

Решения задач
Открытой межрегиональной олимпиады
по астрономии имени Ф.А. Бредихина
9 класс

№ 1. «Топ-10 ярчайших звезд небосвода г. Самары»

Условие. Вашему вниманию в табл. 1 представлен Топ-10 ярчайших звезд (и их экваториальные координаты), видимых с территории г. Самары в течение года. Определите:

1. Какие из этих звезд Вы можете наблюдать сегодня-завтра в темное время суток невооруженным глазом (в случае безоблачной погоды) в месте своего постоянного проживания? Следует отметить в колонке "Видимость" словом "да", если звезда видна в темное время суток, "нет", если не видна.

2. В какую часть суток (вечер, все темное время суток (ночь), утро и прочерк, если не видна; в таблицу следует вносить лишь первые буквы этих слов, например, «В», «Н», «У»; если частей несколько, то следует перечислить их в ячейке таблицы буквами, через запятую) они лучше всего видны?

3. В какой части небосвода (север, юг, запад, восток и прочерк, если не видна; в таблицу следует вносить лишь первые буквы этих слов, например, «С», «Ю», «З», «В»; если сторон несколько, то следует перечислить их в ячейке таблицы буквами, через запятую) они при этом расположены?

4. В каких созвездиях находятся эти звезды?

Свои ответы представьте в табл. 1 (Вы можете вырезать эту таблицу ножницами из условия и наклеить ее на свой бланк в целях экономии времени!).

№	Название	Склонение	Пр. восхождение	Видимость	Часть суток	Часть небосвода	Созвездие
1	Сириус	$-16^{\circ}42'58''$	$06^{\text{h}}45^{\text{m}}09^{\text{s}}$				
2	Арктур	$+19^{\circ}10'57''$	$14^{\text{h}}15^{\text{m}}40^{\text{s}}$				
3	Вега	$+38^{\circ}47'01''$	$18^{\text{h}}36^{\text{m}}56^{\text{s}}$				
4	Капелла	$+45^{\circ}59'53''$	$05^{\text{h}}16^{\text{m}}41^{\text{s}}$				
5	Ригель	$-08^{\circ}12'06''$	$05^{\text{h}}14^{\text{m}}32^{\text{s}}$				
6	Процион	$+05^{\circ}13'30''$	$07^{\text{h}}39^{\text{m}}18^{\text{s}}$				
7	Бетельгейзе	$+07^{\circ}24'25''$	$05^{\text{h}}55^{\text{m}}10^{\text{s}}$				
8	Альтаир	$+08^{\circ}52'06''$	$19^{\text{h}}50^{\text{m}}47^{\text{s}}$				
9	Альдебаран	$+16^{\circ}30'33''$	$04^{\text{h}}35^{\text{m}}55^{\text{s}}$				
10	Антарес	$-26^{\circ}25'55''$	$16^{\text{h}}29^{\text{m}}40^{\text{s}}$				

Таблица 1. Топ-10 самых ярких звезд небосвода.

Решение. 1. Определим прямое восхождение Солнца на дату (17.04.2022) проведения финала Олимпиады. Заметим, что 20 марта 2022 года состоялся день весеннего равноденствия – в эти сутки истинное солнце прошло через точку весеннего равноденствия. Значит в этот день прямое восхождение истинного солнца было равно нулю (ибо данную координату отсчитывают от точки весны).

2. Солнце в течение тропического года ($T_{\text{тр}} = 365.24$ сут) движется по эклиптике и совершает один полный оборот. При этом его прямое восхождение увеличивается за указанный промежуток времени на 24^{h} . Значит за одни сутки его прямое восхождение увеличивается на

$$\omega_{\odot} = \frac{\Delta\alpha_{\odot}}{T_{\text{тр}}} = \frac{24^{\text{h}}}{365.24 \text{ сут}} = 0.0657^{\text{h}}/\text{сут} = 3.94^{\text{m}}/\text{сут}.$$

3. С дня весеннего равноденствия до настоящего дня прошло $\Delta t = 28$ сут, значит прямое

восхождение Солнца на данный момент равно

$$\alpha_{\odot} = \omega_{\odot} \cdot \Delta t = 1^{\text{h}}50^{\text{m}}.$$

4. Те звезды, прямые восхождения которых близки по значению к прямому восхождению истинного Солнца будут скрываться в лучах Солнца и не будут видны. Однако такие звезды в данном списке на момент проведения Олимпиады отсутствуют. Звезды, у которых прямое восхождение отличается на 12 часов от значения α_{\odot} , т.е. близки к значению 14^{h} , наоборот будут видны всю ночь. К таким относится Арктур. Причем он будет виден на востоке, юге и западе в течение ночи.

5. Звезды, у которых прямое восхождение больше солнечного на $2 \div 6$ часов будут видны вечером в западной стороне небосвода. К таким относятся Альдебаран, Капелла, Ригель, Бетельгейзе, Сириус, Процион. Следует отметить, что Капелла для большей части РФ является незаходящей звездой, поэтому она также будет видна ночью на севере, а утром – на востоке.

6. Звезды, у которых прямое восхождение превосходят значение 14^{h} будут видны после полуночи и до утра преимущественно в восточной (южной) стороне небосвода. К таким относится Вега, Альтаир. При этом Вега является незаходящей звездой на части территории РФ, например, в Самаре. В силу большого отрицательного склонения Антарес будет виден лишь в южной стороне небосвода.

В итоге заполненная табл. 1 представляется в следующем виде:

№	Название	Склонение	Пр. восхождение	Видимость	Часть суток	Часть небосвода	Созвездие
1	Сириус	$-16^{\circ}42'58''$	$06^{\text{h}}45^{\text{m}}09^{\text{s}}$	Да	В	З	Большой Пес
2	Арктур	$+19^{\circ}10'57''$	$14^{\text{h}}15^{\text{m}}40^{\text{s}}$	Да	Н	{В, Ю, З}	Волопас
3	Вега	$+38^{\circ}47'01''$	$18^{\text{h}}36^{\text{m}}56^{\text{s}}$	Да	У/Н	В, Ю/{С,В,Ю}	Лира
4	Капелла	$+45^{\circ}59'53''$	$05^{\text{h}}16^{\text{m}}41^{\text{s}}$	Да	Н	{З, С, В}	Возничий
5	Ригель	$-08^{\circ}12'06''$	$05^{\text{h}}14^{\text{m}}32^{\text{s}}$	Да	В	З	Орион
6	Процион	$+05^{\circ}13'30''$	$07^{\text{h}}39^{\text{m}}18^{\text{s}}$	Да	В	З	Малый Пес
7	Бетельгейзе	$+07^{\circ}24'25''$	$05^{\text{h}}55^{\text{m}}10^{\text{s}}$	Да	В	З	Орион
8	Альтаир	$+08^{\circ}52'06''$	$19^{\text{h}}50^{\text{m}}47^{\text{s}}$	Да	У	В	Орел
9	Альдебаран	$+16^{\circ}30'33''$	$04^{\text{h}}35^{\text{m}}55^{\text{s}}$	Да	В	З	Телец
10	Антарес	$-26^{\circ}25'55''$	$16^{\text{h}}29^{\text{m}}40^{\text{s}}$	Да	У	Ю	Скорпион

Таблица 2. Топ-10 самых ярких звезд небосвода (с ответами).

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
За каждый правильно определенный статус видимости	0.5(5)
За каждую правильно определенную часть суток (в случае указания нескольких частей – лишь за правильную позицию)	0.5(5)
За каждую правильно определенную часть небосвода (в случае Арктура и Капеллы балл выставляется лишь за все три части! В случае Веги допускаются либо восток или юг, либо три части одновременно)	0.5(5)
За каждое правильно определенное созвездие	0.5(5)

№ 2. «Объекты глубокого космоса и их некоторые свойства»

Условие. На рис. 1 представлены фотографии пяти объектов глубокого космоса. Определите

- I. Тип каждого объекта;
- II. Его обозначение по каталогу Мессье;
- III. Созвездие, в котором находится объект;
- IV. Статус возможности его наблюдения (в условиях, близких к идеальным) невооруженным глазом.

Заполните табл. 3 (Вы можете вырезать эту таблицу ножницами из условия и наклеить ее на свой бланк в целях экономии времени!). В строках (I)-(III) необходимо прописать буквенное обозначение данного объекта согласно рисунку. В строке (IV) необходимо написать «да», если объект можно увидеть невооруженным глазом (в оптимальных условиях), «нет» – если нельзя увидеть.

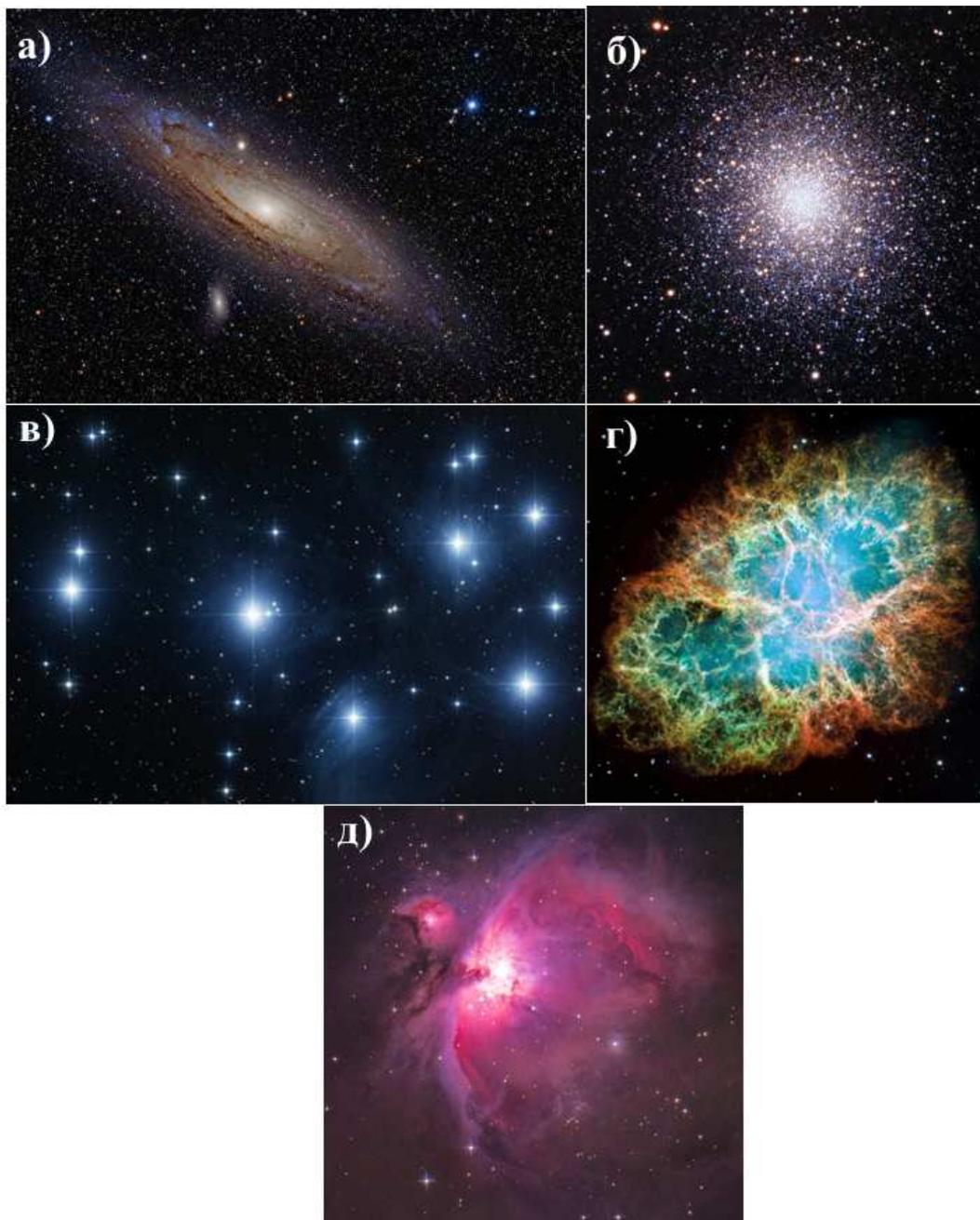


Рис. 1. Объекты глубокого космоса.

Решение. 1. На рис. 1.а) представлен образ спиральной галактики М31 (по каталогу Мессье) самой крупной галактики в Местной группе, расположенной в созвездии Андромеда. Данную галактику можно без труда увидеть невооруженным глазом в условиях, близких к идеальным.

2. На рис. 1.б) представлено самое яркое шаровое скопление в северной полусфере небосвода – *большое скопление Геркулеса*, М13, расположенное в одноименном созвездии. Данный объект можно увидеть невооруженным глазом в условиях, близких к идеальным, на пределе его возможностей.

3. На рис. 1.в) представлено одно из самых ярких и красивых рассеянных звездных скоплений – *Плеяды*, М45. Расположено скопление в созвездии Тельца, оно отлично видно невооруженным глазом.

4. На рис. 1.г) представлена диффузная туманность – остаток сверхновой, *Крабовидная ту-*

	Тип объекта	Рассеянное скопление	Туманность эмиссионная + область звездообразования	Шаровое скопление	Галактика	Остаток сверхновой
I	Обозначение					
	По каталогу Мессье	M1	M13	M31	M42	M45
II	Обозначение					
	Созвездие	Андромеда	Геркулес	Телец		Орион
III	Обозначение					
	Обозначение	а)	б)	в)	г)	д)
IV	Видимость невооруженным глазом					

Таблица 3. Возможные типы объектов, их обозначения по каталогу Мессье, принадлежность созвездиям и возможность их наблюдения невооруженным глазом.

манность. По каталогу Мессье эта туманность имеет код M1. Расположена также в созвездии Тельца и не может быть видна невооруженным глазом.

5. На рис. 1.д) представлена эмиссионная туманность и область звездообразования – Большая туманность Ориона (M42), расположенная в одноименном созвездии. Ее можно наблюдать невооруженным глазом.

В итоге заполненная табл. 3 представляется в виде:

	Тип объекта	Рассеянное скопление	Туманность эмиссионная + область звездообразования	Шаровое скопление	Галактика	Остаток сверхновой
I	Обозначение	в)	д)	б)	а)	г)
	По каталогу Мессье	M1	M13	M31	M42	M45
II	Обозначение	г)	б)	а)	д)	в)
	Созвездие	Андромеда	Геркулес	Телец		Орион
III	Обозначение	а)	б)	в),г)		д)
	Обозначение	а)	б)	в)	г)	д)
IV	Видимость невооруженным глазом	Да	Да	Да	Нет	Да

Таблица 4. Возможные типы объектов, их обозначения по каталогу Мессье, принадлежность созвездиям и возможность их наблюдения невооруженным глазом (с ответами).

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
За каждый правильно определенный тип объекта	1(5)
За каждое правильно определенное обозначение по каталогу Мессье	1(5)
За каждое правильно определенное созвездие	1(5)
За каждый правильно определенный статус видимости объекта	1(5)

№ 3. «Самара над плоскостью орбиты Земли»

Условие. 1. В какие сутки года линейное расстояние г. Самары ($\varphi_{Sa} = 53^\circ 12'$, $\lambda_{Sa} = 50^\circ 06'$) в истинную полночь от плоскости земной орбиты достигает а) максимального, б) минимального значения, располагаясь при этом в плоскости, перпендикулярной плоскости орбиты?

2. Чему равны соответствующие расстояния?

3. Какую долю они составляют от радиуса Земли?

4. Во сколько раз отличаются потоки солнечной энергии, падающие на территорию г. Самары в полдень, в эти дни?

Следует полагать, что Земля есть шар, ее орбита – окружность. Влиянием рефракции и гравитационным влиянием Луны на орбитальное движение Земли пренебречь.

Решение. 1. Рассмотрим рис. 2, на котором представлен земной шар. Здесь NS определяет ось вращения Земли, Q_1Q_2 – плоскость земного экватора, O_1O_2 – плоскость земной орбиты относительно Солнца, $\Pi_N\Pi_S$ – ось орбиты Земли; S_1S_2 – географическая параллель г. Самары. Из рисунка очевидно, что в точке S_2 искомое расстояние города до плоскости орбиты достигает максимального значения, а в точке S_1 – минимального значения. Если г. Самара располагается в точке S_2 и при этом достигается истинная полночь, то очевидно Солнце в этот момент также располагается в плоскости рисунка (слева) и при этом северный полюс ориентирован точно на Солнце, что достигается в *день летнего солнцестояния* (2 балла). Если г. Самара располагается в точке S_1 и при этом достигается истинная полночь, то очевидно Солнце в этот момент также располагается в плоскости рисунка (справа) и при этом уже южный полюс ориентирован точно на Солнце, что достигается в *день зимнего солнцестояния* (2 балла).

2. Определим искомые расстояния S_1P_1 и S_2P_2 . Из рис. 2 нетрудно видеть, что

$$r_{\max} = S_2P_2 = \mathfrak{R}_{\oplus} \sin(\varphi_{Sa} + \varepsilon) = 6198 \text{ км}, \quad r_{\min} = S_1P_1 = \mathfrak{R}_{\oplus} \sin(\varphi_{Sa} - \varepsilon) = 3163 \text{ км}. \quad (1)$$

В вычислениях последних величин было учтено, что угол ε между плоскостью земного экватора и плоскостью земной орбиты составляет $\varepsilon = 23^\circ 26'$; \mathfrak{R}_{\oplus} – средний радиус Земли. (6 баллов)

3. Данные параметры составляют следующие доли от радиуса Земли (4 балла):

$$x_{\max} = \frac{r_{\max}}{\mathfrak{R}_{\oplus}} = \sin(\varphi_{Sa} + \varepsilon) = 0.973, \quad x_{\min} = \frac{r_{\min}}{\mathfrak{R}_{\oplus}} = \sin(\varphi_{Sa} - \varepsilon) = 0.496. \quad (2)$$

4. Согласно определению, *энергетическим потоком* называется скалярная физическая величина, равная произведению интенсивности электромагнитного излучения (в нашем случае солнечной постоянной, f_{\odot}), падающего на площадку S_{Sa} , на величину этой площадки и на косинус угла α между направлением распространения электромагнитного излучения и нормалью к этой площадке:

$$\Phi_E = f_{\odot} \cdot S_{Sa} \cos \alpha$$

в нашем случае угол α равен углу между отвесной линией и падающими солнечными лучами, т.е. зенитному расстоянию (z_{\odot}) Солнца. Представим последний результат через высоту (h_{\odot}) Солнца с учетом $z_{\odot} = 90^\circ - h_{\odot}$ (2 балла):

$$\Phi_E = f_{\odot} \cdot S_{Sa} \sin h_{\odot}.$$

Поскольку орбита Земли круговая, то солнечная постоянная не меняется с течением времени как и площадь г. Самары. Следовательно поток зависит лишь от угловой высоты Солнца над горизонтом. Поскольку синус монотонно возрастающая функция с увеличением аргумента, следовательно

$$\xi = \frac{\Phi_{\max}}{\Phi_{\min}} = \frac{\sin h_{\odot}^{(\max)}}{\sin h_{\odot}^{(\min)}}. \quad (3)$$

В день летнего солнцестояния высота солнца в полдень достигает максимального значения, а в день зимнего солнцестояния – минимального значения. Данные величины представляются в виде

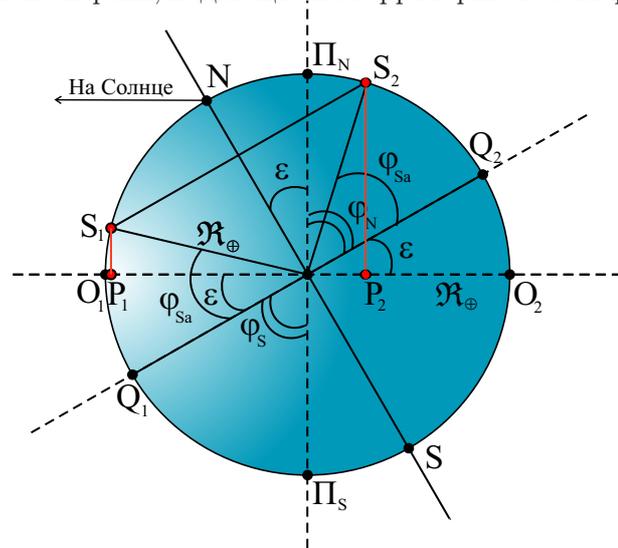


Рис. 2. К определению земного шара и положений г. Самары относительно плоскости земной орбиты.

(2 балла):

$$h_{\odot}^{(\max)} = 90^{\circ} - \varphi_{Sa} + \varepsilon = 60^{\circ}14', \quad h_{\odot}^{(\min)} = 90^{\circ} - \varphi_{Sa} - \varepsilon = 13^{\circ}22'.$$

Следовательно, искомая величина $\xi = 3.75$ (2 балла).**Ответ:** дни солнцестояний; выражения (1)-(2); $\xi = 3.75$.**Рекомендации для жюри.**

Выполненная часть решения задачи	Балл
Корректное определение искомых дней года (летнего + зимнего солнцестояний)	2+2
Правильно рассчитаны максимальное + минимальное расстояния	3+3
Правильно рассчитаны соответствующие им доли	2+2
Корректный расчет отношения потоков	6

№ 4. «Закон Тициуса-Боде и его "предсказательная сила"»

Условие. Как известно, закон Тициуса-Боде определяет гелиоцентрическое расстояние планеты Солнечной системы (как классической, так и карликовой) от Солнца и может быть записан так

$$r_n = 0.1(4 + 3 \cdot 2^n), \quad [r_n] = \text{a.e.}, \quad (4)$$

здесь n – планетный индекс, значение которого всегда есть целое число из отрезка $[-\infty, +\infty]$. Для каждой планеты он принимает свое значение. Определите:

1. Значения планетного индекса для классических и карликовых планет Солнечной системы. Критерием подбора индекса является условие:

$$\eta = \frac{|r_n - a_p|}{a_p} \times 100\% < 15\%, \quad (5)$$

где r_n – гелиоцентрическое расстояние рассматриваемой планеты, определяемое законом (4); a_p – современное точное значение радиуса (большой полуоси) орбиты планеты (представлено в 3-ей колонке табл. 5). Заполните табл. 5 (Вы можете вырезать эту таблицу ножницами из условия и наклеить ее на свой бланк в целях экономии времени!) для планет 1 – 4 и 6 – 11, указав

- а) значение планетного индекса n (последний столбец);
- б) расстояние r_n , вычисленное с использованием закона (4), (4-й столбец);
- в) величину отклонения η приближенного значения от точного, в процентах (5-й столбец).

2. При правильном определении значений планетных индексов Вы обнаружите некоторую закономерность в изменении величины параметра n , по мере удаления от Солнца. В чем суть этой закономерности? С использованием последней, определите с помощью закона (4) гелиоцентрическое расстояние до карликовой планеты (КП), расположенной между орбитами Марса и Юпитера. О какой именно планете идет речь?

3. Для какой из представленных планет не удастся определить планетный индекс? При каком значении параметра n данная закономерность нарушается?

4. Во второй декаде XXI века международной группой астрономов было высказана гипотеза о существовании на периферии Солнечной системы сразу двух гипотетических планет (назовем их для определенности Планеты X и Y), подобных классическим, оценочные значения радиусов орбит которых представлены в табл. 5. Определите параметры $\{r_n, \eta, n\}$ для данных планет.

5. С использованием радиусов r_n орбит, определите сидерические периоды обращения планет X и Y. Как часто эти планеты сближаются на земном небосводе, если полагать, что их орбиты располагаются в плоскости эклиптики.

Решение. 1. Рассмотрим алгоритм определения планетного индекса на примере *планет земной группы*. Заметим, что закон (4) дает прогноз для r_n с точностью до 0.1 а.е., а в табл. 5 точные значения для a_p представлены с точностью до десятитысячных. Для Меркурия a_p с точностью до десятых есть 0.4 а.е. Закон (4) можно переписать так

$$r_n = 0.4 + 0.3 \cdot 2^n.$$

№	Планета	a_p , а. е.	r_n , а.е.	η , %	n
1	Меркурий	0.3871			
2	Венера	0.7233			
3	Земля	1.0000			
4	Марс	1.5237			
5	КП	–		–	
6	Юпитер	5.2028			
7	Сатурн	9.5388			
8	Уран	19.1914			
9	Нептун	30.0611			
10	Плутон	39.4821			
11	Эрида	67.8640			
12	Планета X	150			
13	Планета Y	300			

Таблица 5. Классические и карликовые планеты Солнечной системы, их гелиоцентрические расстояния и планетные индексы.

Из последнего выражения следует, что для получения приближенного значения a_p достаточно обратить в нуль второе слагаемое. Это возможно достичь лишь для большого отрицательного значения параметра n , т.е. для $n = -\infty$. При этом относительное отклонение η , определяемое (5), будет равно 3.3%, что меньше заявленной верхней границы. Полученные значения параметров r_n , n , η заносим в табл. 5.

В случае Венеры приближенное значение для a_p есть 0.7 а.е. Методом подбора получаем значение $n = 0$, а $r_n = 0.7$ а.е. и относительное отклонение приближенного результата от точного составит 3.2%.

В случае Земли, имеем $r_n = 1.0$ а.е. при $n = 1$ и $\eta = 0\%$.

Для Марса приближенное значение a_p составляет 1.5 а.е. Вновь методом подбора при $n = 2$ получаем $r_n = 1.6$ а.е. при этом $\eta = 5.0\%$.

2. На примере четырех ближайших планет Солнечной системы можно заметить *устойчивую закономерность: за исключением Меркурия, планетный индекс для прочих планет пробегает ряд целых чисел (начиная с нуля в случае Венеры) с шагом в единицу (1.0 балл)*.

Вычисленные значения планетных индексов для Меркурия-Урана и представленные в табл. 6 указывают на то, что индекс $n = 3$ соответствует какому-то телу, очевидно, расположенному между орбитами Марса и Юпитера, при чем его расстояние $r_n = 2.8$ а.е. (1.0 балл). Нетрудно догадаться, что речь идет о *Церере* – карликовой планете (1.0 балл), расположенной в *Главном поясе астероидов*.

3. При попытке вычислить гелиоцентрическое расстояние с использованием закона (4) при $n = 7$ (1.0 балл) для Нептуна получается относительное отклонение результата от точного 29.2%, что существенно больше допустимого порогового (15%) значения. Именно по этой причине данный закон не работает для планеты Нептун (1.0 балл).

4. Рассуждая аналогично предыдущим случаям, получаем значения искомым параметров $\{r_n, \eta, n\}$ для данных планет (см. табл. 6). (2*{0.2 + 0.3 + 0.5} баллов)

5. С используем 3-го классического закона Кеплера и определим сидерический период обращения данных планет вокруг Солнца (1.0 балл):

$$\left(\frac{T_X}{T_\oplus}\right)^2 = \left(\frac{r_X}{a_\oplus}\right)^3, \Rightarrow T_X = T_\oplus \left(\frac{r_X}{a_\oplus}\right)^{3/2} = 1911 \text{ лет}, \quad T_Y = T_\oplus \left(\frac{r_Y}{a_\oplus}\right)^{3/2} = 5395 \text{ лет}. \quad (6)$$

a_\oplus, T_\oplus – радиус земной орбиты и сидерический период ее обращения соответственно.

Промежуток времени, через который повторяется сближения данных планет, является *синодическим периодом*. Запишем уравнение для синодического периода двух планет:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_X} - \frac{1}{T_Y}, \quad S = \frac{T_Y T_X}{T_Y - T_X} = 2959 \text{ лет}. \quad (7)$$

Т.о., данные планеты сближаются 1 раз в 2959 лет.

№	Планета	a_p , а. е.	r_n , а.е.	η , %	n
1	Меркурий	0.3871	0.4	3.3	$-\infty$
2	Венера	0.7233	0.7	3.2	0
3	Земля	1.0000	1.0	0.0	1
4	Марс	1.5237	1.6	5.0	2
5	КП	–	2.8	–	3
6	Юпитер	5.2028	5.2	0.05	4
7	Сатурн	9.5388	10.0	4.8	5
8	Уран	19.1914	19.6	2.1	6
9	Нептун	30.0611	–	29.2% при $n = 7$	–
10	Плутон	39.4821	38.8	1.7	7
11	Эрида	67.8640	77.2	13.8	8
12	Планета X	150	154	2.7	9
13	Планета Y	300	307.6	2.5	10

Таблица 6. Классические и карликовые планеты Солнечной системы, их гелиоцентрические расстояния и планетные индексы (с ответами).

Ответ: к задаче представляется значениями табл. 6; выражениями (6)-(7).

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
За каждое правильно определенное значение планетного индекса	0.5(5)
За каждое правильно определенное значение гелиоцентрического расстояния r_n , согласно (4)	0.2(2)
За каждое правильно рассчитанное значение отклонения η (допускается отклонение в 0.2% от указанного как погрешность округления, за исключением Юпитера)	0.3(3)
Корректно сформулирована суть обнаруженной закономерности + правильно вычислено гелиоцентрическое расстояние до карликовой планеты + правильно названа планета	1+1+1(3)
Правильно названа планета, для которой не удается определить планетной индекс + указано явно значение планетного индекса, при котором данная закономерность нарушается	1+1(2)
Корректно вычислены значения параметров $\{r_n, \eta, n\}$ для планет X и Y	$2 * \{0.2 + 0.3+0.5\}$ (2)
Правильно вычислены сидерические периоды обращения планет + частота их сближения	$2*1+1$ (3)

№ 5. «Нептун и его собственный источник энергии»

Условие. Докажите, что планета Нептун обладает собственным источником теплового излучения, если известно ее сферическое альbedo – $A_B = 0.290$, а средняя температура поверхности планеты равна $t_N = -201^\circ$. Для этого

1. Определите эффективную температуру (T_0) поверхности планеты (в кельвинах) в предположении, что данная величина определяется лишь потоком энергии, получаемой планетой от Солнца. Сравните полученный результат с T_N (выраженной в кельвинах). Сделайте вывод.

2. Предложите свою гипотезу источника собственного тепла Нептуна. Дайте развернутый ответ.

3. Во сколько раз мощность собственного источника теплового излучения Нептуна больше полного потока излучения, получаемого планетой от Солнца?

Рекомендации:

А. Следует отметить, что температура по шкале Цельсия связана с температурой по шкале Кельвина соотношением вида:

$$T = t + 273^\circ C, \quad 1K = 1^\circ C.$$

Б. Поверхность планеты следует считать абсолютно черным телом, для которого справедлив

закон Стефана-Больцмана для поверхностной светимости (M) источника:

$$M = \sigma \cdot T_{\text{eff}}^4, \quad (8)$$

где σ – постоянная Стефана-Больцмана (представлена в справочных данных), T_{eff} – эффективная температура (измеряемая в кельвинах) поверхности источника излучения.

В. Поверхностной светимостью источника (M) называется скалярная физическая величина, равная отношению количества энергии (ΔW), испущенной в форме электромагнитных волн с малой площадки ΔS за малый промежуток Δt , к величинам данной площадки и промежутка времени:

$$M = \frac{\Delta W}{\Delta S \cdot \Delta t}. \quad (9)$$

Г. Любая малая площадка поверхности планеты является *ламбертовым* источником излучения, т.е. излучает одинаковое количество энергии во всех возможных направлениях.

Решение. 1. Предположим, что Нептун не обладает собственным источником тепла. Запишем в этом случае уравнение энергетического баланса, предполагая, что поверхность последнего излучает в окружающее пространство энергию, подобно абсолютно черному телу (**3.0 балла**):

$$I_N \cdot \pi \mathfrak{R}_N^2 (1 - A_N) = \sigma \cdot T_0^4 \cdot 4\pi \mathfrak{R}_N^2, \quad (10)$$

где I_N – интенсивность солнечного излучения на орбите Нептуна; T_0 – его средняя температура поверхности; \mathfrak{R}_N – средний радиус Нептуна.

Интенсивность I_N электромагнитного излучения Солнца подчиняется закону обратных квадратов, следовательно (**2.0 балла**)

$$I_N = f_{\odot} \left(\frac{a_{\oplus}}{a_N} \right)^2 = 1.5 \text{ Вт/м}^2. \quad (11)$$

здесь a_{\oplus} , f_{\odot} – большая полуось земной орбиты и солнечная постоянная на орбите Земли.

С использованием (10) и (11) легко вычислить температуру поверхности Нептуна в Кельвинах:

$$T_0 = \sqrt{\frac{a_{\oplus}}{a_N}} \sqrt[4]{\frac{f_{\odot}(1 - A_N)}{4\sigma}} = 47 \text{ K}. \quad (12)$$

или в градусах по шкале Цельсия

$$t_0 = T_0 - 273 \text{ K} = -227^\circ \text{ C} < t_N.$$

Однако, в действительности температура поверхности планеты значительно выше. Более высокая температура поверхности Нептуна может быть достигнута лишь при наличии дополнительного, собственного регулярного источника энергии. Что и требовалось доказать (**3.0 балла**).

2. Как известно, Нептун относится к классу планет-гигантов, основным строительным элементом которых является смесь газов: водорода и гелия. При (почти адиабатическом) сжатии газа, что собственно реализуется в недрах Нептуна за счет гравитационных сил, его внутренняя энергия возрастает, а следовательно, избыточное тепло передается на периферию с течением времени и является тем самым дополнительным источником энергии планеты. (**4.0 балла**)

3. Определим во сколько раз мощность (N_N) собственного источника энергии Нептуна больше потока (Φ_{\odot}) излучения Солнца. Пусть $N_N/\Phi_{\odot} = x$, тогда уравнение энергетического баланса запишется в виде (**4.0 балла**):

$$\Phi_{\odot} + \Phi_{\odot} x = \sigma T_N^4 4\pi \mathfrak{R}_N^2, \Rightarrow x = \frac{\sigma T_N^4 4\pi \mathfrak{R}_N^2}{\Phi_{\odot}} - 1, \quad (13)$$

где

$$\Phi_{\odot} = I_N \pi \mathfrak{R}_N^2 (1 - A_N) = f_{\odot} \left(\frac{a_{\oplus}}{a_N} \right)^2 \pi \mathfrak{R}_N^2 (1 - A_N).$$

В итоге (4.0 балла)

$$x = \frac{4\sigma \cdot T_N^4}{f_{\odot}(1 - A_N)} \left(\frac{a_N}{a_{\oplus}} \right)^2 - 1 = 4.70, \text{ где } T_N = t_N + 273 \text{ К} = 72 \text{ К}. \quad (14)$$

Ответ: источник энергии Нептуна – его гравитационное сжатие; $x = N_N/\Phi_{\odot} = 4.7$.

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Представлено строгое математическое доказательство существования у Нептуна собственного источника энергии	8
Сформулирована гипотеза внутреннего источника энергии Нептуна, основанная на предположении о сжатии газового шара под действием гравитационных сил	4
Выполнен корректный расчет параметра x	8

№ 6. «Расстояние между двумя пунктами наблюдения РФ»

Условие. На рис. 3 и 4 представлены фотографии, полученные двумя российскими фотоаппаратами на территории РФ (расположенными на одном географическом меридиане в момент съемки). Известно, что

1. При создании первой фотографии (см. рис. 3) используемый автором фотоаппарат располагался на расстоянии $r_1 = 10$ м от второго окна фронтальной части дома. Высота данного окна составляла $h_1 = 140$ см. При этом высота фотокамеры над поверхностью земли равна высоте забора, видимого на фото. При создании второй фотографии (см. рис. 4) используемый автором фотоаппарат располагался на расстоянии $r_2 = 36$ м от дерева, представленного на ней. При этом высота дерева составляла $h_2 = 12$ м. С использованием представленных данных оцените угловой масштаб каждой фотографии.

2. Оцените время выдержки при получении каждого фото.

3. Оцените широту местности на каждом фото.

4. Оцените расстояние между местами съемки по поверхности Земли.

5. На всех треках первого фото виден характерный надлом, обусловленный технической вибрацией камеры (автор непреднамеренно зацепил камеру и породил вибрации). В конце или в начале сеанса съемки эта вибрация произошла? Свой ответ поясните.

Решение. 1. Для оценки углового масштаба (μ_a) фотографии необходимо определить угловые размеры какого-либо примечательного объекта на фотографии. В качестве такого объекта на первом фото будем использовать центральное окно фронтальной части дома. Согласно условию задачи, в момент съемки используемый фотоаппарат располагался на расстоянии $r_1 = 10$ м, при этом его высота составляла $h_1 = 140$ см. Поскольку геометрический центр окна расположен почти на уровне забора, то можно полагать, что оптическая ось фотоаппарата была расположена в одной горизонтальной плоскости с данным центром. Следовательно угол (γ_1), под которым было видно окно с позиции фотоаппарата, можно определить так

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2} = \frac{h_1}{2r_1}, \Rightarrow \gamma_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{h_1}{2r_1} = 8.0^\circ.$$

По фотографии высота окна, измеренная с помощью линейки, составляет $H_1 = 17$ мм. Следовательно, угловой масштаб первой фотографии есть (3.0 балла)

$$\mu_1 = \frac{\gamma_1}{H_1} = 0.47^\circ/\text{мм}. \quad (15)$$

Аналогично рассуждая, можно определить угол, под которым видно дерево с позиции съемки на втором фото:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma_2}{2} = \frac{h_2}{2r_2}, \Rightarrow \gamma_2 = 2 \operatorname{arctg} \frac{h_2}{2r_2} = 18.9^\circ.$$

Определяя с помощью линейки высоту дерева на фото $H_2 = 75$ мм, в результате получаем (3.0 балла)

$$\mu_2 = \frac{\gamma_2}{H_2} = 0.25^\circ/\text{мм}. \quad (16)$$



Рис. 3. Кольцевые звездные треки (автор – Григорьев К.).

Следует отметить, что при использовании фотографии с иными линейными размерами, нежели у автора, результаты для μ_1, μ_2 будут отличаться от представленных выше.

2. Выберем на первом фото какой-либо яркий трек, расположенный в относительной близости к северному полюсу мира, восстановим на него из данного полюса перпендикуляр, основание которого должно попадать приблизительно на его середину (критерий удачного выбора трека). Определим длину перпендикуляра ($P_1 = 55$ мм) и длину самого трека $L_1 = 5$ мм. С использованием масштаба фотографии μ_1 можно определить полярное расстояние звезды и угловой размер трека:

$$p_1 = \mu_1 \cdot P_1 = 25.9^\circ, \quad \ell_1 = \mu_1 \cdot L_1 = 2.35^\circ.$$



Рис. 4. Линейчатые звездные треки (автор – Шамин Д.).

С другой стороны, длину дуги трека можно также представить в виде (2.0 балла):

$$\ell_1 = \omega_{\oplus} \tau_1 \sin p_1, \Rightarrow \tau_1 = \frac{\ell_1}{\omega_{\oplus} \sin p_1} = 21.5 \text{ мин}, \quad (17)$$

здесь ω_{\oplus} – угловая скорость вращения Земли, τ_1 – время выдержки при получении первого фото (2.0 балла).

Для определения выдержки на втором фото необходимо выбрать наиболее яркий прямой трек в его правом верхнем углу и определить его длину $L_2 = 70$ мм. Тогда его длину можно записать еще так (2.0 балла)

$$\ell_2 = \mu_2 \cdot L_2 = \omega_{\oplus} \tau_2, \Rightarrow \tau_2 = \frac{\mu_2 \cdot L_2}{\omega_{\oplus}} = 70.6 \text{ мин}. \quad (18)$$

3. Для определение географической широты места съемки на первом фото воспользуемся теоремой о связи географических и небесных координат, которая утверждает, что астрономическая широта места наблюдения равна высоте полюса мира над горизонтом. Следовательно

необходимо определить высоту полюса мира. Для этого вдоль верхней кромки забора проведем прямую линию. Из геометрического центра всех звездных треков, совпадающих с Полярной звездой (видна как точка на фото), опустим перпендикуляр на построенную прямую и определим его длину с помощью линейки – $L_1 = 125$ мм. Тогда высота полюса мира на первом фото есть (3.0 балла)

$$h_{PN} = \mu_1 \cdot L_1 = 58.75^\circ = \varphi_1. \quad (19)$$

Определение географической широты места съемки на втором фото с использованием представленной выше методики и теоремы затруднительно, поскольку на фото запечатлена область небосвода, удаленная от Северного полюса мира. Для решения данного вопроса воспользуемся следующей методикой: в правом верхнем углу фотографии выберем наиболее прямой длинный трек. Очевидно последний должен быть расположен вблизи небесного экватора, ибо его радиус кривизны наибольший среди суточных параллелей. С используем линейки построим линию, параллельную видимому горизонту, представленному на фотографии и пересекающую данный трек. С использованием транспортира определим угол $\beta = 20^\circ$ между данным треком (по сути небесным экватором) и построенной линией (по сути математическим горизонтом). Как известно угол между плоскостью экватора и математическим горизонтом равен $90^\circ - \varphi_2$, следовательно получаем уравнение вида (3.0 балла):

$$\beta = 90^\circ - \varphi_2, \Rightarrow \varphi_2 = 90^\circ - \beta = 70^\circ. \quad (20)$$

4. Оценим расстояние между местами съемки, с учетом того факта, что они находятся на одном географическом меридиане. Тогда искомое расстояние ℓ по поверхности Земли представляет собой дугу меридиана, лежащую напротив угла $\varphi_2 - \varphi_1$. Составим пропорцию (3.0 балла)

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell \rightarrow (\varphi_2 - \varphi_1), \\ 2\pi R_{\oplus} \rightarrow 360^\circ \end{array} \right\}, \Rightarrow \ell = 2\pi R_{\oplus} \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{360^\circ} = 1250 \text{ км}. \quad (21)$$

5. Поскольку относительно Северного полюса мира все небесные тела совершают свое суточное движение против часовой стрелки, то надлом треков (обусловленный вибрацией камеры), очевидно, произошел в начале сеанса съемки.

Ответ: к задаче представлен выражениями (15)-(21).

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Представлена правильная последовательная методика определения угловых масштабов на 1-ом и 2-ом фото (численные значения могут отличаться от авторских, поэтому здесь оценивается лишь сама методика определения параметра μ)	3+3(6)
Выполнена корректная оценка времени выдержки на 1-ом + 2-ом фото (допускается погрешность ± 3 мин, за каждую последующую минуту отклонения – минус 1 балл)	2+2(4)
Выполнена корректная оценка широты местности на 1-ом + 2-ом фото (допускается погрешность $\pm 3^\circ$, за каждый последующий 1° отклонения – минус 1 балл)	3+3(6)
Получено оценочное значение расстояния между местами съемки (допускается погрешность ± 300 км, за каждые последующие 100 км отклонения – минус 1 балл)	3
Правильно указан момент сеанса съемки, соответствующий надлому треков	1

На решение задач данного этапа Олимпиады участникам отводится 4 часа.

Основные справочные данные

§1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Световой год – $1 \text{ св. г.} = 9.461 \cdot 10^{15} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 70.0 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

§2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая визуальная звездная величина – -26.74^m
- Видимая болометрическая звездная величина – -26.80^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Интегральный поток энергии на расстоянии Земли – 1360 Вт/м^2
- Поток энергии в видимых лучах на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

§3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$
- Экваториальный радиус – 6378.14 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Средний (по объему) радиус – 6371.01 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

§4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 363300 км
- Максимальное расстояние от Земли – 405500 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055

- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^{\circ}09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или $1/81.3$ массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

§5. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность г·см ⁻³	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты градусы	Геометрич. альbedo	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики градусы	Период обращения	Синодический период сут
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

§7. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбе-до	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§8. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.