаре. (3 балла)

3. Условия наблюдений небесного тела считаются *оптимальными*, если данное тело наблюдается в *истинную полночь* (при этом Солнце находится в нижней кульминации) в малой окрестности своей верхней кульминации. Поскольку Солнце и Арктур располагаются в нижней и верхней кульминациях соответственно, следовательно их прямые восхождения должны отличаться на 12 часов. Значит оптимальные условия будут достигаться в тот момент, когда прямое восхождение Солнца будет составлять $\alpha_{\odot} = \alpha_* - 12^h = 02^h 16^m$. Учтем далее, что в день весеннего равноденствия (20 ÷ 21 марта) прямое восхождение Солнца составляет ровно $00^h 00^m$ и каждые последующие сутки оно увеличивается приблизительно на 4 минуты. Следовательно данное значение прямого восхождения Солнце достигнет приблизительно через 34 суток после дня весеннего равноденствия, т.е. 23 ÷ 24 апреля, что соответствует сезону весна. В этом можно убедиться, используя диаграмму видимого годичного движения Солнца по эклиптике (см. рис. А.1, приложения А). (2 балла)

№ 2. «Взгляд на Солнце с Арктура»

1. С точки зрения гипотетического наблюдателя, расположенного в малой окрестности Арктура, Солнце должно располагаться в точке небосвода, диаметрально противоположной точке, в которой расположен Арктур с позиции

угловое расстояние определяется как величина дуги $\overset{\circ}{S}\beta = \rho$, которую можно определить по теореме Пифагора:

$$\rho = \sqrt{(SP)^2 + (P\beta)^2} = \sqrt{(\alpha_{\odot}^{(A)} - \alpha_{\beta})^2 + (\delta_{\odot}^{(A)} - \delta_{\beta})^2} = 23.0^{\circ}. \quad (6)$$

Здесь учтено, что сторона SP параллельна небесному экватору. Следовательно его длина определяется разностью прямых восхождений Солнца и данной звезды. Сторона $P\beta$ параллельна кругу склонения, вдоль которого откладываются склонения данных светил, и потому ее можно определить разностью склонений светил. Отметим, что тоже значение углового расстояния между указанными звездами можно получить с использованием точных формул сферической тригонометрии. В частности, формула косинусов для данного прямоугольного сферического треугольника позволяет определить величину ρ (2 балла):

$$\cos \rho = \cos \overset{\circ}{S}P \cos \overset{\circ}{P}\beta, \Rightarrow \rho = \arccos[\cos(\alpha_{\odot}^{(s)} - \alpha_{\alpha}) \cos(\delta_{\odot}^{(s)} - \delta_{\alpha})] = 23.0^{\circ}.$$

3. Для определения видимой звездной величины Солнца с позиции гипотетического наблюдателя воспользуемся формулой Погсона:

$$m_{\odot}^{(A)} - m_{\odot}^{(\oplus)} = -2.5 \lg \left(\frac{E_{\odot}^{(A)}}{E_{\odot}^{(\oplus)}} \right), \Rightarrow m_{\odot}^{(A)} = m_{\odot}^{(\oplus)} + 2.5 \lg \left(\frac{E_{\odot}^{(\oplus)}}{E_{\odot}^{(A)}} \right),$$

здесь $m_{\odot}^{(\oplus)}$, $m_{\odot}^{(A)}$ – видимые звездные величины, создаваемые Солнцем у поверхности Земли и Арктура соответственно; $E_{\odot}^{(\oplus)}$, $E_{\odot}^{(A)}$ – соответствующие указанным звездным величинам освещенности.

Учитывая далее, что освещенность, создаваемая Солнцем, подчиняется закону обратных квадратов, т.е. $E \sim \frac{1}{r^2}$, где r – расстояние от источника до наблюдателя, формулу Погсона можно переписать в виде:

$$m_{\odot}^{(A)} = m_{\odot}^{(\oplus)} + 2.5 \lg \left(\frac{r_A}{a_{\oplus}} \right)^2 = m_{\odot}^{(\oplus)} + 5 \lg \left(\frac{206265''}{\pi_*} \right) = 5.09^m, \quad (7)$$

здесь a_{\oplus} , r_A – гелиоцентрические расстояния Земли и Арктура соответственно; $m_{\odot}^{(\oplus)} = -26.74^m$, согласно справочным данным; при записи последнего выражения было учтено явное выражение для годичного параллакса Арктура:

$$\pi_* = \frac{a_{\oplus}}{r_A} \times 206265'', \Rightarrow \frac{a_{\oplus}}{r_A} = \frac{\pi_*}{206265''}.$$

Поскольку полученное значение видимой звездной величины (7) меньше $+6^m$, то Солнце будет видно невооруженным глазом. (3 балла)

4. Для ответа на последний вопрос задачи вновь воспользуемся формулой Погсона:

$$\frac{E_{\beta}^{(\oplus)}}{E_{\odot}^{(A)}} = 10^{0.4(m_{\odot}^{(A)} - m_{\beta}^{(\oplus)})} = 16.6. \quad (8)$$

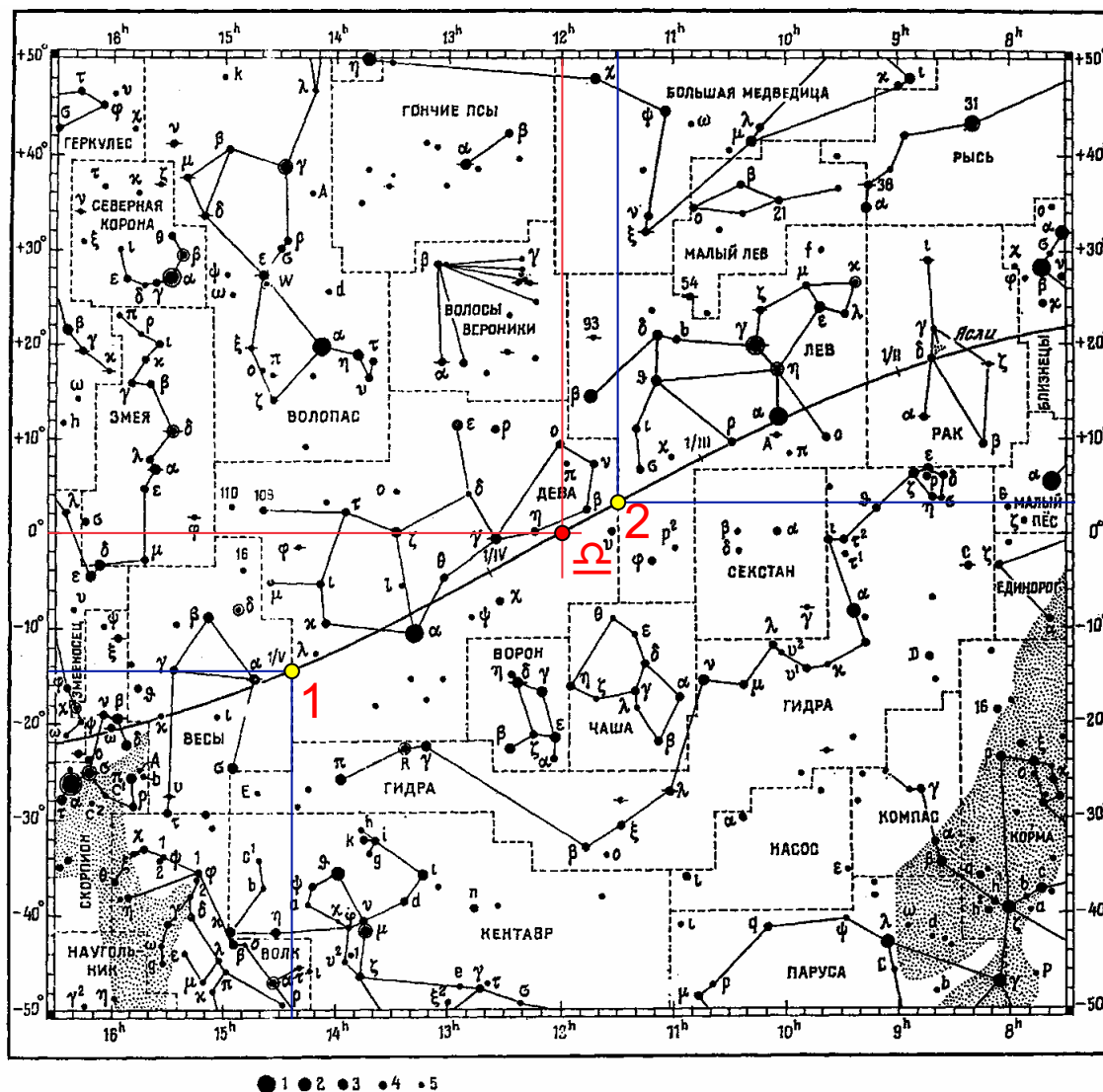


Рис. 5. К определению положения точки осени на карте звездного небосвода.

Таким образом, β Кита (Дифда), видимая на земном небосводе, в 16.6 раза ярче Солнца для наблюдателя, расположенного в окрестности Арктур. (3 балла)

№3. «Точка осеннего равноденствия и ее "судьба"»

Решение. 1. Точка осеннего равноденствия (\sphericalangle) – точка небесной сферы, являющаяся результатом пересечения двух больших кругов небесной сферы: небесного экватора и эклиптики. Солнце проходит эту точку, двигаясь из северной полусферы небосвода в южную. Поскольку эта точка принадлежит небесному экватору, то ее склонение равно нулю. Как известно, она диаметрально противоположна точке весны, от которой отсчитываются прямые восхождения светил вдоль экватора, значит прямое восхождение точки осени равно 12^{h} . Значит ее экваториальные координаты: $\alpha_{\gamma} = 12^{\text{h}}00^{\text{m}}$, $\delta_{\gamma} = 0^{\circ}00'$. (1 балл)

2. С использованием экваториальных координат точки \sphericalangle определим ее положение на карте (см. рис. 5, отмечена красной жирной точкой). Очевидно, что данная точка принадлежит созвездию Девы. (2 балла)

3. «Точкой Весов» ее называют потому, что в тот момент, когда ее впервые определили, она была расположена в созвездии Весы. Изменение положения данной точки на небосводе обусловлено прецессией земной оси относительно оси эклиптики. С использованием указанных периодов вычислим ее угловую скорость перемещения по эклиптике на встречу Солнцу, с расчетом на один год. Определим разность продолжительностей данных промежутков времени:

$$\Delta T = T_{\text{зв}} - T_{\text{тр}} = 0.014174689 \text{ сут.}$$

За время $T_{\text{зв}}$ Земля делает один полный оборот вокруг Солнца относительно далеких звезд. Таким образом, она поворачивается на 360° в пространстве. Следовательно, средняя угловая скорость ее орбитального движения составляет

$$\bar{\omega}_{\oplus} = \frac{360^\circ}{T_{\text{зв}}}.$$

За промежуток времени $T_{\text{тр}}$ точка весны смещается по эклиптике на угол $\Delta \ell = \omega_{\oplus} \cdot \Delta T$. Следовательно, угловую скорость годичного движения точки весны (а следовательно и точки осени) можно представить так:

$$\mu_{\gamma} = \frac{\Delta \ell}{T_{\text{тр}}} \approx \frac{\Delta \ell}{1 \text{ год}} = 50.295''/\text{год}. \quad (9)$$

С использованием карты звездного небосвода (см. рис. 5), оценим текущее угловое расстояние точки осени относительно точки пересечения восточной границы созвездия Девы и эклиптики (отмечена цифрой «1» на рис. 5), координаты которой, согласно карте, составляют ($\delta_1 = -14.5^\circ$, $\alpha_1 = 14^{\text{h}}23^{\text{m}}$). Очевидно, искомая дуга эклиптики близка к прямолинейному отрезку. Тогда ее угловую меру можно оценить по теореме Пифагора:

$$\rho_1 = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_{\gamma})^2 + (\delta_1 - \delta_{\gamma})^2} = 38.6^\circ.$$

Точный расчет угла с использованием сферического треугольника, в вершинах которого расположены точка «1», точка осени и северный полюс мира дает значение $\rho_1^{(\text{exp})} = 38.2^\circ$. Следовательно, искомое время будет

$$\tau_1 = \frac{\rho_1^{(\text{exp})}}{\mu_{\gamma}} = 2735 \text{ лет}. \quad (10)$$

Т.о., не менее 2735 лет тому назад данную точку было корректным называть «точкой Весов». (5 баллов)

4. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, находим координаты точки (отмечена цифрой «2») пересечения западной границы созвездия Девы и эклиптики: ($\delta_2 = 3.3^\circ$, $\alpha_2 = 11^{\text{h}}29^{\text{m}}$). Очевидно, вновь искомая дуга эклиптики близка к прямолинейному отрезку. Тогда ее угловую меру можно оценить

по теореме Пифагора:

$$\rho_2 = \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_\tau)^2 + (\delta_2 - \delta_\tau)^2} = 8.4^\circ.$$

Следовательно, искомое время будет

$$\tau_2 = \frac{\rho_2}{\mu_\tau} = 600 \text{ лет.} \quad (11)$$

Т.о., как минимум, лишь через 600 лет данную точку будет корректным называть «точкой Льва». (2 балла)

№ 4. «Сигнальные вышки Самары и Тольятти»

Решение. 1. С использованием карты Самарской области определим географические координаты данных городов: г. Самара ($\varphi_S = 53^\circ 12'$, $\lambda_S = 50^\circ 10'$), г. Тольятти ($\varphi_T = 53^\circ 31.5'$, $\lambda_T = 49^\circ 33.5'$). Рассмотрим сферический треугольник $\triangle_S NST$ (см. рис. 6.а), в вершинах которого расположены данные города (S – Самара, T – Тольятти) и северный географический полюс (N). Воспользуемся формулой косинусов для данного треугольника для определения искомого геоцентрического угла (2 балла):

$$\cos \alpha = \cos(90^\circ - \varphi_S) \cos(90^\circ - \varphi_T) + \sin(90^\circ - \varphi_S) \sin(90^\circ - \varphi_T) \cos(\lambda_S - \lambda_T), \Rightarrow$$

$$\alpha = \arccos [\sin \varphi_S \sin \varphi_T - \cos \varphi_S \cos \varphi_T \cos(\lambda_S - \lambda_T)] = 0.487^\circ = 0.00850. \quad (12)$$

2. С использованием полученного значения угла α легко определить расстояние по прямой с использованием теоремы косинусов для плоского треугольника, в вершинах которого расположены данные города и центр Земли (2 балла):

$$r = \sqrt{(\mathfrak{R}_\oplus + H_S)^2 + (\mathfrak{R}_\oplus + H_T)^2 - 2(\mathfrak{R}_\oplus + H_S)(\mathfrak{R}_\oplus + H_T) \cos \alpha} = 54.1798 \text{ км.}$$

Вычислим ту же величину, пренебрегая высотами городов над уровнем моря:

$$r_0 = 2\mathfrak{R}_\oplus \sin \frac{\alpha}{2} = 54.1790 \text{ км.}$$

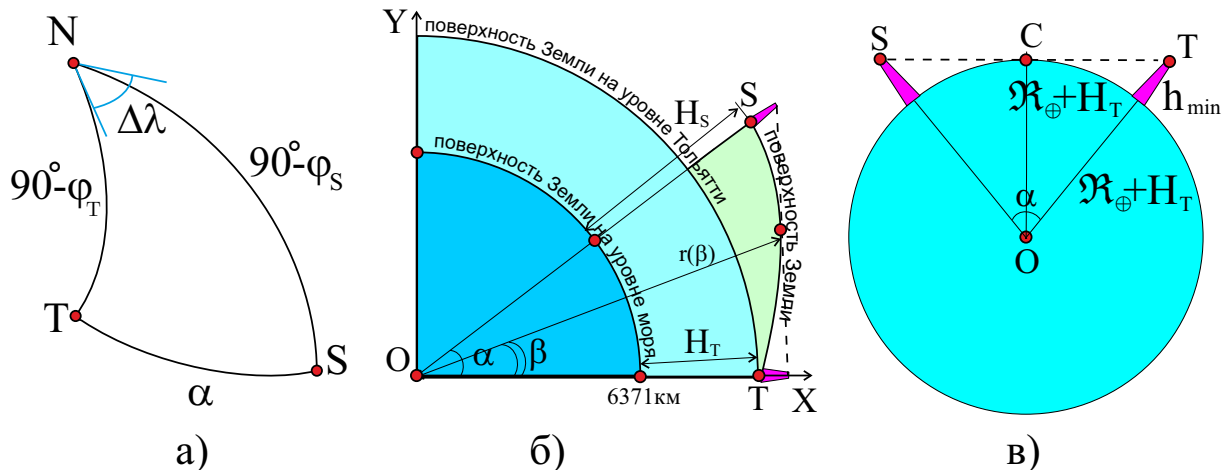


Рис. 6. К определению а) сферического треугольника $\triangle_S NST$, б) расстояния между городами по поверхности Земли, в) минимальной высоты вышек.

Относительную погрешность для искомого расстояния определим как (1 балл)

$$\varepsilon = \frac{r - r_0}{r} \times 100\% = 1.5 \cdot 10^{-3}\%.$$

3. Для поиска ответа на данный вопрос задачи введем полярную систему координат (r, β) , начало которой совместим с центром Земли, полярную ось ОХ направим от центра Земли через г. Тольятти. Ось ОУ декартовой системы направим перпендикулярно так, как показано на рис. 6.б). Связь декартовых и полярных координат, очевидно, представляется в виде:

$$x = r \cos \beta, \quad y = r \sin \beta.$$

Тогда полярный радиус-вектор точки поверхности можно записать так

$$r = \mathfrak{R}_{\oplus} + H(\beta) = A + V \beta, \quad \text{где } A = \mathfrak{R}_{\oplus} + H_T.$$

Элемент дуги кривой, соединяющей данные города по поверхности Земли, можно представить в виде:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\beta^2}.$$

Учтем далее, что

$$dr = V d\beta, \quad r^2 \approx A^2 \left(1 + 2 \frac{V}{A} \beta \right).$$

Поскольку $V \beta / A \ll 1$, а следовательно справедливо биномиальное приближение (см. приложение А.5, последняя формула). В итоге элемент дуги можно упростить к виду:

$$ds = d\beta \sqrt{V^2 + A^2 + 2VA\beta} \approx d\beta \sqrt{A^2 + V^2} \left(1 + \frac{VA}{A^2 + V^2} \beta \right).$$

Тогда искомую длину дуги можно представить в виде (3 балла):

$$\begin{aligned} s &= \int ds = \int_0^{\alpha} d\beta \sqrt{A^2 + V^2} \left(1 + \frac{VA}{A^2 + V^2} \beta \right) = \\ &= \sqrt{A^2 + V^2} \left(\alpha + \frac{VA}{A^2 + V^2} \frac{\alpha^2}{2} \right) = 54180.0 \text{ м.} \end{aligned} \quad (13)$$

Вычислим ту же величину, пренебрегая высотами городов над уровнем моря: $s_0 = \mathfrak{R}_{\oplus} \alpha = 54179.2$ м. Относительная погрешность для искомой длины определяется как (1 балл)

$$\varepsilon_s = \frac{s - s_0}{s} \times 100\% = 1.5 \cdot 10^{-3}\%.$$

4. Поскольку учет высот городов над уровнем моря не приводит к существенным изменениям в результатах (относительные погрешности искомым

величин в пунктах 2 и 3 крайне малы), то поиск минимальной высоты вышек выполним в приближении Земли-шара радиуса $\mathfrak{R}_{\oplus} + H_T$ (пренебрегая перепадом высот между городами). Рассмотрим рис. 6.в). Для треугольника $\triangle SOC$ можем записать (2 балла)

$$\cos \alpha/2 = \frac{\mathfrak{R}_{\oplus} + H_T}{\mathfrak{R}_{\oplus} + H_T + h_{\min}}, \Rightarrow h_{\min} = (\mathfrak{R}_{\oplus} + H_T) \left(\frac{1}{\cos \alpha/2} - 1 \right) = 57.5 \text{ м.} \quad (14)$$

Уровень «Знаток» (уровень В)

№ 5. «Прецессия земной оси и эпохи южных полярных звезд»

Решение. 1. Поскольку ось мира в прецессионном движении описывает в пространстве круговой конус с углом раствора $\varepsilon = 23.5^\circ$ относительно оси эклиптики, то необходимо, прежде всего, определить экваториальные координаты южного полюса эклиптики: $\delta_{\Pi_S} = -66.5^\circ$, $\alpha_{\Pi_S} = 6^{\text{h}}00^{\text{m}}$. Отметим положение данной точки на карте (Π_S см. рис. 7). Здесь же сплошной красной линией отмечено положение южного круга прецессии. Красной стрелкой указано направление движения южного полюса мира относительно созвездий. Очевидно, данный круг проходит через следующие созвездия: Октант, Хамелеон, Киль, Паруса, Корма, Живописец, Резец, Часы, Южная гидра, Тукан. (3 балла)

2. Для определения звезд, которые могут выполнять роль Полярной звезды, построим малые круги с угловыми радиусами, равными 20.5° и 26.5° . Звезды, попавшие в кольцо, зажатое между указанными кругами, могут выполнять указанную роль. Для определения количества лет, через которые южный полюс мира (P_S) подойдет к соответствующей звезде на минимальное расстояние, можно воспользоваться следующей методикой. Прикладываем транспортир основанием к прямой, соединяющей южный полюс мира (P_S) и южный полюс эклиптики (Π_S). От текущего положения южного полюса мира откладываем угол β_* до направления на соответствующую звезду по часовой стрелке. Полученный угол необходимо разделить на угловую скорость прецессионного движения южного полюса мира (или годового движения точки весны, см. выражение (9)). В итоге получаем искомое количество лет:

$$\tau_* = \frac{\beta_*}{\mu_{\gamma}}. \quad (15)$$

Результаты численных расчетов для всех звезд, попавших внутрь указанного кольца, приведены в табл. 1. Здесь отсчет дат идет от начала нашей эры. (5 баллов)

3. Искомый телесный угол можно вычислить как разность телесных углов для конусов с углами раствора $\varepsilon + \Delta$ и $\varepsilon - \Delta$ при их общей оси симметрии в

№	Название	m_* , зв. вел.	α_*	δ_*	β , град	τ_* , лет	Дата, г. н.э.
1	δ^2 Cha	4.45	10^h46^m	$-80^\circ32'$	26	1861	3884
2	β Cha	4.24	12^h18^m	$-79^\circ18'$	26	1861	3884
3	ε Cha	4.88	12^h00^m	$-80^\circ32'$	29	2076	4099
4	γ Cha	4.11	10^h35^m	$-78^\circ36'$	32	2290	4313
5	HIP 50954	3.95	10^h25^m	$-74^\circ09'$	43	3078	5101
6	ω Car	3.29	10^h14^m	$-70^\circ02'$	53	3794	5817
7	ν Car	2.92	9^h47^m	$-65^\circ04'$	67	4796	6819
8	I Car	3.65	09^h46^m	$-62^\circ37'$	73	5225	7248
9	i Car	3.95	09^h12^m	$-62^\circ25'$	80	5726	7749
10	ι Car	2.21	09^h17^m	$-59^\circ17'$	84	6012	8035
11	c Car	3.80	08^h55^m	$-60^\circ43'$	86	6156	8179
12	a Car	3.40	09^h12^m	$-59^\circ04'$	87	6227	8250
13	g Car	4.30	09^h17^m	$-57^\circ38'$	87	6227	8250
14	δ Vel	1.93	08^h45^m	$-54^\circ43'$	99	7086	9109
15	o Vel	3.60	08^h41^m	$-53^\circ00'$	104	7444	9467
16	V Pup	4.45	07^h59^m	$-49^\circ18'$	119	8518	10541
17	γ Vel	1.75	08^h10^m	$-47^\circ24'$	120	8589	10612
18	P Pup	4.05	07^h50^m	$-46^\circ26'$	128	9162	11185
19	σ Pup	3.25	07^h30^m	$-43^\circ21'$	141	10092	12115
20	L^2 Pup	4.40	07^h14^m	$-44^\circ41'$	147	10522	12545
21	v Pup	3.15	06^h38^m	$-43^\circ13'$	164	21187	23210
22	η Col	3.95	06^h00^m	$-42^\circ49'$	183	13099	15122
23	δ Sae	5.05	4^h32^m	$-44^\circ34'$	224	16033	18056
24	α Hvi	2.85	2^h00^m	$-61^\circ28'$	291	20829	22852
25	η^2 Hvi	4.65	1^h56^m	$-67^\circ32'$	304	21760	23783
26	β Hvi	2.80	0^h27^m	$-77^\circ08'$	331	23692	25715
27	β Oct	4.10	22^h48^m	$-81^\circ16'$	344	24623	26646

Таблица 1. Основные свойства «полярных» звезд и даты их наибольшего сближения с южным полюсом мира.

здесь η , λ_S – уравнение времени и долгота г. Самары соответственно. Истинное солнечное время можно определить через часовой угол (t_\odot) истинного солнца:

$$T_\odot = t_\odot + 12^h. \quad (18)$$

Из (17)-(18) следует явное выражение для самарского времени (1 балл):

$$T_S = t_\odot + \eta + 16^h - \lambda. \quad (19)$$

Для определения моментов времени восхода и захода Солнца, необходимо определить значения часового угла истинного Солнца в указанные моменты. Для этого рассмотрим параллактический треугольник $\Delta_S P_N Z C$ (см. рис. 8.а), в вершинах которого находится северный полюс мира (P_N), зенит места наблюдения (Z) и светило (C). Запишем для него формулу косинусов:

$$\cos z_\odot = \sin \delta_\odot \sin \varphi_S + \cos \delta_\odot \cos \varphi_S \cos t_\odot, \Rightarrow \cos t_\odot = \frac{(\cos z_\odot - \sin \delta_\odot \sin \varphi_S)}{\cos \delta_\odot \cos \varphi_S},$$

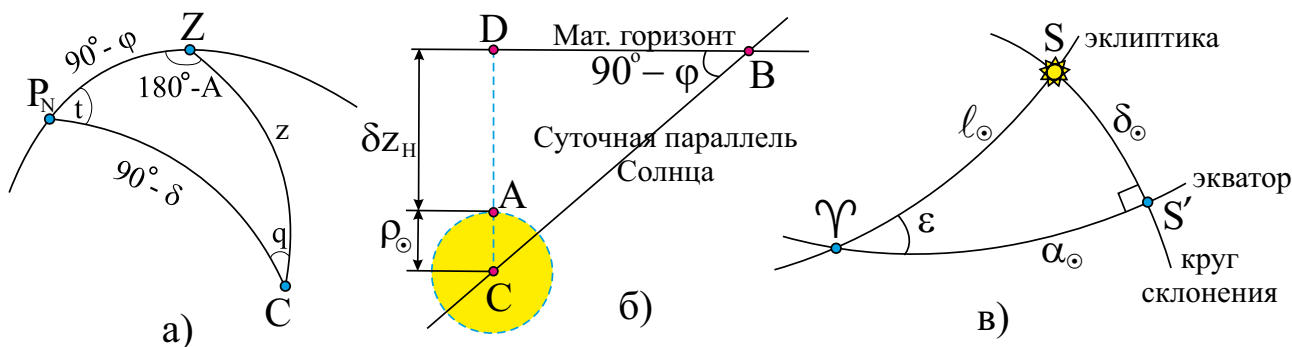


Рис. 8. К определению а) параллактического треугольника, б) высоты истинного солнца в момент начала восхода Солнца, в) сферического треугольника $\Delta_S \Upsilon S'$.

здесь $z_\odot, \delta_\odot, t_\odot$ – зенитное расстояние, склонение и часовой угол истинного солнца (центра видимого диска Солнца) соответственно; φ_S – широта г. Самары.

Продолжительность дня определяется как интервал времени между моментами начала восхода Солнца и моментом окончания его захода за горизонт. *Момент начала восхода Солнца* отождествляется с моментом, когда верхняя точка видимого диска Солнца появляется на горизонте. *Момент окончания его захода* за горизонт отождествляется с моментом, когда та же точка вновь оказывается на горизонте и в следующий миг исчезает за ним. Если полагать, что $\rho''_\odot = 16'$ – средний угловой радиус Солнца, а $\delta z_H = 35'$ – атмосферная рефракция света у горизонта, то верхняя точка видимого диска Солнца окажется на горизонте, если высота истинного солнца окажется равной (см. рис. 8.б) (1 балл):

$$h_0 = -(\rho''_\odot + \delta z_H) = -51', \Rightarrow z_\odot = 90^\circ - h_0 = 90^\circ + |h_0|. \quad (20)$$

С использованием формулы для часового угла, определим его значения в моменты восхода (t_v) и захода (t_z) (2 балла):

$$t_z = \frac{24^h}{2\pi} \arccos \left[-\frac{(\sin |h_0| + \sin \delta_\odot \sin \varphi_S)}{\cos \delta_\odot \cos \varphi_S} \right], \quad t_v = 24^h - t_z. \quad (21)$$

На 22 декабря 2022 года склонение Солнца составляет $\delta_\odot = -23^\circ 26'$, уравнение времени – $\eta = -1^m$ (согласно рис. А.2, приложения А.9). Географические координаты Самары можно достать из карты, представленной на рис. 1. С использованием сторонних источников информации определим их следующими значениями: $\varphi_S = 53^\circ 12'$, $\lambda_S = 3^h 20.4^m$. В итоге получаем следующие моменты времени восхода, захода и продолжительности дня (1 балл):

$$T_S^{(v)} = 8^h 52.7^m, \quad T_S^{(z)} = 16^h 24.5^m, \quad T_d^{(1)} = T_S^{(z)} - T_S^{(v)} = 7^h 31.8^m. \quad (22)$$

2. Для определения тех же величин на 28 января определим склонение Солнца как функцию времени относительно дня весеннего равноденствия. Далее рассмотрим сферический треугольник образованный небесным экватором, эклиптикой и кругом склонения светила (см. рис. 8.в). Воспользуемся

теоремой синусов для треугольника (2 балла):

$$\sin \varepsilon \cdot \sin \ell_{\odot} = \sin 90^{\circ} \cdot \sin \delta_{\odot}, \Rightarrow \sin \delta_{\odot} = \sin \ell_{\odot} \sin \varepsilon, \quad (23)$$

здесь δ_{\odot} – склонение Солнца, $\varepsilon = 23^{\circ}26'$ – угол между экватором и эклиптикой; ℓ_{\odot} – эклиптическая долгота Солнца, отсчитываемая от точки равноденствия. Можно полагать, что сама долгота изменяется равномерно, следовательно,

$$\ell_{\odot} = \omega_{\odot} t, \text{ где } \omega_{\odot} = \frac{2\pi}{T_{\odot}}, \quad (24)$$

T_{\odot} – тропический год. Из (23) и (24) следует, что (1 балл)

$$\delta_{\odot} = \arcsin \left[\sin \varepsilon \sin \frac{2\pi t}{T_{\odot}} \right]. \quad (25)$$

Поскольку 28 января отстоит от 21 марта (дня весеннего равноденствия 2023 года) на 52 суток, то $t = T_{\odot} - 52 = 313.24$ суток. В итоге склонение Солнца в указанную дату есть $\delta_{\odot} = -18^{\circ}4'$. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем следующие моменты времени восхода, захода и продолжительности дня на 28 января (2 балла):

$$T_S^{(в)} = 8^h 28.9^m, \quad T_S^{(з)} = 17^h 15.3^m, \quad T_d^{(2)} = T_S^{(з)} - T_S^{(в)} = 8^h 46.3^m. \quad (26)$$

3. Продолжительность дня 28 января больше продолжительности дня зимнего солнцестояния в г. Самаре на величину (2 балла):

$$T_d^{(2)} - T_d^{(1)} = 1^h 14.5^m. \quad (27)$$

№ 7. «Взрыв сверхновой, породившей Солнечную систему»

Решение. 1. Поскольку изотопы урана ^{238}U , ^{235}U и торий ^{232}Th являются радиоактивными, то количество нераспавшихся ядер i -го изотопа к моменту времени t , определяется законом радиоактивного распада (3 балла):

$$N_i = N_{0i} 2^{-t/T_i}, \quad (28)$$

N_{0i} – число ядер i -го изотопа в момент времени $t = 0$ (последний момент следует отождествить с моментом взрыва сверхновой). Объемные доли η_i можно определить выражениями (3 балла):

$$\eta_i = \frac{N_i}{\sum_{i=1}^3 N_i}, \quad (29)$$

здесь суммирование проводится по всем изотопам природного урана, включая ^{234}U . В момент взрыва, согласно условию задачи, количество ядер рассматриваемых изотопов было одинаково, следовательно, $N_{01} = N_{02} = N_{03} = N_0$.

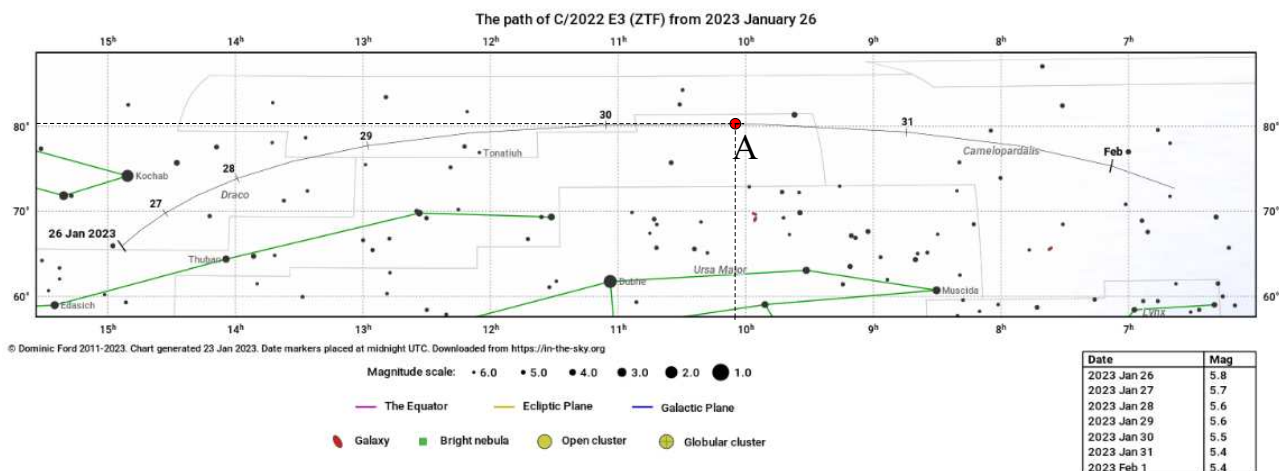


Рис. 9. К определению точки, даты и времени наибольшего сближения кометы C/2022 E3 (ZTF) с северным полюсом мира.

Далее найдем отношение объемных долей изотопов урана (3 балла)

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = 2^{t_{\text{expl}}(1/T_1 - 1/T_2)}, \Rightarrow \ln\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) = t_{\text{expl}}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \ln 2, \Rightarrow$$

$$t_{\text{expl}}^{(1)} = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) / \ln 2 = 6.049 \cdot 10^9 \text{ лет.}$$

Вычислим отношение количества ядер тория ^{232}Th к числу ядер урана ^{238}U (3 балла):

$$\frac{N_3}{N_1} = 2^{t_{\text{expl}}(1/T_1 - 1/T_3)}, \Rightarrow t_{\text{expl}}^{(2)} = \frac{T_1 T_3}{T_3 - T_1} \ln\left(\frac{N_3}{N_1}\right) / \ln 2 = 5.998 \cdot 10^9 \text{ лет.}$$

Искомое время t_{expl} можно определить как среднее значение полученных результатов (2 балла):

$$t_{\text{expl}} = \frac{1}{2} (t_{\text{expl}}^{(1)} + t_{\text{expl}}^{(2)}) = 6.024 \cdot 10^9 \text{ лет} \approx 6.0 \text{ млрд лет.}$$

№ 8. «Комета в окрестности полюса мира»

Решение. 1. Отметим на карте положение наиболее близкой точки (точка А, см. рис. 9) траектории видимого движения кометы к северному полюсу мира. Очевидно, это сближение состоялось 30 января 2023 года. Определим расстояние от точки начала даты 30 января до точки А – 76.5 мм, и от точки А до точки начала даты 31 января – 101 мм (здесь и далее Ваши значения измеренных по рисунку расстояний могут отличаться от указанных авторских значений, в результате использования рисунка с иными линейными размерами). Полагая, что видимое движение кометы между точками начала дат было равномерным, определим искомый момент времени:

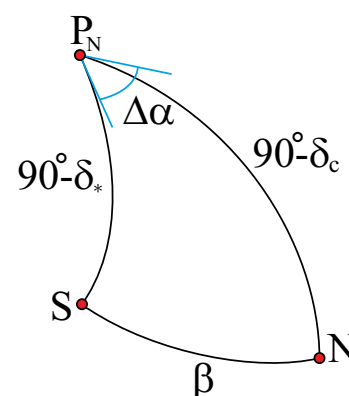


Рис. 10. К определению сферического треугольника $\Delta_{SP_N SZ}$.

$t = 76.5 / (76.5 + 101) \times 24$ часа = 10 часов 20 минут. Т.о., комета испытала наибольшее сближение с северным полюсом мира 30 января 2023 года, в 10 часов 20 минут по шкале Всемирного времени. (2 балла)

2. С использованием карты (см. рис. 9), определим экваториальные координаты кометы в точке А (2 балла):

$$\alpha_c = 9^{\text{h}}55^{\text{m}}, \quad \delta_c = 80^{\circ}2'. \quad (30)$$

3. Для определения углового расстояния между Полярной звездой и кометой в момент ее наибольшего сближения с северным полюсом мира рассмотрим сферический треугольник $\triangle_S P_N S Z$ на небесной сфере (см. рис. 10), образованный дугами кругов склонений этой звезды (S), ядра кометы (N) и дугой большого круга, соединяющей данные тела. Воспользуемся формулой косинусов для определения угла β (2 балла):

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \cos(90^{\circ} - \delta_*) \cos(90^{\circ} - \delta_c) + \sin(90^{\circ} - \delta_*) \sin(90^{\circ} - \delta_c) \cos(\alpha_* - \alpha_c), \Rightarrow \\ \beta &= \arccos [\sin \delta_* \sin \delta_c + \cos \delta_* \cos \delta_c \cos(\alpha_* - \alpha_c)] = 10.26^{\circ}. \end{aligned} \quad (31)$$

4. Для расчета собственного движения μ_c кометы в момент наибольшего сближения с P_N , определим экваториальные координаты точек ее траектории на начала 30 и 31 января:

$$\alpha_{30} = 11^{\text{h}}06^{\text{m}}, \quad \delta_{30} = 80^{\circ}01', \quad \alpha_{31} = 8^{\text{h}}45^{\text{m}}, \quad \delta_{31} = 79^{\circ}13'.$$

В силу относительной малости дуги, заключенной между указанными точками, последнюю можно рассматривать как дугу большого круга, соединяющую данные точки. С использованием формулы, аналогичной (31), определим угол между указанными точками:

$$\gamma = \arccos [\sin \delta_{30} \sin \delta_{31} + \cos \delta_{30} \cos \delta_{31} \cos(\alpha_{31} - \alpha_{30})] = 6.30^{\circ}.$$

Тогда собственное движение кометы в указанные сутки будет (2 балла)

$$\mu_c = \frac{\gamma}{\tau_0} = 6.30^{\circ} / \text{сут} = 0.2625^{\circ} / \text{час} = 0.2625' / \text{мин} = 0.2625'' / \text{с}. \quad (32)$$

5. Максимальное время выдержки при получении одиночного кадра, которое может выставить начинающий астроном-любитель на цифровой камере при съемке с неподвижного штатива определяется отсутствием смаза образа звезды (в нашем случае – кометы), когда последняя, в силу суточного движения небесной сферы, из кружка превращается в светящийся трек (на сленге астрономов-любителей – "в сосиску"). Согласно теореме Котельникова, для формирования элементарного цифрового изображения звезды необходимо использование не менее двух пикселей матрицы. Следовательно пока световой луч, пришедший от звезды проходит эти два пикселя, формируется

образ звезды на матрице в виде кружка, и он не превратится в вытянутый эллипс вплоть до прохождения им трех пикселей. Пусть размер одного пикселя $a_0 = 4.3 \cdot 10^{-3}$ мм. Тогда максимальный угол, на который может сместиться звезда по небосводу (когда ее образ перемещается по диагонали этих трех пикселей), в результате суточного вращения небесной сферы (2 балла):

$$\psi_{\max} = \frac{a_0 \sqrt{3^2 + 1}}{f} = 3.16 \frac{a_0}{f} \times 206265'' = 20.8''.$$

Учитывая, что угловая скорость видимого движения звезды по небосводу в результате суточного движения определяется выражением:

$$\omega_{\text{vis}} = \omega_{\oplus} \cos \delta_*,$$

здесь $\omega_{\oplus} = 15''/\text{с}$ – угловая скорость суточного вращения Земли, δ_* – склонение звезды. Из последнего выражения следует, что чем больше склонение звезды δ_* , тем меньше ее угловая скорость видимого движения. Очевидно, минимум последней величины достигается в точке А. В итоге искомое максимальное время выдержки для кометы есть (1 балл)

$$\tau_{\max} = \frac{\psi_{\max}}{\omega_{\text{vis}}} = \frac{3.16 a_0 \times 206265''}{f \omega_{\oplus} \cos \delta_c} = 8.0 \text{ с.} \quad (33)$$

6. Максимальная продолжительность одного сеанса съемки кометы одиночными кадрами с тем же оборудованием, в пределах которого комета на кадрах будет оставаться неподвижной относительно ближайших звезд, определяется промежутком времени, в течение которого комета смещается на угол ψ_{\max} относительно ближайших звезд (2 балла):

$$\tau_s = \frac{\psi_{\max}}{\mu_c} = 79 \text{ с.} \quad (34)$$

Максимальное количество кадров с выдержкой τ_{\max} , которое можно было сделать в рамках одного такого сеанса есть (1 балл)

$$N_{\max} = \left[\frac{\tau_s}{\tau_{\max}} \right] = 9 \text{ кадров.} \quad (35)$$

№ 9. «Звезды в полуденном небосводе Самарской области»

Решение. 1. Как известно, в идеальных условиях наблюдений образ звезды, наблюдаемой в телескоп, принимает "дифракционный" вид: центральный диск Эйри окружен системой дифракционных колец (см. рис. 11.а). Из курса волновой оптики¹ известно, что распределение поверхностной яркости

¹См., например, Калитеевский Н.И. Волновая оптика. – Москва: Лань, 2008. – 480 с.

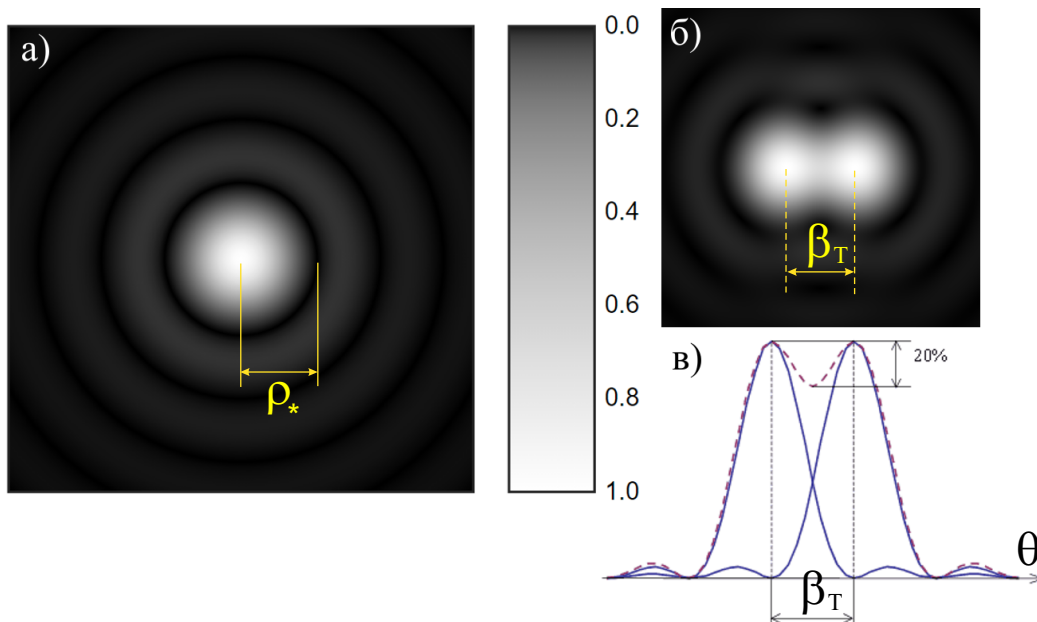


Рис. 11. К определению а) дифракционного образа одиночной звезды, б) дифракционного образа двойной звезды, в) критерия Релея и разрешающей способности телескопа.

\mathcal{I} по дифракционной картине образа звезды описывается функцией Бесселя $J_1(x)$ первого рода:

$$\mathcal{I} = a \left(2 \frac{J_1(x)}{x} \right)^2, \quad \text{где } x = \frac{\pi D_T \theta}{\lambda},$$

здесь a – коэффициент пропорциональности, D_T – диаметр объектива телескопа, θ – угол дифракции света, λ – длина волны, на которой ведется наблюдение звезды.

Под **угловым радиусом звезды** (ρ_*) традиционно понимается значение углового радиуса диска Эйри, который соответствует первому нулю функции Бесселя – $x_0 = 3.83171$ (см. рис. 12.а), что соответствует середине первого (от центра картины) темного кольца на рис. 11.а). Тогда

$$x_0 = \frac{\pi D_T \theta_0}{\lambda}, \quad \Rightarrow \quad \rho_* = \theta_0 = \frac{x_0}{\pi} \frac{\lambda}{D_T}, \quad \Rightarrow \quad \rho_* = 1.22 \frac{\lambda}{D_T}.$$

Разрешающая способность телескопа ($\beta_T^{(d)}$), обусловленная явлением дифракции, традиционно в оптике определяется **критерием Релея**. Сформулируем его на примере двойной звезды, компоненты которой имеют одинаковые цвет и яркость (см. рис. 11.б): если центральное световое пятно (диск Эйри) дифракционной картины одной звезды удалено от центрального светового пятна другой звезды на расстояние не менее радиуса первой темной дифракционной полосы (углового радиуса диска Эйри), то мы воспринимаем эти звезды как два отдельных источника света. При этом между центрами дисков достигается максимальное падение интенсивности света, равное 20%

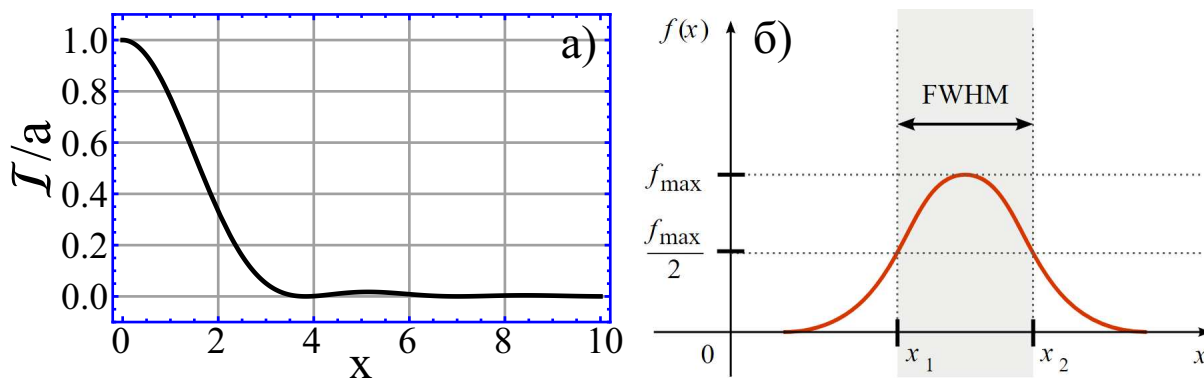


Рис. 12. К определению а) зависимости \mathcal{I}/a от x , б) к определению диаметра кружка атмосферного дрожания светового луча (в роли функции full width at half maximum или FWHM выступает поверхностная яркость кружка).

(см. рис. 11.в). Т.о., окончательно имеем

$$\beta_T^{(d)} = 1.22 \left(\frac{\lambda}{D_T} \right) \times 206265''.$$

На длине волны $\lambda = 555$ нм (соответствует максимуму чувствительности (функции видности) человеческого глаза):

$$\beta_T^{(d)} = 1.22 \left(\frac{\lambda}{D_T} \right) \times 206265'' = 0.93''. \quad (36)$$

В астрономии под **сиингом** понимается величина углового диаметра θ_s видимого светового диска (кружка атмосферного дрожания) для точечной звезды, образующегося в результате многократных малых флуктуаций хода светового луча (в результате случайных изменений показателя преломления воздуха), распространяющегося в атмосфере Земли. Граница этого диска определяется (как правило) в точках, где поверхностная яркость в два раза меньше, нежели яркость его центра (см. рис. 12.б). Как правило, поверхностная яркость кружка атмосферного дрожания описывается функцией Гаусса, которая к нулю подходит асимптотически. Тем не менее в астрономической литературе, при определении разрешающей способности телескопа часто сравнивают дифракционную разрешающую способность $\beta_T^{(d)}$ с сиингом, что не совсем корректно, поскольку $\beta_T^{(d)}$ есть радиус диска Эйри, определенный на первом нуле поверхностной яркости, а сиинг – это диаметр кружка, где поверхностная яркость равна 1/2 от ее максимального значения. Для корректного сопоставления этих двух факторов следует определить корень уравнения $\mathcal{I}(x)/a = 0.5$. Точный численный расчет дает его корень $x_{1/2} = 1.61634$ (приблизительно его можно оценить и по графику рис. 12.а). Найдем соответствующий угол дифракции:

$$\theta_{1/2} = \frac{x_{1/2}}{\pi} \frac{\lambda}{D_T} = 0.514 \frac{\lambda}{D_T}.$$

Тогда диаметр части диска Эйри, где поверхностная яркость не меньше 0.5 от максимальной будет

$$\Theta_{\text{dif}} = 2\theta_{1/2} = 1.029 \left(\frac{\lambda}{D_T} \right) \times 206265'' \quad (37)$$

Для данного телескопа получаем $\Theta_{\text{dif}} = 0.79''$. Причем внутри данной части диска Эйри высвечивается доля $\gamma = 0.775$ от полной освещенности звезды.

Если $\Theta_{\text{dif}} \geq \theta_s$, то фактическое разрешение оптического тракта телескопа определяется именно дифракцией света, а не синнгом, что в нашем случае как раз имеет место, т.е.

$$\Theta_T = \max \{ \Theta_{\text{dif}}, \theta_s \} = \Theta_{\text{dif}} = 0.79'' \quad (38)$$

Поскольку в наличии имеется большой спектр окуляров с разными фокусными расстояниями, то можно всегда подобрать такое увеличение телескопа, при котором в визуальных наблюдениях все звезды в телескоп будут видны как светящиеся диски, угловой диаметр которых будет Θ_T . (1 балл)

Разрешающая способность человеческого глаза (β_y) определяется как минимальный угол между двумя точками изображения предмета, которые воспринимаются как отдельные точки предмета, разделенные промежутком, яркость которого отличается от яркости данных точек. Она зависит от многих факторов: от размеров колбочек, находящихся в области желтого пятна, сетчатки, рефракции глаза, ширины зрачка, прозрачности роговицы, хрусталика (и его эластичности), стекловидного тела (они составляют светопреломляющий аппарат), состояния сетчатой оболочки и зрительного нерва, возраста. Значит β_y можно определить как *минимальный угловой диаметр светового кружка*, который может рассматриваться уже как неточечный объект. (1 балл)

Поверхностная яркость B части диска звезды с угловым диаметром Θ_{dif} определяется выражением:

$$B_* = \frac{\gamma E_*}{\Omega} = \frac{\gamma E_*}{\pi \Theta_{\text{dif}}^2/4}, \Rightarrow \frac{E_*}{B_* \Omega_0} = \frac{\Omega}{\gamma \Omega_0}, \text{ где } \Omega = \pi \Theta_{\text{dif}}^2/4. \quad (39)$$

Здесь E_* – освещенность, создаваемая звездой у поверхности Земли в видимом диапазоне; Ω – телесный угол, под которым видна наблюдателю часть диска звезды с угловым диаметром Θ_{dif} в используемый оптический инструмент, Ω_0 – единичный телесный угол в соответствующей размерности, удобной для вычислений в данных условиях.

Рассматриваемый объект можно увидеть на дневном небосводе, если его поверхностная яркость не меньше поверхностной яркости земного небосвода (1 балл):

$$B_* \geq B_{\text{sky}}. \quad (40)$$

С использованием формулы Погсона определим звездную величину, соответствующую поверхностной яркости B рассматриваемого объекта (1 балл):

$$m_* - m_B = -2.5 \lg \left(\frac{E_*}{B \Omega_0} \right), \Rightarrow m_B = m_* + 2.5 \lg \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} \right). \quad (41)$$

Таким образом, имеем следующие значения звездной величины m_B для человеческого глаза и телескопа (2 балла):

$$m_B^{(y)} = m_* + 2.5 \lg \left(\frac{\pi \beta_y^2}{4 \Omega_0^{(y)}} \right) = m_* - 0.26^m, \quad \text{где } \Omega_0^{(y)} = (1')^2, \quad (42)$$

$$m_B^{(T)} = m_* + 2.5 \lg \left(\frac{\pi \Theta_T^2}{4 \gamma \Omega_0^{(T)}} \right) = m_* - 0.50^m, \quad \text{где } \Omega_0^{(T)} = (1'')^2, \quad (43)$$

здесь размерности искомых величин: $[m_B^{(y)}] = \text{зв. вел./кв. угл. мин.}$, $[m_B^{(T)}] = \text{зв. вел./кв. угл. сек.}$

2. Пусть $f_{\odot}^{(v)}$ – интенсивность солнечного излучения в видимом диапазоне, определенная на верхней границе земной атмосферы (солнечная постоянная в видимом диапазоне). Тогда энергетический поток электромагнитного излучения в видимом диапазоне, падающего на площадку S_0 верхней границы земной атмосферы, можно записать так

$$\Phi_{\text{fall}} = f_{\odot}^{(v)} S_0 \cos z_{\odot},$$

здесь учтено, что угол падения световых лучей на границу земной атмосферы равен зенитному расстоянию z_{\odot} Солнца. Поток электромагнитного излучения в видимом диапазоне, прошедшего границу «вакуум-атмосфера», можно записать так

$$\Phi_{\text{tr}}^{(1)} = (1 - A_a) \Phi_{\text{fall}}.$$

Поток электромагнитного излучения в видимом диапазоне, прошедшего атмосферу Земли и достигшего ее поверхности, определяется законом Бугера-Ламберта:

$$\Phi_{\text{tr}}^{(2)} = e^{-\tau} \Phi_{\text{tr}}^{(1)}.$$

Поток электромагнитного излучения в видимом диапазоне, поглощенного и рассеянного земной атмосферой, представляется выражением:

$$\Phi_{\text{sca}} = \Phi_{\text{tr}}^{(1)} - \Phi_{\text{tr}}^{(2)} = (1 - A_a)(1 - e^{-\tau}) f_{\odot}^{(v)} S_0 \cos z_{\odot}.$$

Поскольку наблюдения проводились после проливного дождя, то количество пылевых частиц в атмосфере, на которых и происходит, главным образом, поглощение видимого света пренебрежимо мало. Значит все излучение будет лишь рассеиваться атмосферой. Согласно условию задачи, рассеяние света

атмосферой Земли является изотропным. Следовательно, можно полагать, что половина от потока Φ_{sca} отбрасывается атмосферой в космос, а вторая половина направлена к Земле и создает поверхностное свечение всего небосвода (2 балла):

$$\mathcal{I}_{\text{sca}} = \frac{1}{2} \frac{\Phi_{\text{sca}}}{S_0} = \frac{1}{2} (1 - A_a) (1 - e^{-\tau}) f_{\odot}^{(v)} \cos z_{\odot}. \quad (44)$$

3. Для определения величины \mathcal{I}_{sca} , необходимо корректно определить оптическую толщину для солнечного света, распространяющегося в атмосфере Земли. Заметим, что наблюдения проводились в полдень 21 июня – день летнего солнцестояния, в которой зенитное расстояние Солнца в полдень составляет

$$z_{\odot}^{(s)} = \varphi - \delta_{\odot} = \varphi - \varepsilon = 28^{\circ}37',$$

здесь δ_{\odot} – склонение Солнца в момент наблюдений, ε – угол между экватором и эклиптической.

С использованием модели плоской атмосферы Земли, можно легко доказать, что оптический путь светового луча, прошедшего атмосферу Земли в полдень и упавшего на ее поверхность, связан с оптическим путем τ_0 для Солнца, находящегося в зените, соотношением вида:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\cos z_{\odot}^{(s)}} = 0.1121.$$

Тогда интегральная звездная величина всего земного небосвода в видимом диапазоне может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} m_a - m_{\odot}^{(v)} &= -2.5 \lg \left(\frac{\mathcal{I}_{\text{sca}}}{f_{\odot}^{(v)}} \right), \Rightarrow \\ m_a &= m_{\odot}^{(v)} - 2.5 \lg \left(\frac{1}{2} (1 - A_a) (1 - e^{-\tau}) \cos z_{\odot} \right) = -23.33^{\text{m}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Вычислим звездную величину, соответствующую поверхностной яркости дневного небосвода в расчете на одну угловую минуту и секунду:

$$\begin{aligned} m_B^{(a,y)} &= m_a + 2.5 \lg \left(\frac{\Omega_{\text{sky}}}{\Omega_0^{(y)}} \right) = m_a + 2.5 \lg (2\pi \times (3438)^2) = \\ &= -3.65^{\text{m}} / \text{кв. угл. мин.}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} m_B^{(a,T)} &= m_a + 2.5 \lg \left(\frac{\Omega_{\text{sky}}}{\Omega_0^{(T)}} \right) = m_a + 2.5 \lg (2\pi \times (206265)^2) = \\ &= 5.24^{\text{m}} / \text{кв. угл. сек.} \end{aligned} \quad (47)$$

Из выражений (42)-(43) и (46)-(47) следует, что звездная величина звездоподобного объекта в случае невооруженного глаза должна быть $m_*^{(y)} \leq -3.39^m$, в случае телескопа – $m_*^{(T)} \leq 5.74^m$. Очевидно, что невооруженным глазом на дневном небосводе Земли невозможно увидеть звезды (поскольку на нем нет звезд с указанной звездной величиной). (2 балла)

Для оценки количества звезд, которые можно обзирать в телескоп в полдень, заметим, что количество звезд с увеличением звездной величины, согласно таблице приложения А.12, растет нелинейным образом. Пусть N_{m_1} – количество звезд, звездные величины которых не больше $m_1 = 5^m$, а N_{m_2} – количество звезд, звездные величины которых не больше $m_2 = 6^m$. Нетрудно обнаружить, что $(N_{m_2} - N_{m_1})/N_{m_1} \approx 2.0$, при $\Delta m = 1^m$. Предположим, что $dN_m/N_m \sim dm$, тогда

$$\frac{dN_m}{N_m} = k dm, \Rightarrow \int_{N_{m_1}}^{N_m} \frac{dN_m}{N_m} = \int_{m_1}^m k dm, \Rightarrow \ln \left(\frac{N_m}{N_{m_1}} \right) = k(m - m_1), \Rightarrow$$

$$\frac{N_m}{N_{m_1}} = e^{k(m-m_1)}, \Rightarrow N_m = N_{m_1} 10^{a(m-m_1)}.$$

Поскольку при $m = m_2$, $N_{m_2} = 3N_{m_1}$, то $a = 0.477$. В итоге получаем $N_m = N_{m_1} \cdot 10^{0.477\Delta m}$. Значит, количество звезд, звездные величины которых не превосходят значений $5^m + \Delta m$ можно вычислить по формуле:

$$N_{5+\Delta m} = N_5 \cdot 10^{0.477 \cdot 0.74^m}, \Rightarrow N_{5.74} = N_5 \cdot 10^{0.477 \cdot 0.74^m} \approx 3600 \text{ звезд.} \quad (48)$$

Это общее количество звезд на всем небосводе. Следовательно на полусфере в телескоп можно было увидеть 1800 звезд (несколько меньшее значение дает арифметическое усреднение – $\frac{1}{2}(N_5 + N_6)/2 = 1600$). (2 балла)

4. Вычислим поверхностную яркость планеты B_p , расположенной на гелиоцентрическом расстоянии a_p от Солнца, со сферическим альбедо A_p . Пусть E_\odot – освещенность, создаваемая Солнцем у поверхности планеты; последняя представляется в виде:

$$E_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi a_p^2}, \quad (49)$$

здесь L_\odot – светимость Солнца, a_p – гелиоцентрическое расстояние планеты. Поток солнечного излучения, падающего на поверхность планеты:

$$\Phi_{\text{fall}} = E_\odot S,$$

здесь S – площадь поперечного сечения планеты. Поток отраженного излучения поверхностью планеты можно тогда представить так

$$\Phi_{\text{ref}} = A_p \Phi_{\text{fall}}.$$

Планета	a_p , а.е.	Δ_p , а.е.	\mathfrak{R}_p , км	$2 \times \rho_p$, "	m_p , m	$m_B^{(1)}$, m /кв. угл. мин.	$m_B^{(2)}$, m /кв. угл. сек.
Меркурий	0.3871	0.9220	2439.7	7.30	-0.1	-0.36	3.20
Венера	0.7233	0.6905	6051.8	24.17	-4.4	-4.66	1.50
Марс	1.5237	2.5237	3397.2	3.71	1.41	1.15	4.00
Юпитер	5.2028	6.2028	71492	31.78	-1.85	-2.12	5.39
Сатурн	9.5388	10.5388	60268	15.77	0.86	0.59	6.58
Уран	19.1914	20.1914	25559	3.49	5.93	5.66	8.38
Нептун	30.0611	31.0611	24746	2.20	7.94	7.68	9.39

Примечание: здесь a_p – большая полуось орбиты планеты, Δ_p – геоцентрическое расстояние планеты (для нижних планет вычислено для наибольшей элонгации, для верхних планет – в случае соединения с Солнцем), \mathfrak{R}_p – линейный радиус планеты, $2 \times \rho_p$ – угловой диаметр планеты, m_p – видимая звездная величина планеты на данном геоцентрическом расстоянии; $m_B^{(1)}/m_B^{(2)}$ – средняя поверхностная яркость видимого диска планеты в расчете на одну квадратную угловую минуту/одну квадратную угловую секунду.

Таблица 2. К определению поверхностной яркости видимых дисков планет.

Предполагая, что отражение поверхностью планеты является диффузным и отбрасывается преимущественно назад, можно определить освещенность, создаваемую планетой у поверхности Земли:

$$E_p = \frac{\Phi_{\text{ref}}}{2\pi\Delta_p^2} F, \quad (50)$$

здесь Δ_p – геоцентрическое расстояние планеты; F – ее фаза. Согласно определению величины B имеем

$$B_p = \frac{E_p}{\Omega_p} = \frac{A_p L_{\odot} S F}{8\pi^2 a_p^2 \Delta_p^2} : \frac{S}{\Delta_p^2} = \frac{A_p L_{\odot} F}{8\pi^2 a_p^2} = \frac{A_p f_{\odot}^{(v)} F}{2\pi} \left(\frac{a_{\oplus}}{a_p} \right)^2. \quad (51)$$

Важно заметить, что поверхностная яркость планеты явно не зависит от ее геоцентрического расстояния и определяется лишь сферическим альбедо ее поверхности, фазой и ее гелиоцентрическим расстоянием.

Вычислим звездную m_B , определяемую формулой (41), для всех классических планет в двух единицах измерения (см. табл. 2) Из таблицы видно, что на дневном небосводе можно увидеть в телескоп, в идеальных условиях Меркурий, Венеру и Марс. Невооруженным глазом можно увидеть лишь Венеру! Следует отметить, что на больших угловых расстояниях от Солнца, где поверхностная яркость дневного небосвода существенно меньше среднего значения можно попытаться наблюдать еще и Юпитер (в том числе и невооруженным глазом). (2 балла)

Т.о., невооруженным глазом можно увидеть только Венеру (звезды не видны); в телескоп можно увидеть около 1800 звезд, а также Меркурий, Венеру и Марс.

№ 10. «Массовые потери кометы C/2022 E3 (ZTF)»

Решение. 1. Определим угловой масштаб фотографии на рис. 3. Для этого, при помощи линейки, измерим длину эталонного отрезка: $\ell_0 = 190$ мм (здесь и далее линейные размеры объектов, определенные непосредственно по фотографии, могут отличаться от указанных при использовании фотографии с иными линейными размерами). Тогда угловой масштаб есть

$$\mu_a = \frac{10^\circ}{190 \text{ мм}} = 3.16' / \text{мм}.$$

Определим с помощью линейки длины участков хвоста кометы: ABCDE – $\ell_1 = 186.5$ мм, EF – $\ell_2 = 21.5$ мм, FG – $\ell_3 = 62$ мм. Учтем, что участок EF есть участок разрыва хвоста, который не дает вклада в его полный угловой размер. Следовательно полная линейная длина хвоста по рисунку составляет

$$\ell_{\text{tail}} = \ell_1 + \ell_3 = 248.5 \text{ мм}.$$

Тогда соответствующий угловой размер хвоста кометы составляет (1 балл)

$$\Psi_{\text{tail}} = \mu_a \cdot \ell_{\text{tail}} = 13.09^\circ. \quad (52)$$

2. Согласно определению, **фазовым углом** небесного несамосветящегося тела называется угол между направлением на источник излучения (в нашем случае, Солнце) и на приемник излучения (в нашем случае, Земля), с позиции данного небесного тела. Рассмотрим далее треугольник $\triangle SZN$ (см. рис. 13.а), здесь в вершине S расположено Солнце, в вершине Z – Земля, в вершине N – ядро кометы. Определим угол β в данном треугольнике. Для этого рассмотрим сферический треугольник $\triangle_S P_N SZ$ на небесной сфере (см. рис. 13.б), образованный дугами кругов склонений Солнца, ядра кометы и дугой большого круга, соединяющей данные тела. Воспользуемся формулой косинусов для определения угла β :

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \cos(90^\circ - \delta_\odot) \cos(90^\circ - \delta_c) + \sin(90^\circ - \delta_\odot) \sin(90^\circ - \delta_c) \cos(\alpha_\odot - \alpha_c), \Rightarrow \\ \beta &= \arccos [\sin \delta_\odot \sin \delta_c + \cos \delta_\odot \cos \delta_c \cos(\alpha_\odot - \alpha_c)] = 91.32^\circ. \end{aligned} \quad (53)$$

С использованием теоремы синусов для плоского треугольника $\triangle SZN$ определим угол γ :

$$\frac{\sin \gamma}{\Delta_c} = \frac{\sin \beta}{r_c}, \quad \gamma = \arcsin \left[\frac{\Delta_c}{r_c} \sin \beta \right] = 27.16^\circ.$$

Учитывая, что сумма углов в плоском треугольнике равна 180° , в результате получаем значение фазового угла кометы (2 балла):

$$\varphi = 180^\circ - \gamma - \beta = 61.52^\circ. \quad (54)$$

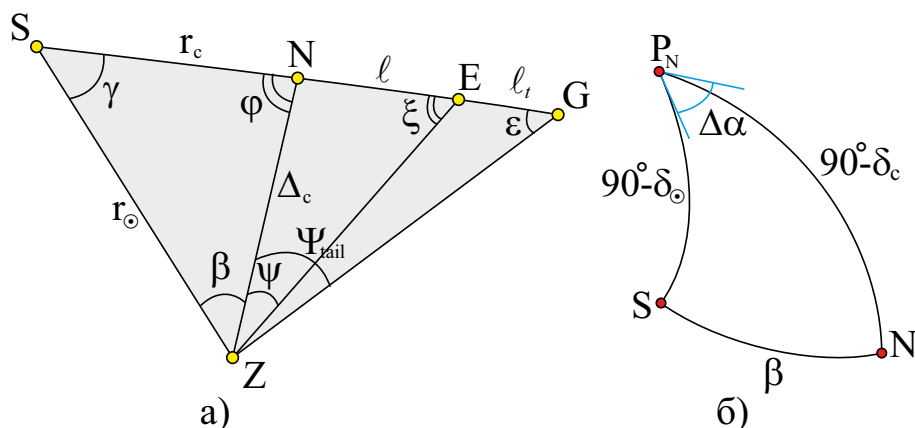


Рис. 13. К определению а) длины хвоста кометы; б) углового расстояния между Солнцем и ядром кометы.

3. Рассмотрим плоский треугольник $\triangle ZNG$ (см. рис. 13.а), где вершина G совпадает с видимым концом хвоста кометы (точка G на рис. 3). Здесь учтено, что ионный или газовый хвост кометы направлен строго от Солнца. Очевидно, что угол $\varepsilon = 180^\circ - \Psi_{\text{tail}} - (180^\circ - \varphi) = \varphi - \Psi_{\text{tail}} = 48.43^\circ$. Воспользуемся для треугольника $\triangle ZNG$ теоремой синусов (2 балла):

$$\frac{\sin \Psi_{\text{tail}}}{l_t} = \frac{\sin \varepsilon}{\Delta_c}, \quad l_t = \Delta_c \frac{\sin \Psi_{\text{tail}}}{\sin \varepsilon} = 23.107 \text{ млн км.} \quad (55)$$

4. Определим угловой размер участка хвоста кометы $ABCDE$, образовавшегося после его обрыва: $\psi = \mu_a l_1 = 9.82^\circ$. Из плоского треугольника $\triangle ZNE$ определим угол $\xi = 180^\circ - \psi - (180^\circ - \varphi) = \varphi - \psi = 51.7^\circ$. Воспользуемся для треугольника $\triangle ZNE$ теоремой синусов:

$$\frac{\sin \psi}{l} = \frac{\sin \xi}{\Delta_c}, \quad l = \Delta_c \frac{\sin \psi}{\sin \xi} = 16.600 \text{ млн км.}$$

Очевидно, что данная часть хвоста сформировалась за последние $\tau_0 = 3$ суток до съемки. Поскольку ионный хвост направлен строго от Солнца, а комета незадолго до момента съемки прошла свой перигелий, то гелиоцентрическая скорость V_N последней была перпендикулярна направлению на Солнце, а значит и скорости V_f истечения потоков газа из комы в хвост кометы. Поэтому V_N не давала вклада в значение V_f и последняя обусловлена лишь действием солнечного ветра. Следовательно (3 балла)

$$V_f = \frac{l}{\tau_0} = 64.0 \text{ км/с.} \quad (56)$$

5. Определим поток массы газа, теряемого кометой в результате сублимации ядра. Пусть Φ_{fall} – поток электромагнитного излучения (ЭМИ) Солнца, падающего на ядро кометы:

$$\Phi_{\text{fall}} = f_\odot \left[\frac{a_\oplus}{r_N} \right]^2 \cdot \pi \mathfrak{R}_N^2,$$

здесь \mathfrak{R}_N – радиус ядра кометы; f_\odot – солнечная постоянная, определенная на орбите Земли. Поток ЭМИ Солнца, поглощенного ядром, можно записать в виде: $\Phi_{\text{abs}} = (1 - A_N)\Phi_{\text{fall}}$. Очевидно, часть поглощенной энергии затрачивается на увеличение внутренней энергии ядра, а часть χ_N идет на сублимацию летучего льда, содержащегося в поверхностном слое ядра. Следовательно, энергию ЭМИ Солнца, затрачиваемую на сублимацию космических льдов ядра за время dt , можно записать так

$$dW_{\text{sub}} = \chi_N(1 - A_N)\Phi_{\text{fall}}dt, \Rightarrow dW_{\text{sub}} = \chi_N(1 - A_N)f_\odot \left[\frac{a_\oplus}{r_N} \right]^2 \pi \mathfrak{R}_N^2 dt.$$

С другой стороны, данная энергия может быть представлена в виде:

$$dW_{\text{sub}} = h_w dm_{\text{ice}}.$$

Из двух последних выражений следует явное выражение для потока массы (3 балла):

$$\frac{dm_{\text{ice}}}{dt} = \frac{\chi_N}{h_w}(1 - A_N)f_\odot \left[\frac{a_\oplus}{r_N} \right]^2 \pi \mathfrak{R}_N^2 = 87130 \text{ кг/с.} \quad (57)$$

6. Поскольку солнечный ветер распространяется строго от Солнца, а столкновения частиц солнечного ветра с частицами сублимируемого газа можно рассматривать как неупругие, то направления движения частиц солнечного ветра и частиц газа внутренней комы, вылетающих из нее, можно считать одинаковыми. Значит диаметр внутренней комы можно считать равным диаметру ионного хвоста на относительно небольших расстояниях от ядра кометы (участок АВ). Измеряя диаметр центрального цилиндрического джета хвоста кометы на участке АВ ($d_J = 1$ мм) по фотографии и определяя его угловой размер $D''_J = 3.16'$, с учетом близости участка к ядру, получаем линейный диаметр внутренней комы (1 балл):

$$D_c = \left(\frac{D''_J}{3438'} \right) \Delta_c = 70160 \text{ км.} \quad (58)$$

Учтем далее, что поток массы сублимируемого газа можно представить как

$$\begin{aligned} \frac{dm_{\text{ice}}}{dt} &= m_0 \frac{dN}{dt} = m_0 n \frac{dV}{dt} = \frac{M}{N_A} n \pi \frac{D_c^2}{4} V_f, \Rightarrow \\ n &= \frac{4N_A}{\pi M D_c^2 V_f} \left(\frac{dm_{\text{ice}}}{dt} \right) = 1.18 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-3}, \end{aligned} \quad (59)$$

здесь m_0 , M – масса одной частицы и молярная масса сублимируемого газа соответственно, dN – количество частиц газа, попадающих в джет хвоста из комы за время dt в элементарный объем dV ; n – концентрация газа в джете, N_A – постоянная Авогадро. (1 балл)

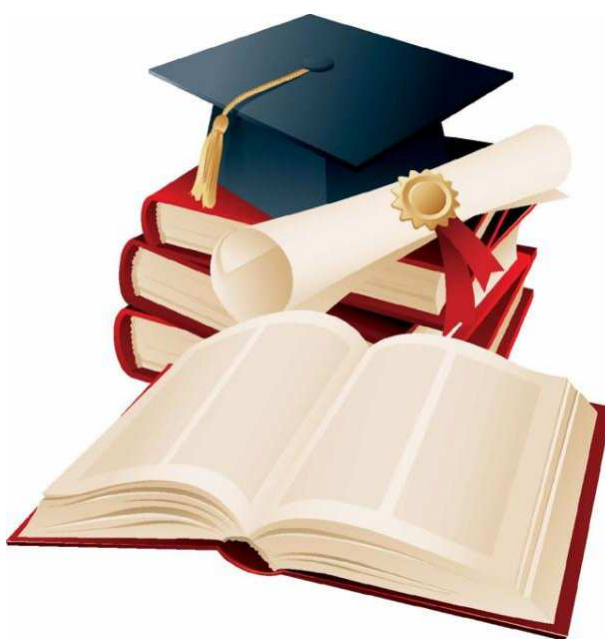
7. Очевидно, что максимальное изменение блеска звезд фона, обусловленное экстинкцией света газовым джетом АВ, будет достигаться для их световых лучей, распространяющихся вдоль диаметра джета АВ. При этом оптическая толщина такого луча составляет

$$\tau = n \cdot D_c \cdot \pi \cdot \frac{d_0^2}{4} = 0.051,$$

здесь $d_0 = 2.8 \cdot 10^{-10}$ м – диаметр молекулы воды. Тогда искомое максимальное изменение блеска звезд фона можно определить по формуле Погсона с использованием закона Бугера-Ламберта (2 балла):

$$\Delta m_* = -2.5 \lg \left(\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}_0} \right) = -2.5 \lg e^{-\tau}, \Rightarrow \Delta m_* = 2.5\tau \lg e = 0.055^m. \quad (60)$$

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ



А.1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Постоянная Авогадро – $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

А.2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина – -26.74^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Солнечная постоянная (во всем спектре) на расстоянии Земли – 1361 Вт/м^2
- Солнечная постоянная (в видимом свете) на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

А.3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$

- Средний по объему радиус – 6371.0 км
- Средний экваториальный радиус – 6378.14 км
- Длина земного меридиана – 20004.276 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24}$ кг
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

А.4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^\circ 09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или $1/81.3$ массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

А.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \text{tg } x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\text{tg}(x \pm \alpha) \approx \text{tg } \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n x;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.

А.6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

А.7. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альbedo	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.8. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.9. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике и график для уравнения времени

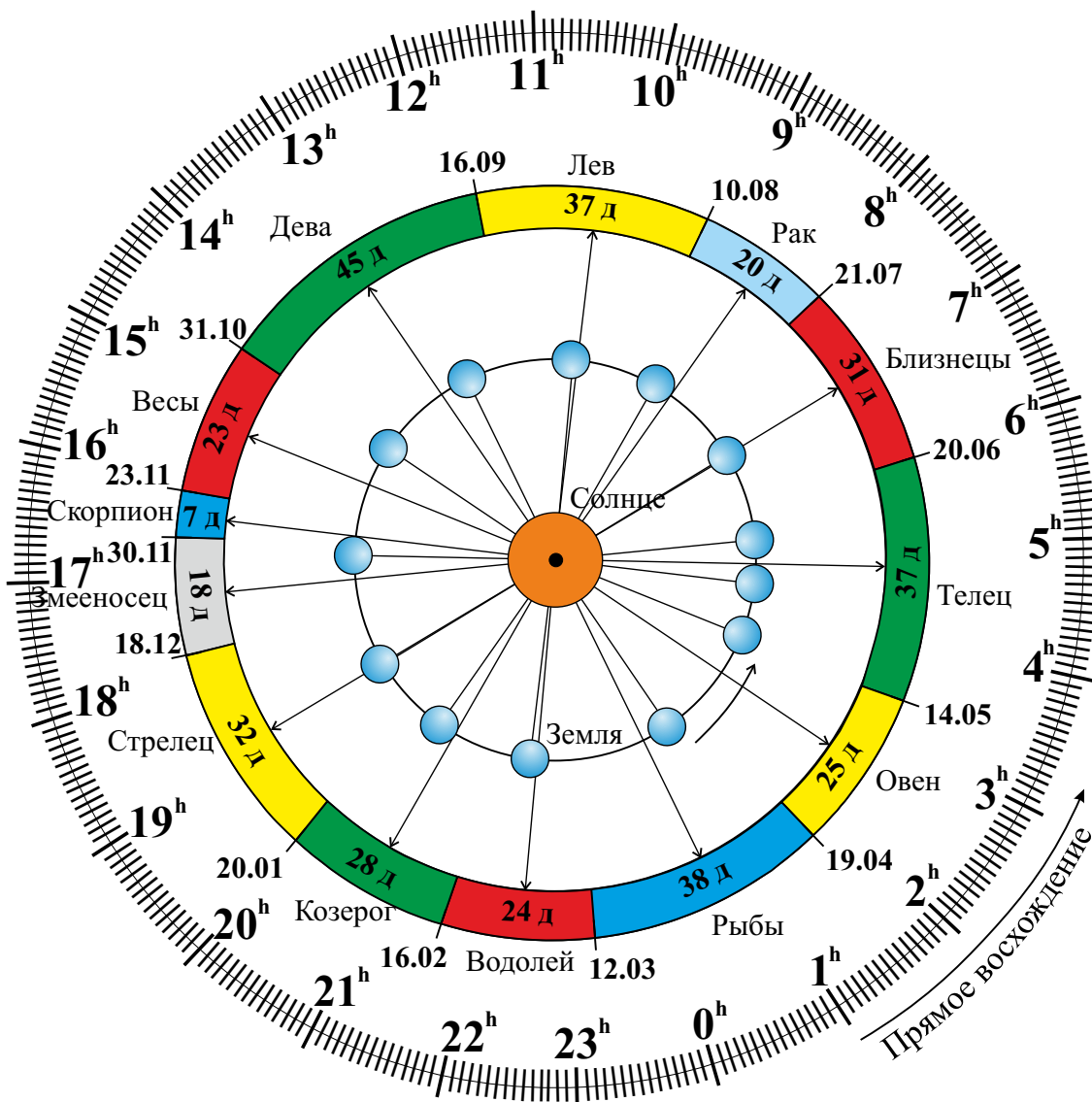


Рис. А.1. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике.

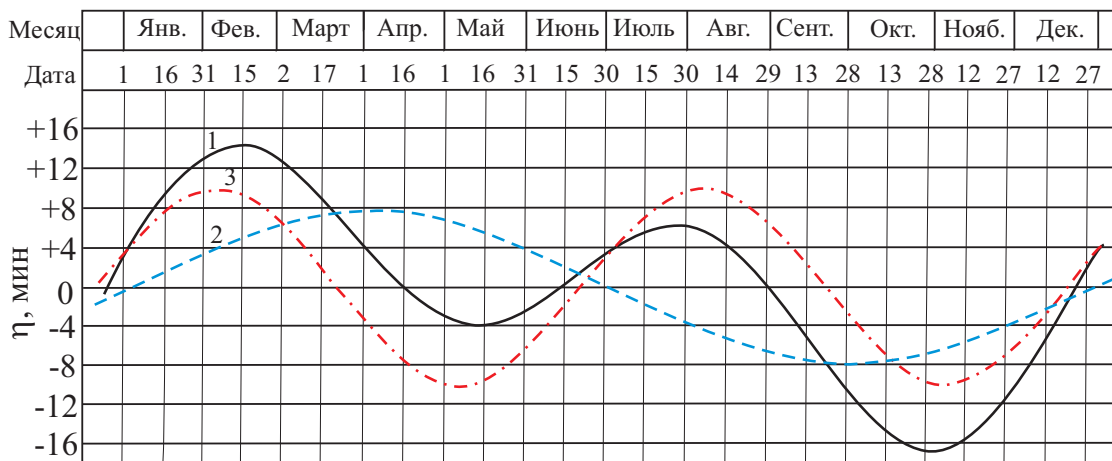


Рис. А.2. График уравнения времени: 1 – уравнение времени, 2 – уравнение центра, 3 – уравнение от наклона эклиптики.

А.10. Яркие звезды ночного небосвода

Топ-25 ярчайших звезд ночного небосвода

№	Название	α	δ	r , св.л.	m , ^m	M , ^m	Сп. кл.	Полушарие и № в нем
1	Сириус (α Большого Пса)	06 ^h 45 ^m 9 ^s	-16°42'58"	8.6	-1.46	1.4	A1Vm	Южное (01)
2	Канопус (α Киля)	06 ^h 23 ^m 57 ^s	-52°41'45"	310	-0.72	-5.53	A9II	Южное (02)
3	Ригил(A)/Толлиман(B) (α Центавра АВ)	14 ^h 39 ^m 35 ^s	-60°50'15"	4.3	-0.27	4.06	G2V + K1V	Южное (03)
4	Арктур (α Волосаса)	14 ^h 15 ^m 40 ^s	19°10'57"	36.7	-0.05	-0.3	K1.5IIIp	Северное (01)
5	Вега (α Лир)	18 ^h 36 ^m 56 ^s	38°47'01"	25	0.03 ^v	0.6	A0Va	Северное (02)
6	Капелла (α Возничего)	05 ^h 16 ^m 41 ^s	45°59'53"	42.2	0,08	-0.5	G6III + G2III	Северное (03)
7	Ригель (β Ориона)	05 ^h 14 ^m 32 ^s	-08°12'06"	870	0.12 ^v	-7.84	B8Iae	Южное (04)
8	Процион (α Малого Пса)	07 ^h 39 ^m 18 ^s	+05°13'30"	11.4	0.38	2.6	F5IV-V	Северное (04)
9	Ахернар (α Эридана)	01 ^h 37 ^m 43 ^s	-57°14'12"	139	0.46	-1.3	B3Vnp	Южное (05)
10	Бетельгейзе (α Ориона)	05 ^h 55 ^m 10 ^s	07°24'25"	530	0.50 ^v	-5.14	M2Iab	Северное (05)
11	Хадар (β Центавра)	14 ^h 03 ^m 49 ^s	-60°22'23"	400	0.61 ^v	-5.4	B1III	Южное (06)
12	Альтаир (α Орла)	19 ^h 50 ^m 47 ^s	08°52'06"	16.8	0.77	2.3	A7Vn	Северное (06)
13	Акрукс (α Южного Креста)	12 ^h 26 ^m 36 ^s	-63°05'57"	321	0.77	-4.1	B0.5IV + B1Vn	Южное (07)
14	Альдебаран (α Тельца)	04 ^h 35 ^m 55 ^s	16°30'33"	65	0.85 ^v	-0.3	K5III	Северное (07)
15	Антарес (α Скорпиона)	16 ^h 29 ^m 24 ^s	-26°25'55"	610	0.96 ^v	-5.2	M1.5Iab	Южное (08)
16	Спика (α Девы)	13 ^h 25 ^m 12 ^s	-11°09'41"	250	0.98 ^v	-3.2	B1V	Южное (09)
17	Поллукс (β Близнецов)	7 ^h 45 ^m 19 ^s	28°01'34"	33.7	1.14	0.7	K0IIIb	Северное (08)
18	Фомальгаут (α Южной Рыбы)	22 ^h 57 ^m 39 ^s	-29°37'20"	25	1.16	2.0	A3Va	Южное (10)
19	Мимоза (β Южного Креста)	12 ^h 47 ^m 43 ^s	-59°41'19"	353	1.25 ^v	-4.0	B0.5III	Южное (11)

Топ-25 ярчайших звезд ночного небосвода (продолжение)

20	Денеб (α Лебедя)	20 ^h 41 ^m 26 ^s	45°16'49"	1550	1.25	-8.38	A2Ia	Северное (09)
21	Регул (α Льва)	10 ^h 08 ^m 22 ^s	11°58'02"	77	1.35	-0.5	B7Vn	Северное (10)
22	Адара (ϵ Большого Пса)	06 ^h 58 ^m 38 ^s	-28°58'19"	400	1.50	-4.8	B2II	Южное (12)
23	Кастор (α Близнецов)	07 ^h 34 ^m 36 ^s	31°53'18"	51.5	1.57	0.5	A1V + A2V	Северное (11)
24	Гакрукс (γ Южного Креста)	12 ^h 31 ^m 10 ^s	-57°06'48"	88	1.63 ^v	-1.2	M3.5III	Южное (13)
25	Шаула (λ Скорпиона)	17 ^h 33 ^m 37 ^s	-37°06'13"	365	1.63 ^v	-3.5	B1.5IV	Южное (14)

А.11. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела, болометрические поправки

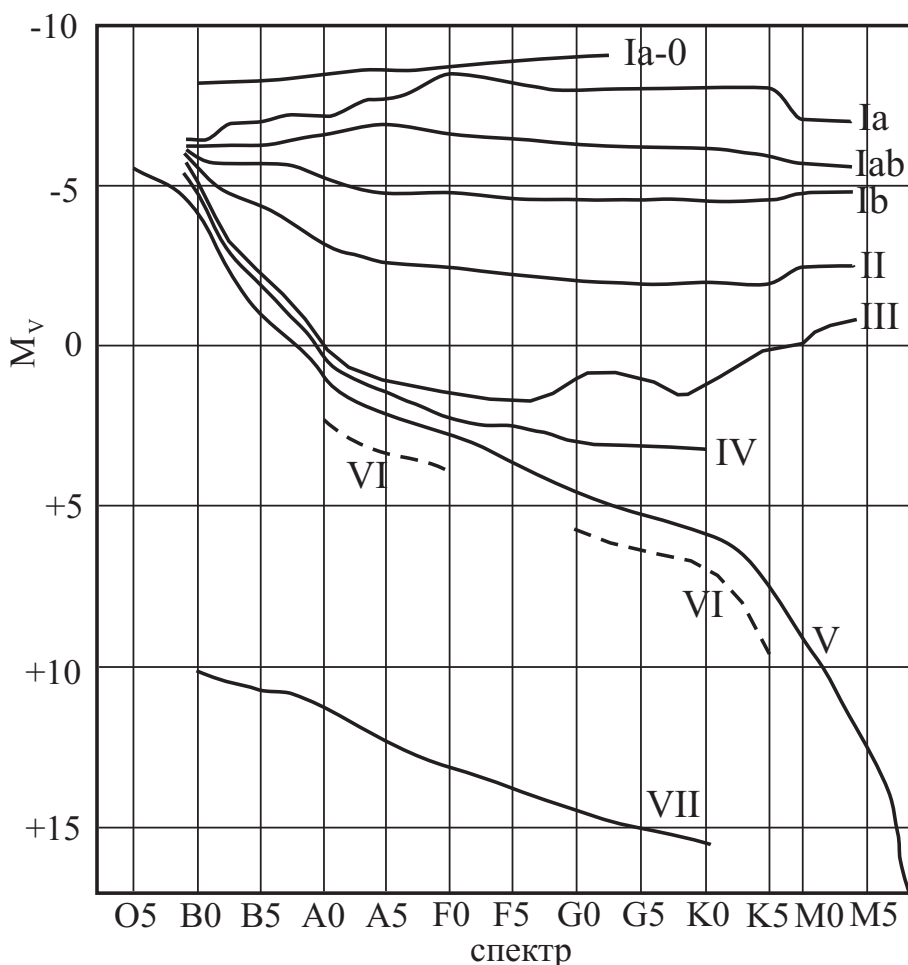


Рис. А.3. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.

Болометрические поправки ΔM_b

Спектр	ΔM_b	Спектр	ΔM_b		
			Гл. последовательность	Гиганты	Сверхгиганты
B0	- 2.70	F5	- 0.04	- 0.08	- 0.12
B5	- 1.58	F8	- 0.05	- 0.17	- 0.28
A0	- 0.72	G0	- 0.06	- 0.25	- 0.42
A5	- 0.31	G2	- 0.07	- 0.31	- 0.52
F0	- 0.09	G5	- 0.10	- 0.39	- 0.65
F2	- 0.04	G8	- 0.10	- 0.47	- 0.80
		K0	- 0.11	- 0.54	- 0.93
		K2	- 0.15	- 0.72	- 1.20
		K3	- 0.31	- 0.89	- 1.35
		K4	- 0.55	- 1.11	- 1.56
		K5	- 0.85	- 1.35	- 1.86
		M0	- 1.43	- 1.55	- 2.2
		M1	- 1.70	- 1.72	- 2.6
		M2	- 2.03	- 1.95	- 3.0
		M3	- 2.35	- 2.26	- 3.6
		M4	- 2.7	- 2.72	- 3.8
		M5	- 3.1	- 3.4	- 4.0

А.12. Статистика распределения звезд по звездным величинам

m	Кол-во звезд	m	Кол-во звезд	m	Кол-во звезд, $\times 10^6$	m	Кол-во звезд, $\times 10^6$
0^m	4	5^m	1602	10^m	0.340	15^m	36.9
1^m	15	6^m	4800	11^m	0.927	16^m	83.7
2^m	48	7^m	14000	12^m	2.46	17^m	182
3^m	171	8^m	42000	13^m	6.29	18^m	374
4^m	513	9^m	121000	14^m	15.5	19^m	733

Примечание: здесь указано количество звезд на всем небосводе, имеющих блеск ярче указанной звездной величины, согласно Star Numbers, 2001.

А.13. Таблица Менделеева

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

ПЕРИОДЫ	A	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	В
1	(H)									
2	Li Lithium Литий	Be Beryllium Бериллий	B Boron Бор	C Carbonium Углерод	N Nitrogenium Азот	O Oxygenium Кислород	F Fluorium Фтор	Ne Neon Неон	He Helium Гелий	
3	Na Natrium Натрий	Mg Magnesium Магний	Al Aluminium Алюминий	Si Silicium Кремний	P Phosphorus Фосфор	S Sulfur Сера	Cl Chlorium Хлор	Ar Argon Аргон	Neon Неон	
4	K Kalium Калий	Ca Calcium Кальций	Sc Scandium Скандий	Ti Titanium Титан	V Vanadium Ванадий	Cr Chromium Хром	Mn Manganum Марганец	Fe Ferrum Железо	Co Cobaltum Кобальт	Ni Niccolum Никель
5	Rb Rubidium Рубидий	Sr Strontium Стронций	Y Yttrium Иттрий	Zr Zirconium Цирконий	Nb Niobium Нибойд	Mo Molybdenum Молибден	Tc Technetium Технеций	Ru Ruthenium Рутений	Rh Rhodium Родий	Pd Palladium Палладий
6	Cs Cesium Цезий	Ba Barium Барий	La* Lanthanum Лантан	Hf Hafnium Гафний	Ta Tantalum Тантал	W Wolframium Вольфрам	Re Rhenium Рений	Os Osmium Осмий	Ir Iridium Иридий	Pt Platinum Платина
7	Fr Francium Франций	Ra Radium Радий	Ac** Actinium Актиний	Rf Rutherfordium Фезерфордий	Du Dubnium Дубний	Sg Seaborgium Сиборгий	Bh Bohrium Борий	Hs Hassium Хассий	Mt Meitnerium Мейтнерий	
формлы летучих оксидов	R ₂ O	RO	R ₂ O ₃	RO ₂	RH ₃	R ₂ O ₅	RH ₂	RO ₃	R ₂ O ₇	RO ₄
формлы летучих соединений										
ЛАНТАНОИДЫ*	Ce Cesium Цезий	Pr Praseodymium Прозеродим	Nd Neodymium Неодим	Pm Promethium Прометий	Eu Europium Европий	Gd Gadolinium Гадолиний	Tb Terbium Тербий	Dy Dysprosium Диспрозий	Ho Holmium Гольмий	Er Erbium Эрбий
АКТИНОИДЫ**	Th Thorium Торий	Pa Protactinium Протактиний	U Uranium Уран	Np Neptunium Нептуний	Am Americium Америций	Cm Curium Кюри	Bk Berkelium Берклий	Cf Californium Калифорний	Es Einsteinium Эйнштейний	Fm Fermium Фермий

Символ элемента

Относительная атомная масса

Периодический номер

Название элемента

Распределение электронов на энергетических уровнях

Рис. А.4. Таблица Менделеева.

В.1. Карты звездного неба

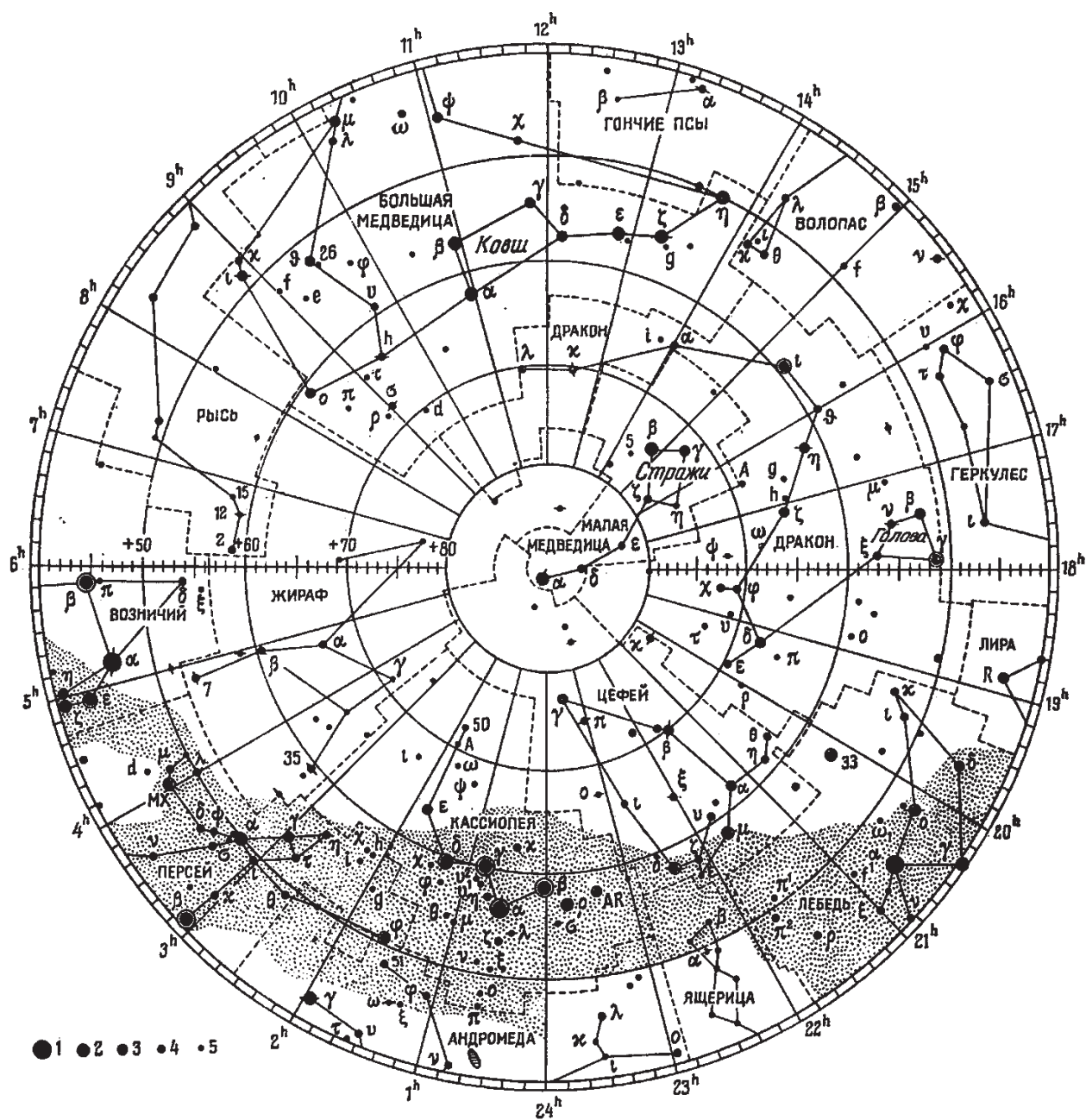


Рис. В.1. Карта северной околополярной области.

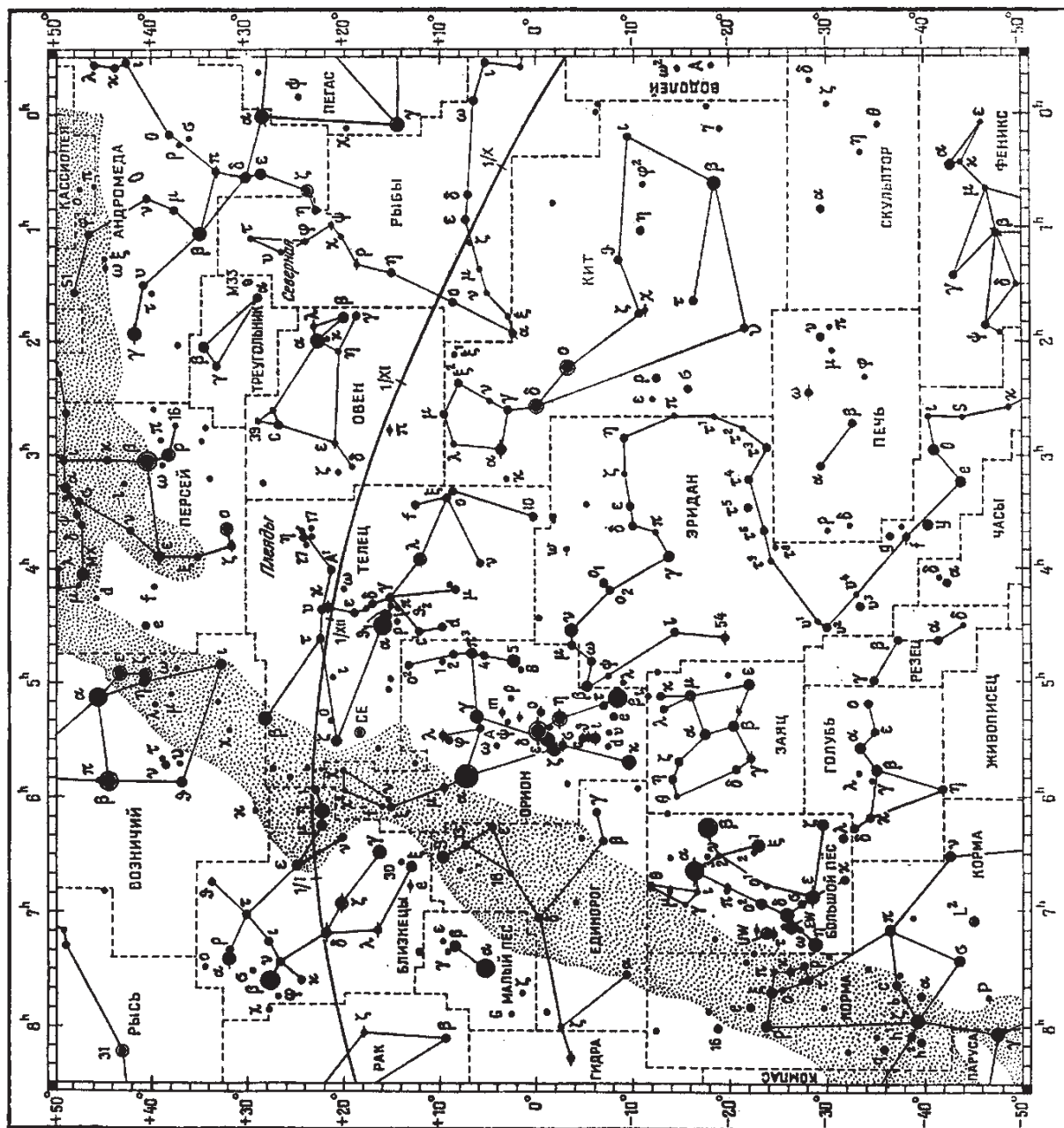


Рис. В.2. Карта осенне-зимнего небосвода.

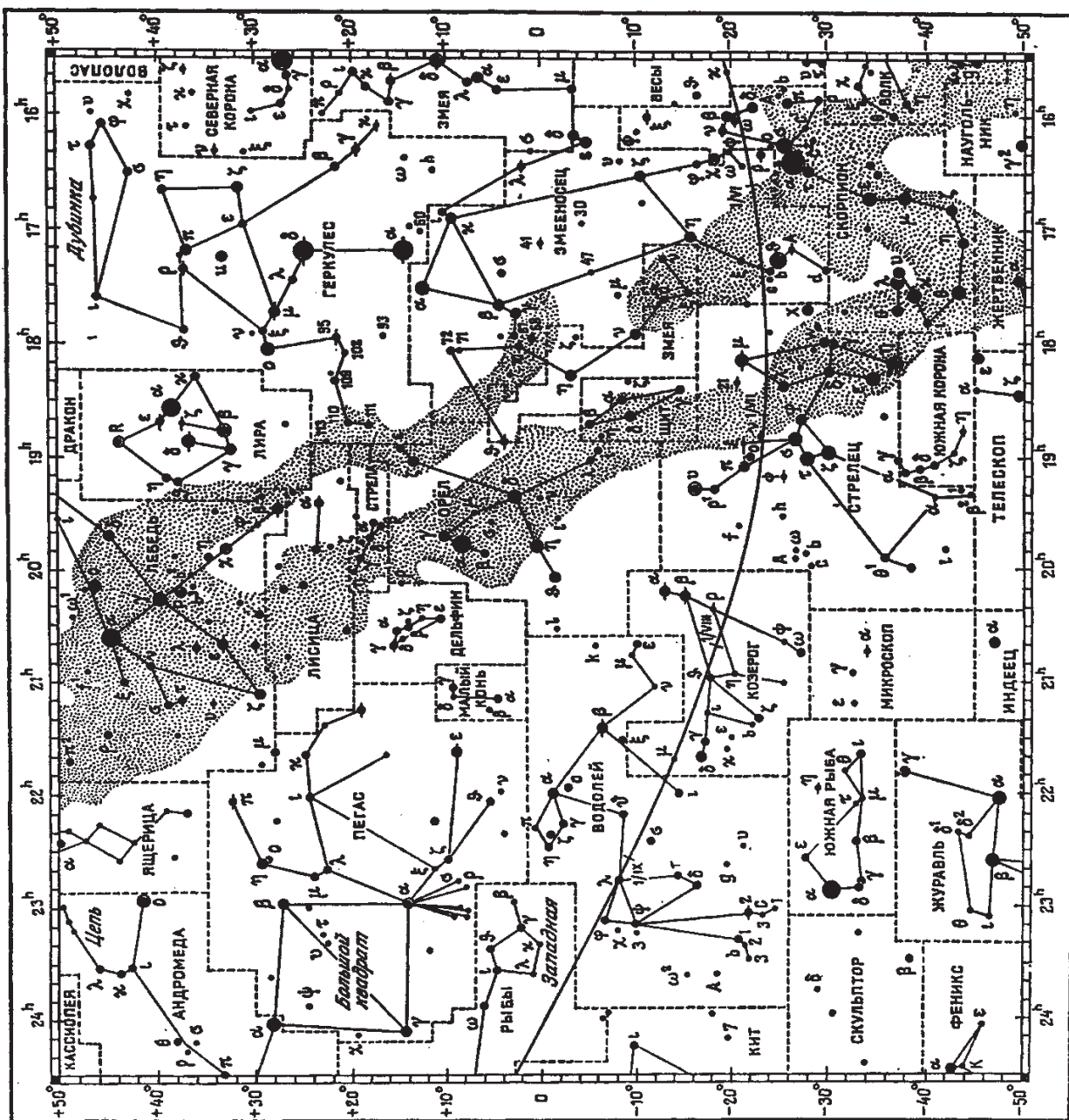


Рис. В.4. Карта летне-осеннего небосвода.

