

## Решения задач

### Открытой межрегиональной олимпиады по астрономии имени Ф.А. Бредихина

#### 10-11 класс

#### № 1. «Объекты глубокого космоса и их некоторые свойства»

**Условие.** На рис. 1 представлены фотографии пяти объектов глубокого космоса. Определите

- I. Тип каждого объекта;
- II. Созвездие, в котором находится объект;
- III. Время года, в которое условия наблюдений данного объекта являются оптимальными;
- IV. Статус возможности его наблюдения (в условиях, близких к идеальным) невооруженным глазом.

Заполните табл. 1 (Вы можете вырезать эту таблицу ножницами из условия и наклеить ее на свой бланк в целях экономии времени!). В строках (I)-(II) необходимо прописать буквенное обозначение данного объекта согласно рисунку. В строке (III) необходимо указать одно из времен года (весна, лето, осень, зима). В строке (IV) необходимо написать «да», если объект можно увидеть невооруженным глазом (в условиях, близких к идеальным), «нет» – если нельзя увидеть.

	Тип объекта	Рассеянное скопление	Туманность эмиссионная + область звездообразования	Шаровое скопление	Галактика	Планетарная туманность
I	Обозначение					
	Созвездие	Треугольник	Геркулес	Орион	Лиры	Персей
II	Обозначение					
	Обозначение	а)	б)	в)	г)	д)
III	Время года					
	Обозначение	а)	б)	в)	г)	д)
IV	Видимость невооруженным глазом					

Таблица 1. Возможные типы объектов, их принадлежность созвездиям и сезоны оптимальных наблюдений, возможность их наблюдения невооруженным глазом.

**Решение. 1.** На рис. 1.а) представлен образ спиральной галактики *Треугольника*, М33 (по каталогу Мессье) третьей по массе и размерам галактики в Местной группе, расположенной в созвездии Треугольника. Оптимальное время года для наблюдений – осень. Данную галактику можно увидеть невооруженным глазом на пределе возможностей глаза в условиях, близких к идеальным.

**2.** На рис. 1.б) представлено самое яркое шаровое скопление в северной полушарии небосвода – *большое скопление Геркулеса*, М13, расположенное в одноименном созвездии. Данный объект можно увидеть невооруженным глазом в условиях, близких к идеальным, на пределе его возможностей. Оптимальное время года для наблюдений – конец весны, начало лета.

**3.** На рис. 1.в) представлено одно из самых ярких и красивых рассеянных звездных скоплений – *двойное скопление Хи и Аш Персея*. Расположено скопление в созвездии Персея, оно отлично видно невооруженным глазом. Оптимальное время года для наблюдений – конец осени, начало зимы.

**4.** На рис. 1.г) представлена планетарная туманность «Кольцо». По каталогу Мессье эта туманность имеет код М57. Расположена в созвездии Лиры и не может быть видна невооруженным глазом. Оптимальное время года для наблюдений – лето.

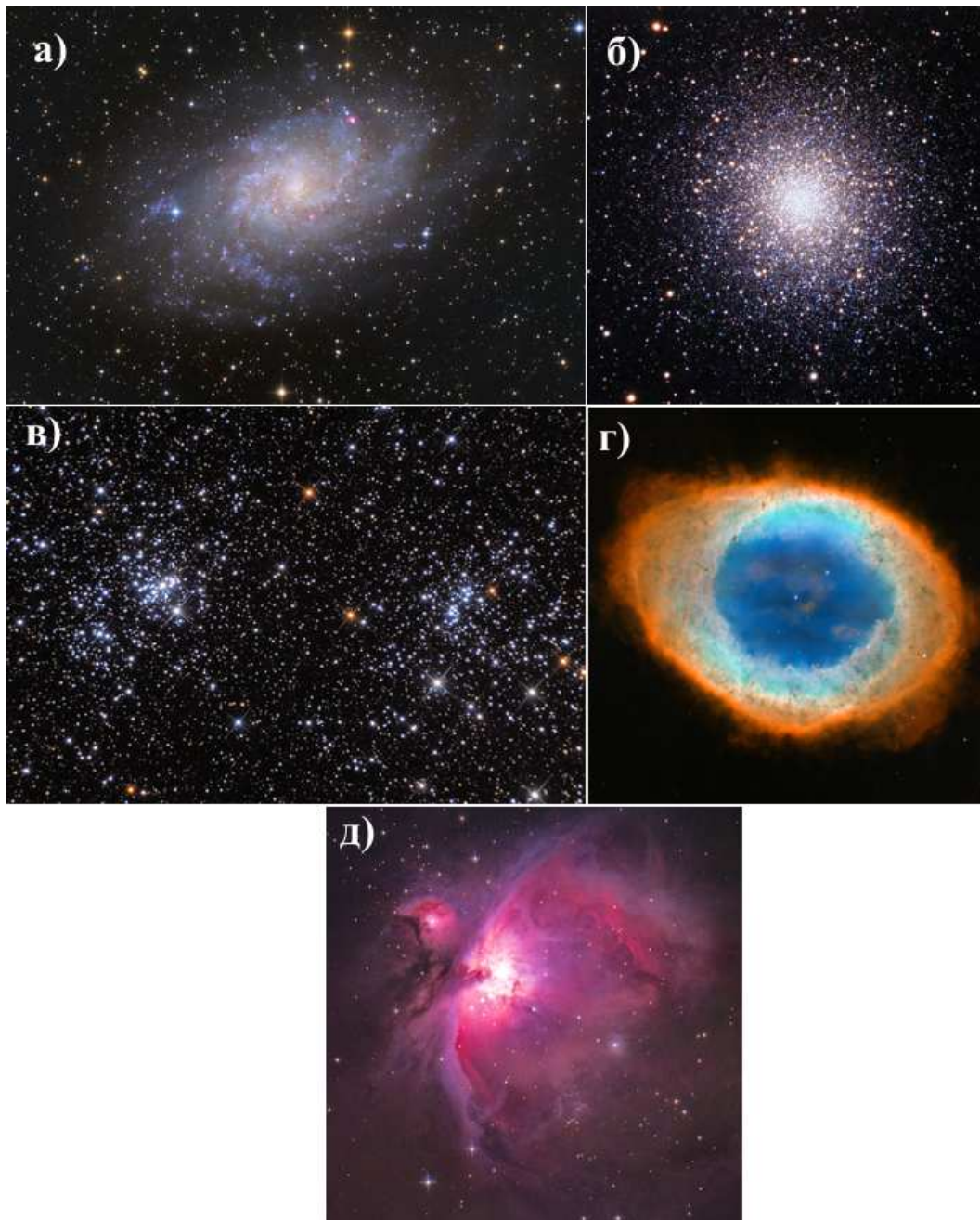


Рис. 1. Объекты глубокого космоса.

5. На рис. 1.д) представлена эмиссионная туманность и область звездообразования – *Большая туманность Ориона* (M42), расположенная в одноименном созвездии. Ее можно наблюдать невооруженным глазом. Оптимальное время года для наблюдений – зима.

В итоге табл. 1, заполненная ответами, представляется в виде табл. 2.

*Рекомендации для жюри.*

Выполненная часть решения задачи	Балл
За каждый правильно определенный тип объекта	1(5)
За каждое правильно определенное созвездие	1(5)
За каждое правильно определенное время года оптимальных наблюдений объекта (в случае пары сезонов, достаточно указать лишь одно время года)	1(5)
За каждый правильно определенный статус видимости объекта	1(5)

**№ 2. «Есть точки на поверхности Земли...»**

Условие. 1. Чему равны значения географической широты точек поверхности Земли, линейное расстояние от которых до плоскости ее орбиты, такое же как и расстояние от северного (или южного) географического полюса до той же плоскости? Чему равно это расстояние в км?

	Тип объекта	Рассеянное скопление	Туманность эмиссионная + область звездообразования	Шаровое скопление	Галактика	Планетарная туманность
<b>I</b>	Обозначение	в)	д)	б)	а)	г)
	Созвездие	Треугольник	Геркулес	Орион	Лиры	Персей
<b>II</b>	Обозначение	а)	б)	д)	г)	в)
	Обозначение	а)	б)	в)	г)	д)
<b>III</b>	Время года	осень	весна-лето	осень-зима	лето	зима
	Обозначение	а)	б)	в)	г)	д)
<b>IV</b>	Видимость невооруженным глазом	Да	Да	Да	Нет	Да

Таблица 2. Возможные типы объектов, их принадлежность созвездиям и сезоны оптимальных наблюдений, возможность их наблюдения невооруженным глазом (с ответами).

2. Что именно можно наблюдать в истинную полночь из данной точки (северного полушария!) поверхности Земли в день летнего солнцестояния: сумерки (гражданские, навигационные, астрономические) или астрономическую ночь? Свой ответ поясните.

3. Оцените продолжительность этих видов сумерек (или астрономической ночи) в эти сутки.

4. Во сколько раз отличаются максимальный поток солнечного излучения, падающего в истинный полдень на единичную площадку поверхности Земли на данной широте от минимального в течение года?

Атмосферным поглощением света и его рефракцией, а также влиянием Луны на орбитальное движение Земли пренебречь. Землю считать шаром, ее орбиту – окружностью.

**Решение. 1.** Рассмотрим рис. 2, на котором представлен земной шар. Здесь  $NS$  определяет ось вращения Земли,  $Q_1Q_2$  – плоскость земного экватора,  $O_1O_2$  – плоскость земной орбиты относительно Солнца,  $\Pi_N\Pi_S$  – ось орбиты Земли. Построим отрезок  $NS_2$ , параллельный плоскости орбиты Земли. Очевидно, искомой точкой в Северном географическом полушарии будет  $S_2$  (расстояние  $S_2P_2$  от нее до плоскости земной орбиты, равно расстоянию  $NP_1$  от северного географического полюса до той же плоскости).

В силу симметричного расположения точек  $N$  и  $S_2$  относительно прямой  $\Pi_N\Pi_S$ , приходим к заключению, что угол  $\Pi_N O S_2$  также равен  $\varepsilon = 23^\circ 26'$  – углу между плоскостью земного экватора и плоскостью земной орбиты. Следовательно искомая широта точки  $S_2$  будет равна

$$\varphi_2 = 90^\circ - 2\varepsilon = 43^\circ 08'.$$

Аналогично рассуждая в случае южного полушария для точки  $S_1$ , имеем широту  $\varphi_1 = -(90^\circ - 2\varepsilon) = -43^\circ 08'$ . Следовательно окончательно имеем  $\varphi_{1,2} = \pm 43^\circ 08'$ . Заметим, что точки расположенные выше и ниже указанных пограничных широт также удовлетворяют этому условию (в силу суточного вращения Земли), поэтому итоговый ответ представляется двумя отрезками:  $[-90^\circ, -43^\circ 08'] \cup [43^\circ 08', 90^\circ]$  (4 балла).

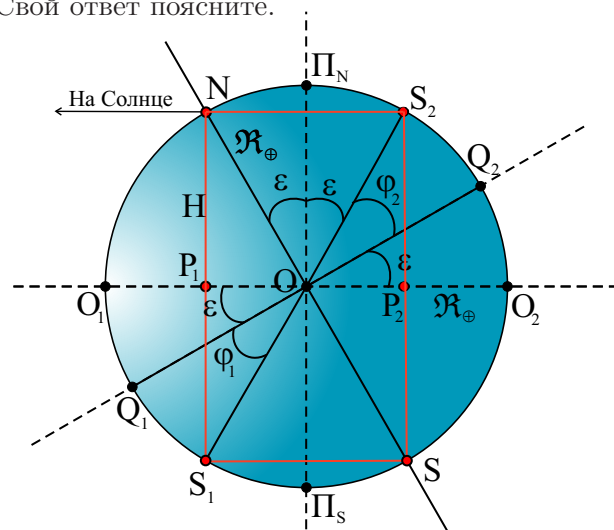


Рис. 2. К определению земного шара и положений искомых точек относительно плоскости земной орбиты.

Из прямоугольного треугольника  $ONP_1$  найдем искомое расстояние:

$$H = \mathfrak{R}_{\oplus} \sin(90^\circ - \varepsilon) = \mathfrak{R}_{\oplus} \cos \varepsilon = 5846 \text{ км.} \quad (1)$$

здесь  $\mathfrak{R}_{\oplus}$  – средний радиус Земли. (2 балла)

2. Далее рассмотрим лишь точки пограничной северной широты. Определим угловую высоту Солнца в истинную полночь в сутки летнего солнцестояния в точке  $S_2$  (2 балла):

$$h_{\min}^{(\odot)} = \varphi_2 + \varepsilon - 90^\circ = -\varepsilon = -23^\circ 26' < -18^\circ.$$

Поскольку высота Солнца в нижней кульминации в точке  $S_2$  меньше  $-18^\circ$ , значит в данной точке будет наблюдаться астрономическая ночь. (2 балла)

3. Получим оценку продолжительности астрономической ночи в данной точке. Для этого рассмотрим параллактический треугольник  $\Delta_S P_N Z C$  (см. рис. 3). Для него справедливы формулы синусов, косинусов и пяти элементов в виде:

$$\left. \begin{array}{l} a) \sin z \sin A = \cos \delta \sin t, \\ b) \cos z = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t, \\ c) \sin z \cos A = -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t \end{array} \right\}. \quad (2)$$

Из формулы b) последнего набора следует, что (3 балла)

$$\cos t_{\odot} = \frac{\cos z - \sin \delta_{\odot} \sin \varphi_2}{\cos \delta_{\odot} \cos \varphi_2} = -0.8676, \Rightarrow \quad (3)$$

$$\Rightarrow t_{\odot 1} = 150.2^\circ = 10^{\text{h}} 01^{\text{m}}, \quad t_{\odot 2} = 209.8^\circ = 13^{\text{h}} 59^{\text{m}}, \quad (4)$$

здесь учтено,  $z = 108^\circ$ ,  $\delta_{\odot} = \varepsilon = 23^\circ 26'$ , поскольку астрономическая ночь начинаются (заканчиваются), когда высота истинного Солнца, относительно горизонта, равна  $h_{\odot} = -18^\circ$ , и это происходит в ночь летнего солнцестояния. Следовательно, продолжительность астрономической ночи в точке  $S_2$  составит  $\tau_{\text{Night}} = t_{\odot 2} - t_{\odot 1} = 3^{\text{h}} 58^{\text{m}}$ . (2 балла)

4. Согласно определению, **энергетическим потоком** называется скалярная физическая величина, равная произведению интенсивности электромагнитного излучения (в нашем случае солнечной постоянной,  $f_{\odot}$ ), падающего на площадку  $S$ , на величину этой площадки и на косинус угла  $\alpha$  между направлением распространения электромагнитного излучения и нормалью к этой площадке:

$$\Phi_E = f_{\odot} \cdot S \cos \alpha.$$

В нашем случае угол  $\alpha$  равен углу между отвесной линией и падающими солнечными лучами, т.е. зенитному расстоянию ( $z_{\odot}$ ) Солнца. Представим последний результат через высоту ( $h_{\odot}$ ) Солнца с учетом  $z_{\odot} = 90^\circ - h_{\odot}$  (2 балла):

$$\Phi_E = f_{\odot} \cdot S \sin h_{\odot}.$$

Поскольку орбита Земли круговая, то солнечная постоянная не меняется с течением времени как и площадь г. Самары. Следовательно поток зависит лишь от угловой высоты Солнца над горизонтом. Поскольку синус монотонно возрастающая функция с увеличением аргумента, следовательно

$$\xi = \frac{\Phi_{\max}}{\Phi_{\min}} = \frac{\sin h_{\odot}^{(\max)}}{\sin h_{\odot}^{(\min)}}. \quad (5)$$

В день летнего солнцестояния высота солнца в полдень достигает максимального значения, а в день зимнего солнцестояния – минимального значения. Данные величины представляются в виде (2 балла):

$$h_{\odot}^{(\max)} = 90^\circ - \varphi_2 + \varepsilon = 70^\circ 18', \quad h_{\odot}^{(\min)} = 90^\circ - \varphi_2 - \varepsilon = 23^\circ 26'.$$

Следовательно, искомая величина  $\xi = 2.37$  (1 балл).

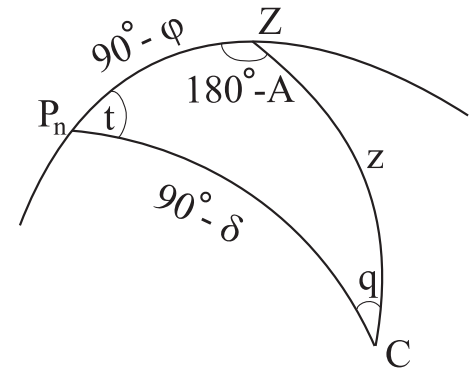


Рис. 3. к определению параллактического треугольника.

**Ответ:**  $[-90^\circ, -43^\circ 08'] \cup [43^\circ 08', 90^\circ]$ , (1); астрономическая ночь,  $\tau_{\text{Night}} = 3^{\text{h}}58^{\text{m}}$ ;  $\xi = 2.37$ .

**Рекомендации для жюри.**

Выполненная часть решения задачи	Балл
Корректное определение искомым интервалов широт точек поверхности + расстояния от точки до плоскости орбиты	2*2+2(6)
Математическое обоснование наблюдения в точки $S_2$ астрономической ночи в сутки летнего солнцестояния	4
Корректная оценка продолжительности астрономической ночи в данном месте	5
Правильный расчет величины $\xi$	5

### Задача № 3. «Планета- "бродяга" и ее будущее»

**Условие.** Планета- "бродяга" – это планета, преодолевшая гравитационное притяжение материнской звезды и ушедшая в межзвездное пространство. Причиной выхода из планетарной системы, как правило, служит гравитационный маневр, совершаемый близко расположенной планетой-гигантом, подобной Юпитеру. В 2011 году исследования ученых показали, что на данных планетах могут быть условия, пригодные для существования жизни. Как показывают исследования, температура поверхности этих планет является низкой и составляет около  $T_s = 30$  К, при этом температура в центре такой планеты может достигать значений  $T_c = 10^4$  К. Основным источником энергии в теле таких планет являются реакции радиоактивного распада. Будем представлять планету однородным шаром радиуса  $R$ , с равномерным распределением радиоактивного вещества по всему ее объему. Атмосфера у планеты отсутствует, и последняя непрерывно излучает энергию в межзвездное пространство. Период полураспада радиоактивных элементов составляет  $\tau_{1/2} = 3.387 \cdot 10^8$  лет. Полагая, что поверхность планеты излучает подобно абсолютно черному телу, а поток тепловой энергии внутри данного тела пропорционален радиальному перепаду температуры  $\Delta T/\Delta r$ , определите:

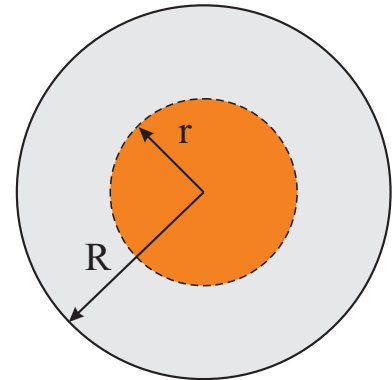


Рис. 4. К определению искомым величин.

1. Настоящую температуру (в кельвинах) в точке планеты, отстоящей от ее центра на  $r = R/2$ ;
2. Температуру (в кельвинах) на поверхности планеты ( $T'_s$ ) через 4.5 млрд лет;
3. Температуру (в кельвинах) в центре планеты ( $T'_c$ ) через 4.5 млрд лет.

Изменением размеров планеты в течение 4.5 млрд лет пренебречь.

**Решение. 1.** Рассмотрим тепловой поток внутри планеты через сферу радиусом  $r < R$  (см. рис. 4) (2 балла):

$$\left( \frac{\Delta Q}{\Delta \tau} \right)_r = \kappa 4\pi r^2 \left| \frac{\Delta T}{\Delta r} \right|, \quad (6)$$

где  $\kappa$  – коэффициент, характеризующий теплопроводимость планеты. Поскольку охлаждение планеты происходит очень медленно, будем считать, что в каждый момент времени любой малой объем планеты находится в состоянии теплового равновесия.

Согласно условию задачи, поверхность планеты излучает подобно абсолютно черному телу, тогда тепловой поток через эту поверхность будет (2 балла):

$$\left( \frac{\Delta Q}{\Delta \tau} \right)_R = 4\pi R^2 \sigma T_s^4, \quad (7)$$

где  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана. Через сферу радиуса  $r$  в единицу времени проходит такое количество энергии, которое выделяется внутри нее, а через поверхность планеты – энергия, генерируемая внутри всей планеты. Поскольку радиоактивные элементы распределены равно-

мерно по всему объему планеты, то (2 балла)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta \tau}\right)_r &\sim \frac{4\pi}{3}r^3, \quad \left(\frac{\Delta Q}{\Delta \tau}\right)_R \sim \frac{4\pi}{3}R^3, \Rightarrow \\ \left(\frac{\Delta Q}{\Delta \tau}\right)_r &= \frac{r^3}{R^3} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta \tau}\right)_R, \Rightarrow 4\pi R^2 \sigma T_s^4 \frac{r^3}{R^3} = \kappa 4\pi r^2 \left|\frac{\Delta T}{\Delta r}\right|. \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует (2 балла):

$$\left|\frac{\Delta T}{\Delta r}\right| = \frac{\sigma T_s^4 r}{\kappa R}, \Rightarrow \frac{\Delta T}{\Delta r} = -\frac{\sigma T_s^4 r}{\kappa R}. \quad (8)$$

Далее одним из двух альтернативных методов (либо непосредственным интегрированием дифференциального аналога уравнения (8) или методом малых приращений для линейной функции) можно получить уравнение вида (2 балла):

$$T(r) - T_s = \frac{\sigma T_s^4}{2\kappa R}(R^2 - r^2). \quad (9)$$

Поскольку  $T(0) = T_c$ , последнее выражение можно привести к виду (2 балла):

$$\frac{T(r) - T_s}{T_c - T_s} = \frac{R^2 - r^2}{R^2}, \Rightarrow T(r) = T_s + (T_c - T_s) \left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]. \quad (10)$$

Из последнего результата вытекает (2 балла):

$$T(R/2) = \frac{3}{4}T_c + \frac{1}{4}T_s \approx 7.5 \cdot 10^3 \text{ К}. \quad (11)$$

2. За время  $t_0 = 4.5 \cdot 10^9$  лет количество радиоактивных ядер в теле планеты уменьшится в (2 балла)

$$k = \frac{N_0}{N(t_0)} = 2^{(t_0/\tau_{1/2})} = 9989 \approx 10^4 \text{ раз}. \quad (12)$$

Это означает, что количество источников энергии и, следовательно, выделяемая ими энергия также уменьшится в  $k$  раз. Вся эта энергия излучается с поверхности планеты и, так как мощность излучения пропорциональна  $T^4$ , температура поверхности за 4.5 млрд. лет уменьшится в 10 раз, т.е.  $T'_s = 3 \text{ К}$  (2 балла).

3. Найдем температуру в центре планеты через  $t_0 = 4.5 \cdot 10^9$  лет. Очевидно, при  $r = 0$  из выражения (9) получаем (2 балла):

$$(T_c - T_s) = \frac{\sigma R}{2\kappa} T_s^4, \quad (T'_c - T'_s) = \frac{\sigma R}{2\kappa} T_s'^4, \Rightarrow$$

$$\frac{T'_c - T'_s}{T_c - T_s} = \left(\frac{T'_s}{T_s}\right)^4 = \frac{1}{k}, \Rightarrow T'_c = T'_s + \frac{1}{k}(T_c - T_s) \approx 4 \text{ К}. \quad (13)$$

Т.о., за время  $t_0$  в теле планеты фактически установится глобальное тепловое равновесие с окружающей межзвездной средой (температура последней составляет  $\approx 2.7 \text{ К}$ ).

**Ответ:** к задаче представляется выражениями (11), (13);  $T'_s = 3 \text{ К}$ .

**Рекомендации для жюри.**

Выполненная часть решения задачи	Балл
Корректное определение потоков теплового излучения внутри и на поверхности планеты	2 + 2
Построение уравнения для радиального перепада температуры	4
Построение общего решения последнего уравнения + представление его в терминах известных величин	2+2
Расчет настоящей температуры в точке планеты, отстоящей от ее центра на $r = R/2$	2
Корректная оценка уменьшения кол-ва радиоактивных ядер и потока на поверхности планеты через 4.5 млрд лет	2
Корректный расчет температуры поверхности планеты + в ее центре через 4.5 млрд лет	2 + 2

## № 4. «Самая далекая галактика HD1»

**Условие.** В апреле 2022 года широкой огласке была представлена новость об открытии уникальной далекой галактики HD1. Согласно данным исследований, спектральное смещение этой галактики достигает рекордного значения  $z = 13.27$ !

1. С использованием формулы (14) для релятивистского эффекта Доплера получите формулу для лучевой скорости удаления галактики HD1, обусловленного расширением Вселенной, как функцию спектрального смещения ( $z$ ). Вычислите лучевую скорость HD1 (в км/с). Какую долю она составляет от скорости света?

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c \cos \theta}, \quad (14)$$

где  $\nu, \nu_0$  – частоты излучения в системах отсчета, связанных с приемником и источником излучения соответственно;  $v$  – скорость источника, в системе отсчета приемника излучения;  $\theta$  – угол между вектором скорости источника (определенной в системе отсчета приемника) и направлением на приемник.

2. Оцените расстояние до галактики в парсеках (пк). Образ галактики какой давности ученые сегодня наблюдают?

3. Оцените какое количество лет спустя после Большого взрыва галактика была такой, какой сегодня ее наблюдают земные астрономы.

4. Данная галактика излучает в основном в УФ-части спектра. При этом абсолютная звездная величина галактики в данном свете равна  $M_{UV} = -22.1^m$ . Оцените а) светимость данной галактики (в светимостях Солнца); б) долю от первоначальной массы галактики (на момент наблюдения), которую она потеряла (лишь за счет электромагнитного излучения) к настоящему моменту, если полагать, что данный параметр составляет  $10^{12} M_{\odot}$  ( $M_{\odot}$  – масса Солнца), а светимость галактики – постоянная величина.

**Решение. 1.** Согласно определению, спектральным смещением линии в спектре галактики называется величина (2 балла):

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}, \Rightarrow \lambda = \lambda_0(1 + z),$$

где  $\lambda$  – длина волны, принимаемой приемником излучения на Земле,  $\lambda_0$  – длина волны, испускаемая источником в его системе покоя.

Учтем, что длина волны связана с частотой в вакууме выражением вида (2 балла):

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \Rightarrow \nu_0 = \nu(1 + z).$$

Поскольку все далекие объекты Вселенной удаляются от Земли, что обусловлено расширением Вселенной, то угол  $\theta = 180^\circ$  (2 балла) в (14). Тогда формулу эффекта Доплера можно записать так (2 балла)

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}, \Rightarrow (1 + z)^2 = \frac{1 + v/c}{1 - v/c}, \Rightarrow v = c \left( \frac{(1 + z)^2 - 1}{(1 + z)^2 + 1} \right). \quad (15)$$

Численный расчет указанного параметра дает значение  $v = 0.990c = 296870$  км/с (2 балла); данная скорость составляет долю  $\beta = v/c = 0.990$  от скорости света или 99%! (1 балл)

2. Оценим расстояние до галактики с использованием закона Хаббла (2 балла):

$$v = H r, \Rightarrow r = \frac{v}{H} = 4241 \text{ Мпк} = 13.825 \text{ млрд св. лет}, \quad (16)$$

здесь  $H$  – постоянная Хаббла. Из последнего результата следует, что ученые наблюдают галактику такой, какой она была  $t_0 = 13.825$  млрд лет назад (1 балл).

Следует отметить, что данный результат получился немного завышенным (точные расчеты в рамках выбранной авторами космологической модели дают значение 13.5 млрд. лет, что соответствует отклонению нашего результата относительно точного в 2.4%) Причина расхождения в

том, что закон Хаббла в используемом здесь виде строго говоря не применим (из-за непостоянства константы Хаббла на больших масштабах), и должен быть заменен на выражение:

$$r = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')},$$

здесь  $H(z')$  – зависимость постоянной Хаббла от спектрального смещения; последняя функция является модельно зависимой и потому расстояние зависит от выбора используемой модели. Поскольку в условии задачи ничего не сказано об использовании какой либо космологической модели, то далее будем пренебрегать "космологическими поправками".

3. Как известно, возраст Вселенной можно определить как величину, обратную постоянной Хаббла (2 балла):

$$\tau_0 = \frac{1}{H} = 13.969 \text{ млрд лет.}$$

Очевидно, астрономы видят галактику такой, какой она уже была спустя лишь  $\Delta t = \tau_0 - t_0 = 144$  млн лет спустя после Большого взрыва (точные расчеты дают величину 330 млн. лет) (1 балл).

4. Определим светимость данной галактики (1 балл):

$$L_G = L_{\odot} 10^{-0.4(M_{UV} - M_{\odot})} = 5.92 \cdot 10^{10} L_{\odot}. \quad (17)$$

5. Оценим долю от первоначальной массы галактики, которая она потеряла за счет излучения к настоящему моменту (2 балла):

$$\eta = \frac{L_G \cdot t_0}{10^{12} \cdot M_{\odot} \cdot c^2} = 5.53 \cdot 10^{-5}. \quad (18)$$

**Ответ:** к задаче представлен выражениями (15)-(18);  $t_0 = 13.825$  млрд лет;  $\Delta t = 144$  млн лет.

#### Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Представлен вывод формулы для лучевой скорости удаления галактики, как функции спектрального смещения + найдено численное значение + определена ее доля от скорости света	8+2+1
Оценка расстояния до галактики + возраст видимого образа галактики (отсчитываемого от настоящего момента)	2 + 1
Оценка возраста галактики, отсчитываемого от момента Большого взрыва	2 + 1
Расчет светимости галактики + и доли массовых потерь	1 + 2

#### № 5. «Поток высокоэнергетических протонов»

**Условие.** Астрофизики (специалисты по космическим лучам) зафиксировали поток протонов с колоссальной энергией, равной  $10^{20}$  эВ. Согласно их предположению, источником протонов может быть релятивистский джет (выброс) материи из активного ядра галактики, красное смещение которой  $z = 0.05$ . Последняя находится на угловом расстоянии  $\alpha = 5^\circ$  на небесной сфере от «радианта» приходящего пучка протонов. Оцените:

1. Величину индукции ( $B$ ) магнитного поля, перпендикулярная составляющая которой ( $B_{\perp}$ ) к начальной скорости движения данных частиц может быть причиной их отклонения от первоначального движения. Следует полагать, что параллельная составляющая ( $B_{\parallel}$ ) индукции межгалактического магнитного поля к направлению начальной скорости равна  $B_{\perp}$ . Следует полагать межгалактическое магнитное поле однородным.

2. Докажите математически, что траектория движения протона из пучка в межгалактическом пространстве есть окружность. Оцените радиус этой окружности.

3. Оцените угол  $\gamma$  между направлением джета материи в пространстве и направлением на Землю.



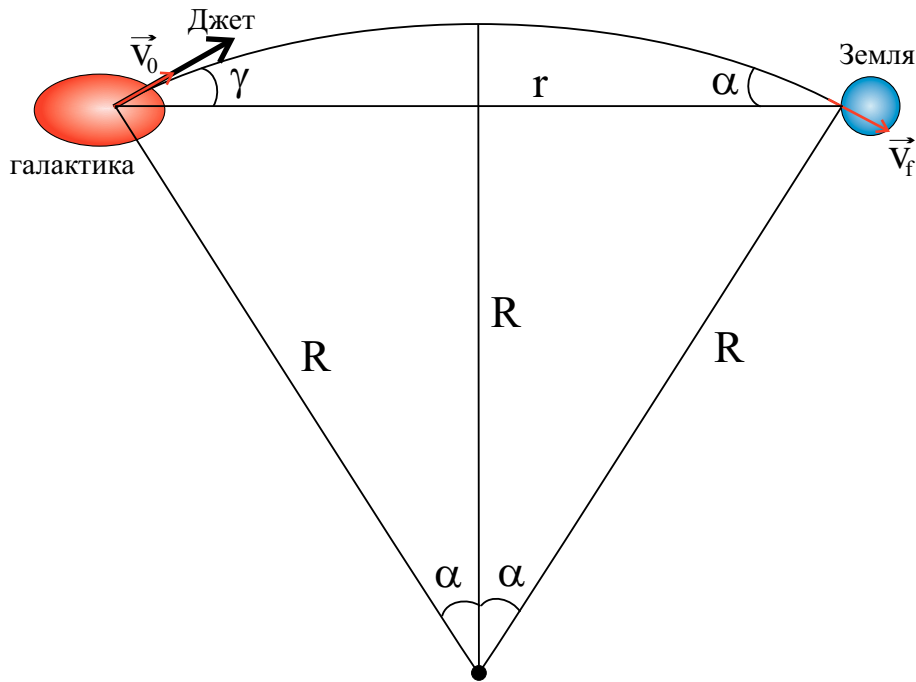


Рис. 5. К определению траектории движения протона и радиуса ее кривизны.

**Решение. 1.** Как известно, энергия покоя протона составляет

$$m_p c^2 = 1.5 \cdot 10^{-10} \text{ Дж} = 9.40 \cdot 10^8 \text{ эВ} \ll E_p = 10^{20} \text{ эВ},$$

значит протоны в пучке являются *ультррелятивистскими частицами*, значит второй закон Ньютона для данной частицы непосредственно применить нельзя! (1 балл)

**2.** Очевидно, заряженная частица двигалась в межгалактическом пространстве, заполненном магнитным полем, лишь под действием силы Лоренца ( $\vec{F}_L$ ). Последняя, как известно, всегда перпендикулярна вектору скорости частицы ( $\vec{v}$ ). Согласно определению понятия работы, сила Лоренца не совершает работы и не может изменить полную энергию частицы. Значит величина импульса и скорости частицы будут постоянными по модулю, но будут изменяться по направлению (2 балл). Далее покажем, что траектория движения релятивистского протона есть окружность. Воспользуемся законом изменения импульса для протона в дифференциальной форме (1 балл):

$$d\vec{p} = \vec{F}_L dt,$$

здесь  $\vec{p}$  – релятивистский импульс протона, определяемый выражением (1 балл):

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m \vec{v}, \quad \text{где } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Очевидно, что величина  $m$  при данной постоянной околосветовой скорости протона также постоянная величина, значит дифференциал импульса можно записать так  $d\vec{p} = m d\vec{v}$ . Следовательно данный закон можно представить в виде (2 балла):

$$\vec{F}_L = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}_c. \quad (19)$$

Очевидно, последняя величина есть центростремительное ускорение, которое обусловлено лишь изменением направления вектора скорости протона в пространстве и направлено перпендикулярно последнему. Т.о., данный закон формально сводится к второму закону Ньютона для частицы, движущейся по окружности, в котором масса покоя протона  $m_0$  заменена на «релятивистскую» массу  $m$ . Значит траектория данной частицы будет *окружность* (2 балла).

**3.** Далее учтем, что полную энергию релятивистской частицы можно представить так (1 балл)

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \Rightarrow \quad m = \frac{E}{c^2}.$$

Центростремительное ускорение и силу Лоренца при  $v \approx c$  можно записать так (1 балл)

$$a_c = \frac{v^2}{R} \approx \frac{c^2}{R}, \quad F_L = q_p v B_{\perp} \approx q_p c B_{\perp}.$$

Тогда закон изменения импульса частицы можно записать так (1 балл):

$$\frac{E c^2}{c^2 R} = q_p c B_{\perp}, \quad \Rightarrow \quad R = \frac{E}{q_p c B_{\perp}}. \quad (20)$$

С другой стороны, из рис. 5 очевидно, что (1 балл)

$$2R \sin \alpha = r, \quad (21)$$

здесь  $r$  – расстояние от галактики до Земли, которое можно определить с использованием закона Хаббла (2 балла):

$$r = \frac{v_G}{H} = \frac{c \cdot z}{H}. \quad (22)$$

При записи последнего был использован нерелятивистский эффект Доплера  $v = c \cdot z$ . С использованием результатов (20) и (21) можем записать уравнение вида (2 балла):

$$\frac{E}{q_p c B_{\perp}} = \frac{c \cdot z}{2H \sin \alpha}, \quad \Rightarrow \quad B_{\perp} = \frac{2EH \sin \alpha}{q_p z c^2} = 8.8 \cdot 10^{-15} \text{ Тл}. \quad (23)$$

Следовательно, величина вектора магнитной индукции межгалактического магнитного поля есть (1 балл)

$$B = \sqrt{B_{\perp}^2 + B_{\parallel}^2} = \sqrt{2} B_{\perp} = 1.2 \cdot 10^{-14} \text{ Тл}. \quad (24)$$

4. Радиус кривизны траектории протона составляет величину (1 балл):

$$R = \frac{c \cdot z}{2H \sin \alpha} = 1229 \text{ Мпк}. \quad (25)$$

5. Из рисунка очевидно, что угол между направлением джета материи и направлением на Землю, в силу симметрии будет  $\gamma = \alpha = 5^\circ$  (1 балл).

**Ответ:** к задаче представляется выражениями (23)-(25), искомый угол равен  $\gamma = \alpha = 5^\circ$ .

**Рекомендации для жюри.**

Выполненная часть решения задачи	Балл
Обоснование невозможности прямого применения второго закона Ньютона для поиска ответов на поставленные вопросы	1
Обоснование неизменности скорости, импульса и полной энергии частицы при движении в межгалактическом пространстве	2
Приведение закона изменения импульса протона к классическому виду второго закона Ньютона + корректная интерпретация полученного ускорения	4
Обоснование окружности как типа траектории, по которой движется протон	2
Вывод итоговой формулы для магнитной индукции $B_{\perp}$ + полного поля $B$ с использованием предыдущих результатов, правильно построенного рисунка, геометрических уравнений, закона Хаббла и эффекта Доплера	8+1(9)
Оценка радиуса кривизны траектории протона	1
Определение угла $\gamma$	1

### № 6. «Возраст молодой Луны»

**Условие.** На рис. 6 представлена фотография молодой Луны, полученная в начале апреля этого года, где-то в РФ на широте  $\varphi = 50^\circ$ . Определите:

1. Максимально возможный угол элонгации Луны относительно истинного Солнца в момент съемки.



Рис. 6. Молодой месяц. Фотография получена в начале апреля 2022 года (автор – А. Красильников).

2. Максимально возможное значение "возраста" Луны (время, прошедшее от последнего новолуния в сутках).

3. С использованием полученного возраста, оцените фазу Луны на момент съемки.

Орбиту Луны считать круговой.

**Решение. 1.** Прежде всего на данном рисунке отметим положение горизонта (линия  $H_1H_2$ ) и соединим вершины серпа молодой Луны отрезком  $AB$  (см. рис. 8). Определим его середину – точку  $C$  и построим перпендикуляр к данному отрезку, проходящий через точку  $C$ . Найдем его пересечение с горизонтом – точку  $D$  и определим с помощью транспортира угол  $\beta$  между горизонтом и отрезком  $CD$  –  $\beta = 43^\circ$ . (3 балла)

2. Поскольку данная фотография была получена в начале апреля, то Солнце располагалось в момент съемки в окрестности точки весеннего равноденствия ( $\Upsilon$ ). При этом эклиптика образовывала с небесным экватором угол  $\varepsilon = 23^\circ 26'$  и расположена выше последнего слева от точки весны, см. рис. 7. В свою очередь небесный экватор с горизонтом в окрестности точки запада ( $W$ ) образует угол  $90^\circ - \varphi$ . Согласно рисунку, эклиптика с горизонтом должна образовывать угол (2 балла)

$$\gamma = 90^\circ - \varphi + \varepsilon = 63.5^\circ.$$

Поскольку угол  $\beta < \gamma$ , то Луна, очевидно, должна располагаться ниже эклиптики (1 балл). Причем дуга ее элонгации есть  $\ell = \overset{\frown}{SC}$ .

Угол  $\xi$  с вершиной в Солнце, образованный направлением на Луну и эклипстикой равен (2 балла)

$$\xi = \gamma - \beta = 20.5^\circ.$$

Сферический треугольник  $\Delta_S SCF$  можно считать плоским в силу относительной малости его сторон. Тогда можно легко определить дугу элонгации Луны  $\ell = CS$  как (2 балла)

$$\ell = \frac{CF}{\sin \xi}. \quad (26)$$

Очевидно, сторона  $CF$  не может превышать наклона орбиты Луны  $-i_{\zeta} = 5.15^{\circ}$ . Следовательно, максимально возможный угол элонгации Луны относительно истинного Солнца на момент съемки был (1 балл)

$$\ell_{\max} = \frac{i_{\zeta}}{\sin \xi} = 14.7^{\circ}. \quad (27)$$

3. Угловая скорость движения Луны относительно Солнца есть (2 балла)

$$\omega_{\zeta} = \frac{360^{\circ}}{S} = 12.2^{\circ}/\text{сут.}$$

Тогда максимально возможный "возраст" Луны будет (2 балла)

$$\tau_{\max} = \frac{\ell_{\max}}{\omega_{\zeta}} = 1.2 \text{ сут.} \quad (28)$$

4. Фазу Луны можно определить выражением вида (2 балла):

$$\Phi = \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi_{\zeta}),$$

здесь  $\varphi_{\zeta}$  – фазовый угол Луны. В силу близости положения Луны к новолунию (а также из-за малости радиуса орбиты Луны в сравнении с радиусом орбиты Земли), угол в треугольнике, в вершинах которого располагаются Солнце, Земля и Луна, при вершине, содержащей Солнце, крайне мал и потому им можно пренебречь. Тогда сумма позиционного и фазового углов в этом треугольнике, очевидно, будет равна  $180^{\circ}$ , т.е. (2 балла)

$$\ell_{\max} + \varphi_{\zeta} = 180^{\circ}, \Rightarrow \varphi_{\zeta} = 180^{\circ} - \ell_{\max} = 165.3^{\circ}.$$

В результате искомая фаза была  $\Phi = 0.016$  или 1.6%. Отметим, что фотография была получена 2.04.2022 года в момент когда фаза Луны была 1.5%. (1 балл).

**Замечание.** Непосредственное определение фазы тонкого серпа по фотографии сопряжена с существенно завышенной оценкой, поскольку из-за низкой поверхностной яркости требуется такая выдержка при получении фото, при которой в результате рассеяния лунного света в атмосфере Земли и оптическом тракте фотоаппарата происходит "расползание" светового образа серпа из-за частичной засветки "соседних" пикселей. Поэтому данная методика не эффективна при оценке величины малой фаз Луны, Меркурия и Венеры.

**Ответ:** к задаче представляется выражениями (27)-(28);  $\Phi = 0.016$ .

**Рекомендации для жюри.**

Выполненная часть решения задачи	Балл
Корректно определен угол $\beta$ (допускается погрешность $\pm 3^{\circ}$ , за каждый последующий $1^{\circ}$ отклонения – минус 1 балл)	3
Корректно определен угол $\gamma$ + положение Луны относительно эклиптики (допускается погрешность $\pm 1^{\circ}$ , за каждый последующий $1^{\circ}$ отклонения – минус 1 балл)	2+1(3)
Корректно определен угол $\xi$ + дуга элонгации Луны (допускается погрешность $\pm 4^{\circ}$ , за каждый последующий $1^{\circ}$ отклонения – минус 1 балл)	2+2(4)
Найдено максимальное значение угла элонгации Луны (допускается погрешность $\pm 4^{\circ}$ , за каждый последующий $1^{\circ}$ отклонения – минус 1 балл)	1

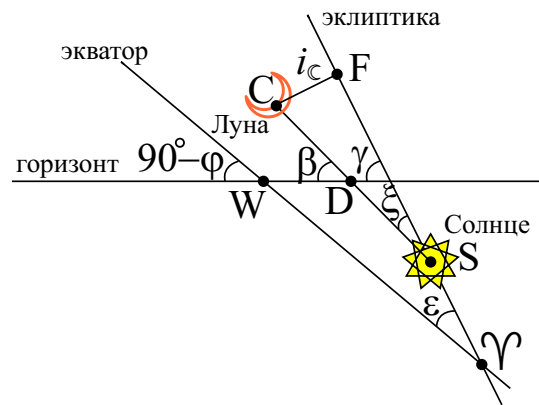
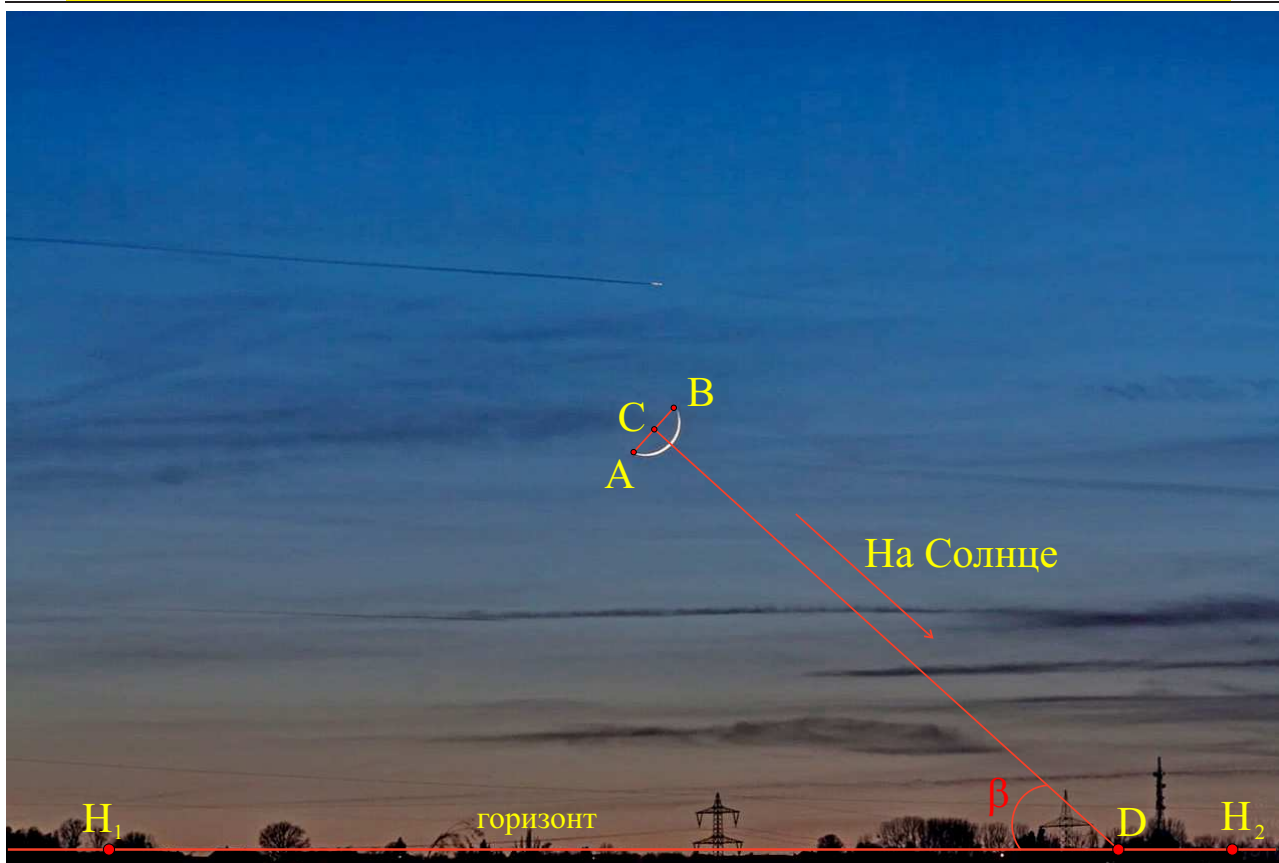


Рис. 7. К определению угла  $\ell$  наибольшей элонгации Луны.

Рис. 8. К определению угла  $\beta$ .

*Рекомендации для жюри (продолжение).*

Выполненная часть решения задачи	Балл
Вычислена угловая скорость движения Луны относительно Солнца + ее максимально возможный "возраст" (допускается погрешность $\pm 0.32$ сут, за каждый последующие 0.1 сут отклонения – минус 1 балл)	2+2(4)
Определена фаза Луны + ее фазовый угол + численное значение фазы (допускается погрешность $\pm 0.006$ для фазы, за каждый последующие 0.002 отклонения – минус 1 балл)	2+2+1(5)

*На решение задач данного этапа Олимпиады участникам отводится 4 часа.*

## Основные справочные данные

### §1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная –  $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме –  $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная –  $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана –  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Масса протона –  $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона –  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица –  $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек –  $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Световой год –  $1 \text{ св. г.} = 9.461 \cdot 10^{15} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла –  $H = 70.0 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

### §2. Данные о Солнце

- Радиус –  $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса –  $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость –  $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая визуальная звездная величина –  $-26.74^m$
- Видимая болометрическая звездная величина –  $-26.80^m$
- Абсолютная болометрическая звездная величина –  $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) –  $+0.67^m$
- Эффективная температура –  $5778 \text{ К}$
- Средний горизонтальный параллакс –  $8.794''$
- Интегральный поток энергии на расстоянии Земли –  $1360 \text{ Вт/м}^2$
- Поток энергии в видимых лучах на расстоянии Земли –  $600 \text{ Вт/м}^2$

### §3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты –  $0.017$
- Тропический год –  $365.24219 \text{ сут}$
- Средняя орбитальная скорость –  $29.8 \text{ км/с}$
- Период вращения –  $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 –  $23^\circ 26' 21.45''$
- Экваториальный радиус –  $6378.14 \text{ км}$
- Полярный радиус –  $6356.77 \text{ км}$
- Средний (по объему) радиус –  $6371.01 \text{ км}$
- Масса –  $5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
- Средняя плотность –  $5.52 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы –  $\text{N}_2$  (78%),  $\text{O}_2$  (21%),  $\text{Ar}$  ( $\sim 1\%$ )

### §4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли –  $384400 \text{ км}$
- Минимальное расстояние от Земли –  $363300 \text{ км}$
- Максимальное расстояние от Земли –  $405500 \text{ км}$
- Эксцентриситет орбиты –  $0.055$

- Наклон плоскости орбиты к эклиптике –  $5^{\circ}09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса –  $7.348 \cdot 10^{22}$  кг или  $1/81.3$  массы Земли
- Средняя плотность –  $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние –  $-12.7^m$

### §5. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность г·см <sup>-3</sup>	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты градусы	Геометрич. альbedo	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	$-26.8^m$
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	$-0.1$
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут <sup>†</sup>	177.36	0.65	$-4.4^m$
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	$-2.0^m$
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	$-2.7^m$
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	$0.4^m$
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час <sup>†</sup>	97.86	0.51	$5.7^m$
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	$7.8^m$

\* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

### §6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики градусы	Период обращения	Синодический период сут
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

## §7. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбе-до	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см <sup>-3</sup>	км	сут		
<b>Земля</b>							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
<b>Марс</b>							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
<b>Юпитер</b>							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
<b>Сатурн</b>							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
<b>Уран</b>							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
<b>Нептун</b>							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 <sup>†</sup>	0.7	13.5

\* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

## §8. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx;$$

здесь  $x \ll 1$ , все углы выражаются в радианах.