САМАРСКИЙ РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ДЛЯ ОДАРЕННЫХ ДЕТЕЙ
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ОТКРЫТОЙ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ им. Ф.А. БРЕДИХИНА

СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ.
СЕЗОН: 2021-2022, ТУР № 2

Самара, 2022 г.

Дорогие Друзья!

Вашему вниманию в данном релизе представлены 10 оригинальных задач двух уровней сложности – «Новичок» (уровень А), «Знаток» (уровень В). Задачи составлены в соответствии с ***Перечнем*** *вопросов, рекомендуемых Центральной предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады школьников по астрономии для подготовки обучающихся 10-11 классов к решению задач ее различных этапов.*

При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!

Ссылка: **«Условия и решения конкурсных задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2022 среди обучающихся 10-11 классов. Тур № 2».** – **https://sites.google.com/site/samrasolimp/**

Составитель: – ***Филиппов Юрий Петрович***, научный руководитель школы, методист СРЦОД, к.ф.-м.н., доцент кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева.

Верстка в системе LaTeX – Филиппов Ю.П., Белозерская Л.Н.

Памятка участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2022

1. ***Официальный сайт Астрошколы***:
https://sites.google.com/site/samrasolimp/

2. ***Официальная группа в VK***:
vk.com/bredikhinolimp

3. ***Сроки подачи решений задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2022 тура № 2 на проверку***:
15.02.2022-31.03.2022!!!

4. ***Электронный ящик ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2022:***
samrasolimp@mail.ru

5. ***Руководство зарегистрированного участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2022***:

https://sites.google.com/site/samrasolimp/maindocs
или
https://vk.com/bredikhinolimp

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Дорогие Друзья!
Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2022, внимательно ознакомьтесь с «Руководством зарегистрированного участника ОМОА им Ф.А. Бредихина-2022»! Электронный адрес последнего указан в Памятке участника.

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Метод годичного параллакса не работает?!»

В некоторый момент времени эклиптические долгота и широта Солнца были равны $\ell_\odot$, $\beta_\odot$ соответственно.

1. В какой точке небосвода (для земного наблюдателя) в этот момент находилось небесное тело (не принадлежащее Солнечной системе), чтобы до него невозможно было определить гелиоцентрическое расстояние методом годичного параллакса с использованием текущего значения последнего параметра? (2 балла)

2. Чему при этом были равны его эклиптические координаты? В какой конфигурации находилось это тело относительно земного наблюдателя и Солнца. Как часто повторяется такая "невозможность"? Собственным движением тела пренебречь. (2 балла)

Задача № 2. «Геостационарный спутник и его видимость в г. Самаре»

Дайте развернутые ответы на поставленные ниже вопросы:

1. Какая орбита искусственного спутника Земли (ИСЗ) называется геостационарной? В каких сферах деятельности востребованы геостационарные ИСЗ? (2 балла)

2. Вычислите радиус такой орбиты. (2 балла)

3. Чему равна скорость и центростремительное ускорение ИСЗ на данной орбите? (2 балла)

4. На каких географических широтах данный ИСЗ невозможно увидеть в принципе? (2 балла)

5. Какая часть поверхности Земли расположена в зоне покрытия радиосигналом большой группы геостационарных ИСЗ, равномерно распределенных по орбите? (2 балла)

6. Определите склонение Юпитера, если в некоторый момент геостационарный спутник испытал транзит по диску последнего, и при этом оба наблюдались в меридиане из г. Самары? (2 балла)

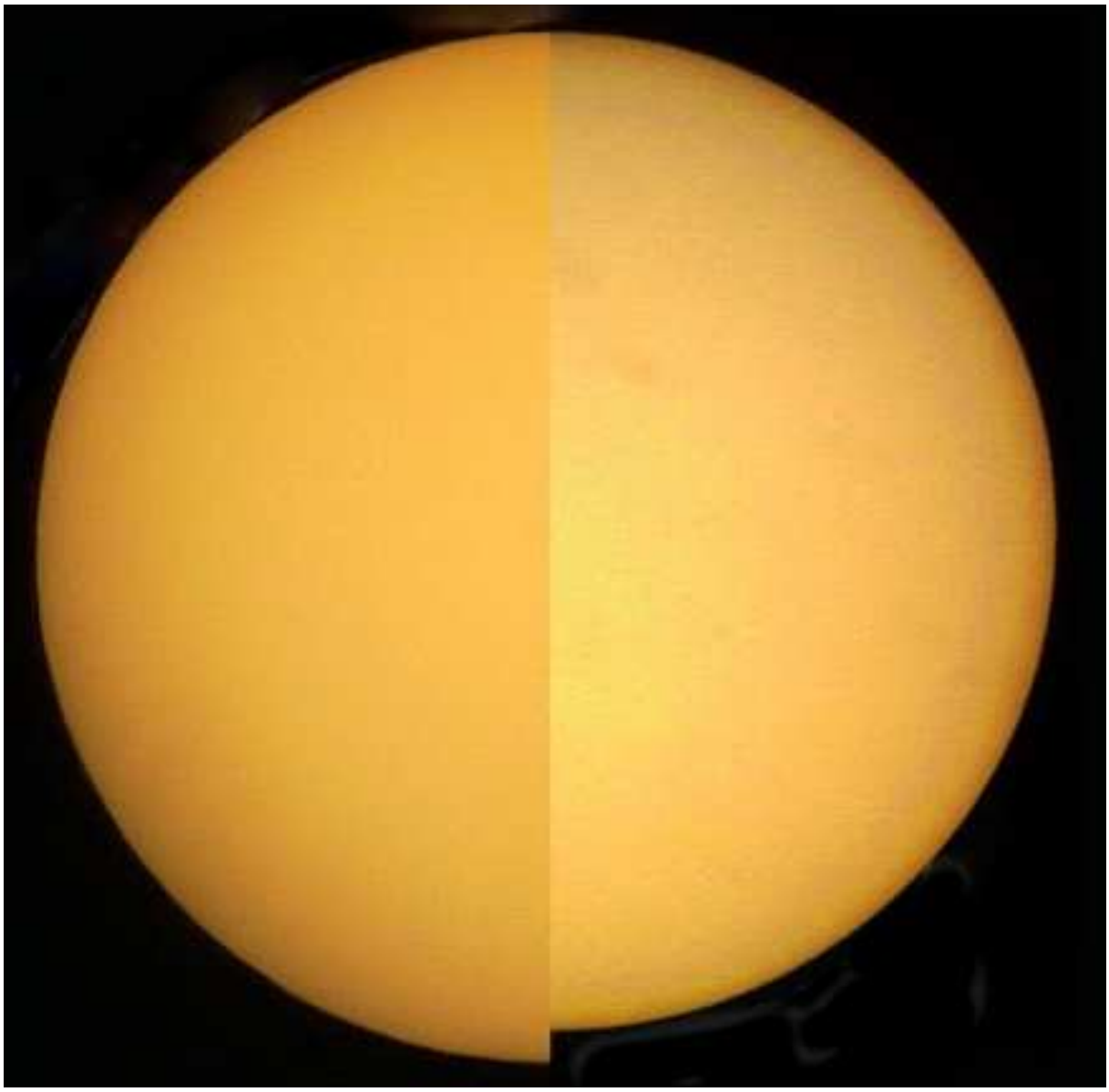


Рис. 1. Коллаж из двух фотографий Солнца (источник – https://vk.com/club28313198).

Задача № 3. «Коллаж двух фотографий Солнца»

На рис. 1 представлен коллаж из двух фотографий Солнца, сделанных с помощью одного и того же оборудования в моменты, когда его угловой диаметр принимает минимальное и максимальное значения в течение всего года.

1. Определите возможные даты года, в которые были сделаны данные фотографии? (2 балла)

2. Лишь с использованием данной фотографии определите эксцентриситет земной орбиты? (3 балла)

3. Во сколько раз отличаются значения солнечной постоянной в эти дни для земного наблюдателя (без учета поглощения света атмосферой)? (2 балла)

4. Во сколько раз отличаются значения приливной силы Солнца, действующей на Землю, в эти дни для земного наблюдателя? (3 балла)

Задача № 4. «Времена года и пояса освещенности экзопланеты»

Предположим, что вокруг некоторой звезды движется экзопланета по эллиптической орбите с большой полуосью a_p и эксцентриситетом ε_p. Дайте развернутые ответы на поставленные ниже вопросы:

1. Какие условия необходимо выполнить, чтобы на поверхности экзопланеты можно было наблюдать регулярную смену времен года? (2 балла)

2. Предположим, что плоскость экватора экзопланеты составляет угол ξ с плоскостью ее орбиты. Определите интервалы допустимых значений (ИДЗ) для планетоцентрической широты φ экзопланеты, соответствующие:

а) областям поверхности планеты, где можно наблюдать центральное светило в зените (назовем эту область *тропическим поясом*); (2 балла)

б) областям поверхности планеты, где можно наблюдать полярные дни и ночи (назовем эту область *полярным поясом*); (2 балла)

в) областям поверхности планеты, где центральное светило всегда является восходящим и заходящим и не бывает в зените (назовем эту область *умеренным поясом*). (1 балл)

3. Как изменяются ИДЗ для данных поясов при увеличении угла ξ в интервале $0 \div 90°$? При каком значении угла ξ существование умеренного пояса уже невозможно (наступает его вырождение)? При каких значениях ξ возможно существование областей на поверхности планеты, где в течение ее звездного года возможно наблюдение центрального светила в зените, а также возможны полярные дни и ночи (назовем эту область *гибридным поясом*)? (3 балла)

4. При каких значениях ξ вся поверхность принадлежит лишь одному из указанных выше поясов? (2 балла)

5. Как зависит продолжительность времен года от величин a_p и ε_p? (2 балла)

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 5. «Видимость звезды в полсуток»

В некоторой точке ($\varphi = 52°10'$, $\lambda = 51°02'$) южных степных районов Самарской области наблюдается звезда ровно половину звездных суток над горизонтом. Чему равно ее склонение, если угол рефракции у горизонта в данном месте составляет $\delta z = 34.6'$? Насколько минут было бы короче ее время пребывания над горизонтом, если бы у Земли не было атмосферы? Определите дату покрытия Солнцем данной звезды (для земного наблюдателя) в 2022 году, если последняя находится на эклиптике? Известно, что во время покрытия склонение Солнца плавно возрастало. (11 баллов)

Задача № 6. «Взгляд на Млечный Путь со стороны»

В направлениях каких созвездий должен пребывать наблюдатель, чтобы он мог видеть Млечный путь (МП) под наибольшим телесным углом (при

фиксированном расстоянии до его центра)? С какого расстояния наша Галактика будет еще видна невооруженным глазом как неточечный объект? Какое количество лет свет при этом идет от МП до наблюдателя? Какая будет видимая звездная величина МП с такого расстояния? Чему будет равна поверхностная яркость МП (в зв. величинах на кв. угл. сек.) при его наблюдении под наибольшим телесным углом? Диаметр диска Галактики $D = 56.7$ кпк, а абсолютная звездная величина – $M_G = -21^{\mathrm{m}}$. Разрешающую способность человеческого глаза принять равной $1'$. (12 баллов)

Задача № 7. «Ночь противостояния астероида»

Некоторый астероид наблюдается с Земли в ночь его противостояния в своем перигелии в плоскости эклиптики. Его видимая звездная величина по данным визуальной фотометрии $m_V = 12^{\mathrm{m}}$. В эту ночь методом радиолокации было определено время ($\tau = 13$ мин 47.8 с) блуждания радиоимпульса по пути "Земля-астероид-Земля", при этом параллактическое смещение у астероида не наблюдалось. Определите:

1. Скорость астероида в перигелии своей орбиты.
2. Гелиоцентрическое расстояние до перигелия астероида.
3. Большую полуось и эксцентриситет его орбиты.
4. Предполагается, что в далеком прошлом данный астероид являлся короткопериодической кометой. К какому семейству комет ее следует отнести (предполагая, что орбита оставалась неизменной)? Как часто астероид проходит свой перигелий?
5. Оцените радиус данного астероида, если известна оценка ($A_G = 0.04$) его геометрического альбедо в видимом свете.

Орбиту Земли следует считать круговой. (14 баллов)

Задача № 8. «Продолжительность дня на экзопланете»

Некоторая экзопланета обращается вокруг центральной звезды с периодом обращения T по круговой орбите. Сама экзопланета вращается вокруг оси с периодом P, составляющей угол ξ с правовинтовой нормалью к плоскости орбиты. Определите продолжительность дня в точке поверхности планеты, на широте φ. Радиус орбиты планеты много больше размеров звезды и планеты. (14 баллов)

Задача № 9. «Изменение поверхностной яркости Солнца»

Определите:

1. Какова видимая звездная величина Солнца (в оптическом диапазоне), наблюдаемого в зените (для наблюдателя, находящегося на поверхности Земли, в тропиках), если известна соответствующая солнечная постоянная (см. справочные данные) за пределами атмосферы Земли?
2. На сколько процентов изменялась бы визуальная поверхностная яркость

Солнца на горизонте относительно его положения в зените в силу феномена рефракции света (без учета атмосферного поглощения)?

3. Во сколько раз изменялась бы визуальная поверхностная яркость Солнца на горизонте (относительно его положения в зените) в результате поглощения света атмосферой Земли (без учета атмосферной рефракции)?

4. Во сколько раз изменяется визуальная поверхностная яркость Солнца на горизонте (относительно его положения в зените) в результате атмосферной рефракции света и его поглощения атмосферой Земли? Чему будет равна визуальная звездная величина Солнца на горизонте?

При решении задачи могут оказаться полезными следующие эмпирические формулы:

1. ***Беннетта*** для определения величины рефракции δh (в угловых минутах) в зависимости от видимой высоты светила h_a (в градусах):

$$\delta h = \operatorname{ctg}\left(\frac{h_a}{1^\circ} + \frac{7.31^\circ}{h_a + 4.4^\circ}\right). \tag{1}$$

2. ***Смардсона*** для определения величины рефракции δh (в угловых минутах) в зависимости от истинной высоты светила h_0 (в градусах):

$$\delta h = 1.02 \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{h_0}{1^\circ} + \frac{10.3^\circ}{h_0 + 5.1^\circ}\right). \tag{2}$$

3. ***Кастена-Янга*** для определения интенсивности ($\mathcal{I}_{vis}$) света от небесного источника у поверхности Земли, регистрируемого наблюдателем:

$$\mathcal{I}_{vis} = \mathcal{I}_0\, P^{M(z)}, \quad \text{где} \tag{3}$$

$$M(z) = \frac{1}{\cos z + 0.50572\,(96.07995 - z)^{-1.6364}}, \tag{4}$$

здесь $\mathcal{I}_0$ – интенсивность света того же источника на верхней границе атмосферы; P – коэффициент прозрачности атмосферы (в нашем случае следует принять $P = 0.75$), $M(z)$ – ***воздушная масса*** – отношение оптической толщины атмосферы, проходимой лучами света от источника при его зенитном расстоянии z (в градусах), к оптической толщине, проходимой при положении источника в зените ($z = 0^\circ$), определяемая формулой (4). (14 баллов)

Задача № 10. «Фокусировка по далекому фонарю»

Одной из главных проблем в любительской астрофотографии, выполняемой в пределах мегаполиса, является точная фокусировка объектива фотоаппарата. Из-за значительной засветки неба даже самые яркие звезды выглядят

блеклыми, и фокусировка по ним даже в режиме LiveView не всегда является эффективной. Возникает вопрос: а можно ли сфокусироваться на бесконечность с использованием искусственных источников освещения, например, по далекому фонарю ночного освещения? Считается, что изображение на матрице цифрового фотоаппарата является резким, если вместо идеального (точечного) изображения точечного источника света на матрице получается изображение в виде пятна диаметром не более d. Поэтому, если объектив находится на фокусном расстоянии от матрицы, то резкими считаются не только бесконечно удаленные предметы, но и все предметы, находящиеся дальше некоторого расстояния a. Предположим, что имеется объектив с переменным фокусным расстоянием $f = 70 \div 300$ мм и максимальным относительным отверстием $\chi_{\max} = 4.0 \div 5.6$ (здесь $\chi_{\max} = D/f$, где D – диаметр объектива, при этом каждая граница интервала $\chi_{\max}$ сопоставлена соответствующей границе f). Определите:

1. Величину d, полагая что для формирования точечного образа одиночной звезды необходимо освещение не менее трех пикселей, а для формирования протяженного образа – как минимум, четырех пикселей (теорема Котельникова). Сделайте рисунок, поясняющий образование пятна.

2. Определите минимальное расстояние a (для $f_{\min}$ и $f_{\max}$) до фонаря, по которому уже можно фокусироваться "на бесконечность" для съемки звезд.

3. Определите угловые размеры поля зрения фотоаппарата с данным объективом, в случае $f_{\min}$ и $f_{\max}$, если размеры матрицы составляют 22.3×14.9 мм.

4. Минимально возможное значение для видимой звездной величины фонаря (для $f_{\min}$ и $f_{\max}$), по которому уже можно фокусироваться "на бесконечность"?

В расчетах следует считать объектив тонкой линзой. Все пиксели матрицы используемого фотоаппарата имеют форму квадрата со стороной 4.3 мкм. Фонарь уличного освещения представляет собой изотропный источник света с входной мощностью $P_0 = 150$ Вт и КПД – $\eta = 33.3\%$ (в видимом свете). (15 баллов)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Метод годичного параллакса не работает?!»

Решение. **1.** Рассмотрим рис. 2. Здесь S – Солнце, E – Земля, T – небесное тело, с которого наблюдается большая полуось $a_\oplus$ эллиптической орбиты Земли. Воспользуемся формулой синусов для ΔSET:

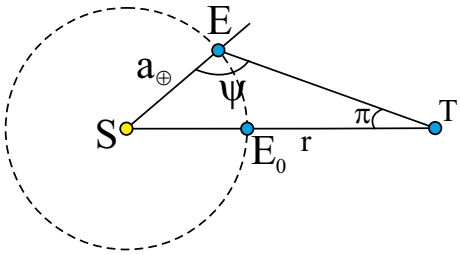


Рис. 2. К определению текущего годичного параллакса.

$$\frac{\sin\Psi}{r} = \frac{\sin\pi}{a_\oplus}, \quad \Rightarrow \quad r = a_\oplus \frac{\sin\Psi}{\sin\pi}, \qquad (5)$$

здесь π – текущее значение годичного параллакса, Ψ – угол между направлениями на Солнце и на данное тело при наблюдении из центра Земли (фазовый угол последней). Заметим, что при приближении Земли к положению E_0 годичный параллакс π стремится к нулю. К значению 180° стремится угол Ψ. При этом в правой части (5) наблюдается неопределенность типа $\frac{0}{0}$, из-за чего невозможно определить гелиоцентрическое расстояние до тела r. Значит в этот момент данное тело должно располагаться в противоположной точке, координаты которой $(-\beta_\odot; \ell_\odot + 180°)$[1].

2. Поскольку Солнце находится на эклиптике, то его широта $\beta_\odot = 0°$, тогда эклиптические координаты тела в противосолнечной точке (2 балла):

$$\beta_T = 0°; \ell_T = \ell_\odot + 180°. \qquad (6)$$

Очевидно, что для земного наблюдателя данное тело располагалось в конфигурации противостояния. Поскольку собственным движением тела можно пренебречь, то такая конфигурация будет повторяться точно через сидерический период обращения Земли вокруг Солнца (звездный год Земли, 365.2564 сут). (2 балла)

Ответ: в противосолнечной точке; $0°; \ell_\odot + 180°$; противостояние; через звездный год Земли.

Задача № 2. «Геостационарный спутник и его видимость в г. Самаре»

Решение. **1.** ***Геостационарной орбитой*** ИСЗ называется круговая орбита спутника, расположенная в плоскости земного экватора, период обращения по которой равен звездным суткам Земли. Следовательно, геостационарный спутник расположен над одной и той же точкой поверхности Земли. Геостационарные ИСЗ востребованы в обеспечении телефонной спутниковой связи, для обеспечения теле- и радиовещания наземных станций, спутниковой военной разведке и в других сферах. (2 балла)

[1] Здесь и далее мы исключаем из рассмотрения засолнечную точку, поскольку из нее физически невозможно наблюдать одновременно Солнце и Землю, поэтому само понятие «годичного параллакса» здесь уже не применимо!

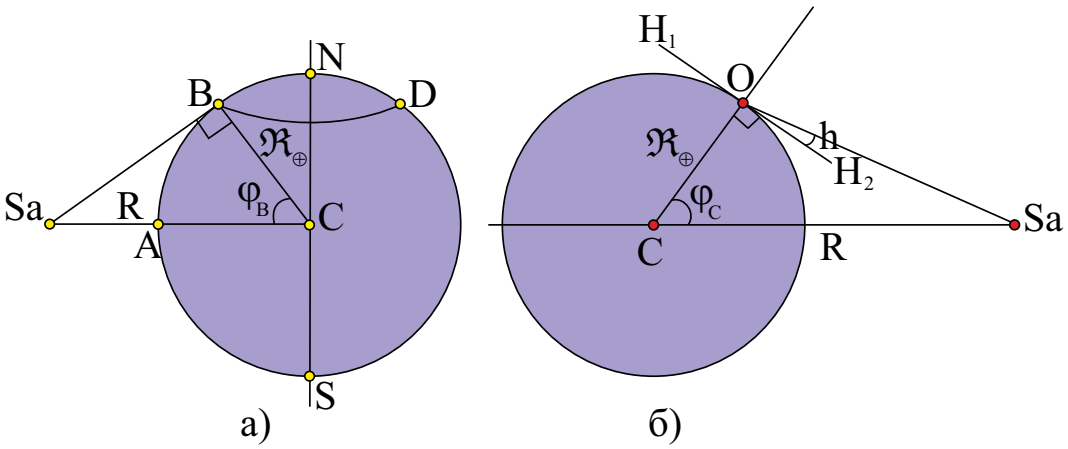


Рис. 3. К определению а) пограничной широты прямой видимости геостационарного ИСЗ, б) высоты данного ИСЗ над горизонтом в г. Самаре.

2. Определим радиус геостационарной орбиты. Для этого воспользуемся 2-ым законом Ньютона:

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{Gm\mathfrak{M}_\oplus}{R^2}, \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{R}, \quad \text{иначе} \quad v = \frac{2\pi R}{P_\oplus},$$

здесь $P_\oplus = 86164$ с – продолжительность звездных суток. Из последних результатов следует, что (2 балла)

$$\frac{4\pi^2 R^2}{P_\oplus^2} = \frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{R}, \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{\frac{G\mathfrak{M}_\oplus P_\oplus^2}{4\pi^2}} = 42165.7 \text{ км}. \tag{7}$$

3. Скорость и центростремительное ускорение спутника (2 балла):

$$v = \frac{2\pi R}{P_\oplus} = 3.075 \text{ км/с}, \quad a_{\text{ц.с.}} = \frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{R^2} = 0.224 \text{ м/с}^2. \tag{8}$$

4. Рассмотрим рис. 3.а). Очевидно, что в точке B поверхности Земли еще виден геостационарный спутник S на горизонте. Из прямоугольного $\Delta SaBC$ следует, что

$$\cos\varphi_B = \frac{\mathfrak{R}_\oplus}{R}, \quad \Rightarrow \quad \varphi_B = \arccos\left(\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{R}\right) = 81.3^\circ.$$

Следовательно диапазоны широты в пределах которых не виден геостационарный спутник есть (2 балла)

$$[-90^\circ, -81.3^\circ) \ \cup \ (81.3^\circ, 90^\circ]. \tag{9}$$

5. При использовании большого количества геостационарных ИСЗ радиосигналом покрываются все точки поверхности Земли, за исключением двух околополярных сигментов (таких как BND, см. рис. 3.а). Следовательно искомая доля зоны покрытия представляется в виде:

$$\eta = \frac{S_\oplus - 2S_c}{S_\oplus} = 1 - \frac{2S_c}{S_\oplus},$$

здесь S_c – площадь поверхности одного околополярого сегмента, $S_\oplus$ – площадь поверхности Земли. Данные величины представляются в виде:

$$S_\oplus = 4\pi\,\mathfrak{R}_\oplus^2, \quad S_c = 2\pi\,\mathfrak{R}_\oplus^2(1-\cos(90^\circ-\varphi_B)).$$

В итоге доля η представляется так (2 балла)

$$\eta = \sin\varphi_B = 0.989 \quad \text{или} \quad 98.9\%. \tag{10}$$

6. Поскольку спутник транзитировал по диску Юпитера, то можно полагать, что склонения геостационарного ИСЗ и Юпитера были одинаковыми. Рассмотрим рис. 3.б). Здесь в точке O – расположен наблюдатель в г. Самаре, в т. Sa – геостационарный ИСЗ. Рассмотрим $\Delta OCSa$, воспользуемся для него теоремой синусов:

$$\frac{\sin\angle Sa}{\mathfrak{R}_\oplus} = \frac{\sin(90^\circ+h)}{R}. \tag{11}$$

С другой стороны, сумма углов в треугольнике равна 180°, т.е.

$$\angle Sa + 90^\circ + h + \varphi_c = 180^\circ, \;\Rightarrow\; \angle Sa = 90^\circ - (\varphi_c + h). \tag{12}$$

Из выражений (11) и (12) следует, что

$$\cos(\varphi_c+h) = \frac{\mathfrak{R}_\oplus}{R}\cos h, \quad \text{или}$$

$$\cos\varphi_c\cos h - \sin\varphi_c\sin h = x\cos h, \quad \text{где } x = \frac{\mathfrak{R}_\oplus}{R} \;\Rightarrow$$

$$\cos\varphi_c - \sin\varphi_c\,\mathrm{tg}\,h = x, \;\Rightarrow\; \mathrm{tg}\,h = \frac{\cos\varphi_c - x}{\sin\varphi_c} = \mathrm{ctg}\varphi_c - \frac{x}{\sin\varphi_c} = 0.5594,$$

$$\Rightarrow\; h = 29.2^\circ. \tag{13}$$

Поскольку в указанный момент ИСЗ и Юпитер располагались в меридиане, к югу от зенита, то их высоту можно записать так (2 балла)

$$h = 90^\circ - \varphi_c + \delta_J, \;\Rightarrow\; \delta_J = h + \varphi_c - 90^\circ = -7.6^\circ. \tag{14}$$

Ответ: к задаче представлен выражениями (7)-(10), (14).

Задача № 3. «Коллаж двух фотографий Солнца»

Решение. **1.** Как известно, угловой диаметр небесного тела можно представить выражением вида:

$$D'' = 2\arcsin\left[\frac{R}{\Delta}\right] \approx \frac{2R}{\Delta}k, \tag{15}$$

здесь R – радиус небесного тела, Δ – его геоцентрическое расстояние, k – коэффициент перевода единиц измерения угла. Из последнего выражения следует, что угловой диаметр небесного тела обратно пропорционален Δ.

Следовательно, наибольший угловой диаметр Солнца был зафиксирован, когда Земля находилась в своем перигелии, т.е. 2-5 января. Наименьший угловой диаметр Солнца зафиксирован, когда Земля находилась в афелии орбиты, т.е. 1-5 июля. (2 балла)

2. Как известно, изображение небесного тела формируется в фокальной плоскости объектива и его линейный размер можно записать так

$$d = 2f \cdot \mathrm{tg}\,\frac{D''}{2} \approx 2f \cdot \frac{D''}{2} = f \cdot D''. \tag{16}$$

Из выражений (15) и (16) следует отношение:

$$x = \frac{d_{\max}}{d_{\min}} = \frac{f \cdot D''_{\max}}{f \cdot D''_{\min}} = \frac{\Delta_{\max}}{\Delta_{\min}} = \frac{a_{\oplus}(1+\varepsilon_{\oplus})}{a_{\oplus}(1-\varepsilon_{\oplus})} = \frac{1+\varepsilon_{\oplus}}{1-\varepsilon_{\oplus}}, \tag{17}$$

здесь учтено, что расстояние до перигелия и афелия Земли есть

$$\Delta_{\max} = a_{\oplus}(1+\varepsilon_{\oplus}), \quad \Delta_{\min} = a_{\oplus}(1-\varepsilon_{\oplus}).$$

Из (17) следует, что

$$\varepsilon_{\oplus} = \frac{x-1}{x+1}. \tag{18}$$

С использованием фотографии Солнца измеряем его линейные диаметры: $d_{\min}$=179 мм., $d_{\max}$=185 мм. (Ваши значения могут отличаться от указанных при использовании фотографии в ином масштабе). В результате (3 балла)

$$x = 1.033520, \quad \text{и} \;\; \varepsilon_{\oplus} = 0.0165.$$

3. Как известно, ***солнечная постоянная*** – это освещенность, создаваемая Солнцем у поверхности Земли во всем диапазоне электромагнитных волн без учета атмосферного поглощения. Освещенность, как известно, подчиняется закону обратных квадратов (2 балла):

$$f^{(\odot)}_{\max} \sim \frac{1}{\Delta^2_{\min}}, \quad f^{(\odot)}_{\min} \sim \frac{1}{\Delta^2_{\max}}, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{f^{(\odot)}_{\max}}{f^{(\odot)}_{\min}} = \left(\frac{\Delta_{\max}}{\Delta_{\min}}\right)^2 = \left(\frac{1+\varepsilon_{\oplus}}{1-\varepsilon_{\oplus}}\right)^2 = x^2 = 1.0682. \tag{19}$$

4. ***Приливная гравитационная сила*** – (F_t) это сила, действующая со стороны неоднородного гравитационного поля Солнца на протяженное тело Земли. Как известно, сила F_t подчиняется закону обратных кубов (3 балла):

$$F_{\mathrm{t,max}} \sim \frac{1}{\Delta^3_{\min}}, \quad F_{\mathrm{t,min}} \sim \frac{1}{\Delta^3_{\max}}, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{F_{\mathrm{t,max}}}{F_{\mathrm{t,min}}} = \left(\frac{\Delta_{\max}}{\Delta_{\min}}\right)^3 = \left(\frac{1+\varepsilon_{\oplus}}{1-\varepsilon_{\oplus}}\right)^3 = x^3 = 1.1040. \tag{20}$$

Ответ: ε=0.0165; к задаче представляется выражениями (19), (20).

Задача № 4. «Времена года и пояса освещенности экзопланеты»

Решение. **1.** Чтобы на поверхности экзопланеты была регулярная смена времен года, необходимо

1. Периодическое финитное движение планеты вокруг центральной звезды;

2. Существенно отличающийся от нуля угол наклона между плоскостью экватора экзопланеты и плоскостью ее орбиты;

3. Сохранение в течение длительного промежутка времени (существенно большего сидерического периода обращения планеты вокруг звезды) ориентации в пространстве оси ее суточного вращения. (2 балла)

2. Если плоскость экватора планеты образует угол ξ с плоскостью ее орбиты, то склонение центральной звезды в течение года будет изменяться в пределах:

$$-\xi \leq \delta_* \leq \xi. \tag{21}$$

При этом высота звезды в верхней кульминации на широте φ можно записать так

$$h_{\max} = 90^\circ - \varphi + \delta_*. \tag{22}$$

а. Если звезда находится в зените, то $h_{\max} = 90^\circ$, следовательно $\varphi = \delta_*$. Значит для значений φ, принадлежащих отрезку,

$$-\xi \leq \varphi \leq \xi \tag{23}$$

звезда в течение года обязательно будет в зените. Следовательно, интервал (23) определяет *тропический пояс освещенности* экзопланеты. (2 балла)

б. Чтобы на поверхности экзопланеты наблюдался полярный день необходимо, чтобы в нижней кульминации центральное светило было не ниже горизонта, т.е.

$$h_{\min} = \varphi + \delta_* - 90^\circ \geq 0, \;\; \varphi \geq 90^\circ - \delta_*. \tag{24}$$

С учетом (21), неравенство (24) можно переписать так

$$\varphi \geq 90^\circ - \xi \;\; \cup \;\; \varphi \leq -90^\circ + \xi.$$

Поскольку широта заключена в интервале

$$-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ, \tag{25}$$

тогда имеем следующие отрезки для широты, где наблюдается полярный день

$$\varphi \in [-90^\circ, -90^\circ + \xi] \;\; \cup \;\; [90^\circ - \xi, 90^\circ].$$

Для наблюдения полярной ночи необходимо, чтобы в верхней кульминации звезда была ниже горизонта, т.е.

$$h_{\min} = 90^\circ - \varphi + \delta_* < 0, \quad \varphi > 90^\circ + \delta_* \quad \text{или} \quad \varphi > 90^\circ - \xi.$$

С учетом (25) имеем следующие полуинтервалы широт, где наблюдается полярная ночь:

$$\varphi \in [-90^\circ, -90^\circ + \xi) \ \cup \ (90^\circ - \xi, 90^\circ]. \tag{26}$$

Диапазон широт, где может наблюдаться полярные день и ночь также определяется полуинтервалами (26). Полуинтервалы (26) определяют *северный и южный полярые пояса освещенности.* (2 балла)

в. Тогда интервалы широт, соответствующие *северному и южному умеренным поясам освещенности*, есть (1 балл)

$$\varphi \in (-90^\circ + \xi, -\xi) \ \cup \ (\xi, 90^\circ - \xi). \tag{27}$$

3. Заметим, что с увеличением угла ξ ширина тропического и полярных поясов растет, а умеренных уменьшается. При $\xi = 45^\circ$ наступает полное вырождение умеренных поясов и остаются лишь тропический и полярные пояса.

При дальнейшем увеличении ξ (при $\xi > 45^\circ$) происходит "перекрытие" данных поясов и на поверхности планеты формируется новый *гибридный пояс*, где возможно наблюдение Солнца в зените, а также полярные дни и ночи в течение сидерического периода обращения планеты вокруг центральной звезды. Диапазон широт для гибридного пояса (при $\xi > 45^\circ$) есть (3 балла):

$$\varphi \in [-\xi, -90^\circ + \xi) \ \cup \ (90^\circ - \xi, \xi]. \tag{28}$$

4. Из (27) при $\xi = 0^\circ$/ из (28) при $\xi = 90^\circ$ (т. е. когда плоскость экватора перпендикулярна плоскости орбиты планеты и экзопланета вращается "лежа на боку") очевидно, что вся поверхность планеты принадлежит лишь умеренному/гибридному поясу. (2 балла)

5. Согласно третьему закону Кеплера, сидерический период (T_p) обращения экзопланеты пропорционален большой полуоси орбиты в степени «3/2», т.е.

$$T_p \sim a_p^{3/2}.$$

Следовательно с ростом a_p увеличивается продолжительность (T_p), а следовательно и продолжительность времен года. С ростом ε_p увеличивается эллиптичность орбиты экзопланеты и как следствие, неравномерность продолжительности времен года. Время года, которое соответствует моменту прохождения экзопланетой перицентра орбиты будет самым коротким, а время года, соответствующее прохождению апоцентра орбиты – самым продолжительным. Остальные времена года будут иметь промежуточные значения продолжительности. (2 балла)

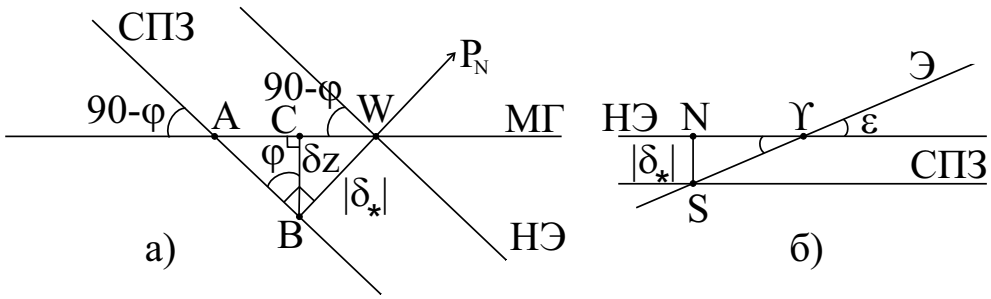


Рис. 4. К определению а) взаимного расположения больших кругов и суточной параллели звезды, б) расположения звезды по отношению к точке весны.

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 5. «Видимость звезды в полсуток»

Решение. **1.** Очевидно, если бы не было явления рефракции, то искомая звезда находилась бы точно на небесном экваторе (НЭ, см. рис. 4.а). Как известно, явление рефракции приподнимает все светила у горизонта. Следовательно самая нижняя точка суточной параллели звезды (СПЗ) должна быть под математическим горизонтом (МГ) на величину δz (см. рис. 4.а, точка В). С другой стороны, данная точка должна лежать на одном круге склонения с точкой запада (W), в случае заката звезды, чтобы длина дуги СПЗ была равна точно 180°. Из прямоугольного треугольника ΔBCW следует, что

$$|\delta_*| = \frac{\delta z}{\sin\varphi}, \quad \Rightarrow \quad \delta_* = -\frac{\delta z}{\sin\varphi} = -43.8'. \tag{29}$$

При записи последнего результата учтено, что суточная параллель звезды расположена в южной части небесной сферы, следовательно склонение звезды должно быть отрицательным. (3 балла)

2. Если бы у Земли не было атмосферы, то на участке AB суточной параллели звезда была бы не видна. Такой же участок звезда проходила бы под горизонтом и перед своим восходом. Следовательно, время пребывания над горизонтом уменьшилось бы на величину (4 балла):

$$\delta t = \frac{2\,AB}{\omega_\oplus \cos\delta_*} = \frac{2\,\delta z}{\omega_\oplus \cos\delta_*\,\cos\varphi} = 7.52 \text{ мин.} \tag{30}$$

3. Согласно условию задачи, во время покрытия склонение Солнца плавно возрастало, следовательно Солнце двигалось в направлении экватора в момент покрытия, значит покрытие произошло незадолго до дня весеннего равноденствия. Определим разность ($\Delta\ell = S\Upsilon$) эклиптических долгот звезды (S) и точки весеннего равноденствия (Υ), см. рис. 4.б). Из прямоугольного треугольника $\Delta\Upsilon NS$ в итоге имеем

$$\Delta\ell = \frac{|\delta_*|}{\sin\varepsilon} = 110.1'.$$

Учитывая, что в окрестности точки весны скорость перемещения Солнца по эклиптике близка к средней скорости его движения, в итоге находим про-

межуток времени, за который произошло покрытие Солнцем звезды до дня весеннего равноденствия:

$$t = \frac{\Delta\ell}{\omega_\odot} = 1.86 \text{ сут.},$$

здесь $\omega_\odot = 2\pi/T_\odot$, $T_\odot$ – тропический год. Таким образом, покрытие произошло за 1.86 сут. (или за 1 сут 20 час 42 мин) до дня весеннего равноденствия (в 2022 году оно состоялось 20 марта в 19 час 33 мин по Самарскому декретному времени), т.е. 18 марта в 22 час 51 мин по Самарскому времени. (4 балла).

Ответ: к задаче представляется выражениями (29)-(30); 18 марта. (11 баллов).

Задача № 6. «Взгляд на Млечный Путь со стороны»

Решение. **1.** Как известно, Галактика «Млечный Путь» относится к спиральному типу галактик с баром. Основной составляющей Галактики является галактический диск, плоская подсистема. Именно его увидит со стороны наблюдатель.

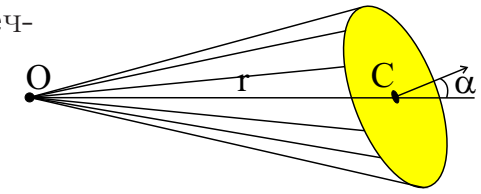


Рис. 5. К определению телесного угла.

Согласно определению, ***телесным углом*** называется количественная мера части пространства, заключенного внутри конуса, вершиной которого является точка (O), где находится наблюдатель (см. рис. 5), а образующими являются прямые, соединяющие вершину с периферийными точками данной площадки величины S, расположенной на расстоянии r:

$$\Omega = \frac{S}{r^2}\cos\alpha.$$

При этом угол α – это угол между прямой, соединяющей вершину и центр площадки и нормалью к этой площадке.

Очевидно, что на фиксированном расстоянии от диска Галактики телесный угол достигает максимального значения, если угол α равен нулю. Последнее значение достигается на оси вращения Галактики, в направлении галактических полюсов. Северный полюс Галактики находится в созвездии Волосы Вероники, а южный полюс – в созвездии Скульптора. Именно в направлениях данных созвездий должен пребывать наблюдатель, чтобы он мог наблюдать Млечный путь (МП) под наибольшим телесным углом. (4 балла)

2. Далее определим расстояние, на котором диаметр диска Галактики будет виден под углом $\beta_y = 1'$ (2 балла):

$$\frac{\beta_y}{3438'} = \frac{D_G}{r}, \quad \Rightarrow \quad r = D_G\frac{3438'}{\beta_y} = 194.9 \text{ Мпк}. \qquad (31)$$

Указанное расстояние свет преодолеет за $3.26 \times 194.9 \times 10^6 = 635.5$ млн лет. (2 балла)

3. Определим видимую звездную величину Млечного Пути:

$$m = M - 5 + 5\lg r = 15.4^{\mathrm{m}}. \tag{32}$$

Очевидно, что Галактика не будет видна невооруженным глазом с такого расстояния. (2 балла)

4. Определим поверхностную яркость МП, при его наблюдении под наибольшим телесным углом:

$$B_{MW} = \frac{E_{MW}}{k\,\pi(\beta_y/(2\cdot 3438'))^2}, \quad \Rightarrow \quad m_B = m - 2.5\lg\left(\frac{B_{MW}}{E_{MW}}\right) =$$

$$m - 2.5\lg\left(\frac{(2\cdot 3438')^2}{k\,\pi\,\beta_y^2}\right) = 24.0^{\mathrm{m}}/\text{кв. угл. сек.}, \tag{33}$$

здесь $k = 4.255\cdot 10^{10}$ кв. угл. сек/срад – коэффициент перевода единиц измерения телесного угла (2 балла).

Ответ: к задаче представлен выражениями (31)–(32); в направлениях созвездий Волосы Вероники и Скульптора; 635.5 млн лет. (12 баллов).

Задача № 7. «Ночь противостояния астероида»

Решение. **1.** Согласно условию задачи, у астероида в ночь противостояния не наблюдалось параллактического смещения, при этом сам астероид располагался в плоскости эклиптики. Такая ситуация возможна, если астероид относительно Солнца двигался с такой же скоростью что и Земля. Следовательно, гелиоцентрическая скорость (V_q) астероида в перигелии есть (2 балла)

$$V_q = V_\oplus = \sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{a_\oplus}} = 29.79 \text{ км/с}. \tag{34}$$

2. Зная время блуждания сигнала по пути "Земля-астероид-Земля", можно определить геоцентрическое расстояние до астероида:

$$\Delta_a = \frac{c\cdot\tau}{2} = 0.83 \text{ а.е.}, \tag{35}$$

тогда можно определить гелиоцентрическое расстояние до перигелия астероида (2 балла):

$$q_a = \Delta_a + a_\oplus = 1.83 \text{ а.е.} \tag{36}$$

3. Определим эксцентриситет орбиты астероида. Для этого запишем скорость астероида в перигелии (2 балла):

$$V_q = \sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{a_a}\left(\frac{1+\varepsilon_a}{1-\varepsilon_a}\right)} = \sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{q_a}(1+\varepsilon_a)} = V_\oplus\sqrt{\frac{a_\oplus}{q_a}(1+\varepsilon_a)}, \quad \Rightarrow$$

$$\varepsilon_a = \frac{q_a}{a_\oplus} - 1 = 0.83. \tag{37}$$

Большая полуось орбиты можно определить из формулы (2 балла):

$$q_a = a_a(1-\varepsilon_a), \;\; \Rightarrow \;\; a_a = \frac{q_a}{(1-\varepsilon_a)} = 10.76 \text{ а.е.} \tag{38}$$

4. Определим сидерический период обращения астероида относительно Солнца с используем третьего закона Кеплера:

$$\frac{T_a^2}{T_\oplus^2} = \frac{a_a^3}{a_\oplus^3}, \;\; \Rightarrow \;\; T_a = T_\oplus \left(\frac{a_a}{a_\oplus}\right)^{3/2} = 35.3 \text{ лет.} \tag{39}$$

Следовательно, свой перигелий астероид проходит каждые 35.3 года (2 балла).

В астрономии принято классифицировать короткопериодические кометы на несколько семейств. Название каждого семейства определяется названием классической планеты (или пояса ледяных тел – пояса Койпера), к орбите которой ближе всего расположен афелий орбиты данной кометы. Традиционно выделяют семейства Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Койпера. Следовательно необходимо определить положение афелия и сопоставить его с большой полуосью орбиты классической планеты или со средним радиусом пояса Койпера (50 а.е.):

$$Q_a = a_a(1+\varepsilon_a) = 19.69 \text{ а.е.} \tag{40}$$

Сопоставляя последний результат с значениями больших полуосей планет-гигантов (см. справочные данные в приложении А), приходим к заключению, что данный астероид, будучи кометой, принадлежал семейству Урана (2 балла).

5. Согласно определению, ***геометрическим альбедо*** (A_G) называется безразмерная физическая величина, равная отношению освещенности, создаваемой небесным телом (фаза которого равна единице) у поверхности Земли, к освещенности, которую создал бы плоский идеальный зеркальный ламбертовский диск (LD) того же размера, что и данное тело, расположенный на месте данного тела и перпендикулярный лучу зрения и солнечным лучам.

$$A_G = \frac{E}{E_{LD}}. \tag{41}$$

Освещенность, создаваемая LD в точке, где находится наблюдатель определяется как

$$E_{LD} = \frac{\Delta W}{\Delta t \cdot \Delta S} = \frac{\Delta W}{\Delta t \cdot \Delta S}\frac{S_a\,\Delta_a^2}{S_a\,\Delta_a^2} = \frac{\Delta W}{\Delta t \cdot \Delta\Omega\, S_a}\frac{S_a}{\Delta_a^2} = \frac{L\,S_a}{\Delta_a^2} = \frac{M\,S_a}{\pi\,\Delta_a^2} = \frac{\pi\,\mathfrak{R}_{LD}^2}{\pi\,\Delta_a^2}E_\odot.$$

В последнем выражении ΔW – энергия электромагнитных волн, переносимых через площадку ΔS за время Δt; $\Delta\Omega = \Delta S/\Delta_a^2$ – телесный угол, под которым видна рабочая поверхность приемника (в точке, где находится наблюдатель) света с позиции ламбертовского диска площади S_a. Здесь также использовано определение яркости поверхности при нулевом фазовом угле ($\varphi = 0°$):

$$L = \left.\frac{\Delta W}{\Delta t \cdot \Delta\Omega \cdot S_a \cdot \cos\varphi}\right|_{\varphi=0} = \frac{\Delta W}{\Delta t \cdot \Delta\Omega \cdot S_a},$$

и закон Ламберта для яркости одноименного диска:

$$L = \frac{M}{\pi},$$

где M – поверхностная светимость LD. В случае идеального зеркала имеем $M = E_\odot$, $S_a = \pi\,\mathfrak{R}_{LD}^2$, $\mathfrak{R}_{LD}$ – радиус LD, $E_\odot$ – освещенность, создаваемая Солнцем у поверхности LD. Последнюю величину можно связать с солнечной постоянной в оптическом диапазоне – $f_\odot^{(\mathrm{v})} = 600$ Вт/м^2, посредством закона обратных квадратов:

$$E_\odot = \left(\frac{a_\oplus}{q_a}\right)^2 f_\odot^{(\mathrm{v})}.$$

В итоге освещенность, создаваемая астероидом у поверхности Земли, есть

$$E = A_G \frac{\mathfrak{R}_{LD}^2}{\Delta_a^2}\left(\frac{a_\oplus}{q_a}\right)^2 f_\odot^{(\mathrm{v})}.$$

Поскольку радиус астероида равен радиусу LD, то из последнего результата следует, что (2 балла).

$$\mathfrak{R}_a = \Delta_a \frac{q_a}{a_\oplus}\sqrt{\frac{E}{A_G\, f_\odot^{(\mathrm{v})}}} = \Delta_a \frac{q_a}{a_\oplus}\sqrt{\frac{f_\odot}{A_G\, f_\odot^{(\mathrm{v})}}}\,10^{-0.2(m_V - m_\odot)} = 30 \text{ км}. \qquad (42)$$

Ответ: к задаче представляется выражениями (34)-(40), (42); семейство Урана. (14 баллов).

Задача № 8. «Продолжительность дня на экзопланете»

Решение. **1.** Рассмотрим рис. 6.а), соответствующий условиям задачи. Определим векторы угловых скоростей вращательных движений экзопланеты (ЭП): $\vec{\omega}_P$ – вектор угловой скорости осевого (суточного) вращения ЭП, $\vec{\omega}_T$ – вектор угловой скорости ее орбитального движения вокруг центральной звезды. Их ориентация в пространстве задается правилом буравчика с правовинтовой нарезкой. Прямая, вдоль которой направлен вектор $\vec{\omega}_P$ будем называть ***осью вращения*** ЭП. Данная прямая пересекает тело планеты в двух точках, называемых ***полюсами экзопланеты***. Тот полюс, на который ориентирован вектор $\vec{\omega}_P$ будем называть ***северным полюсом*** ЭП, а

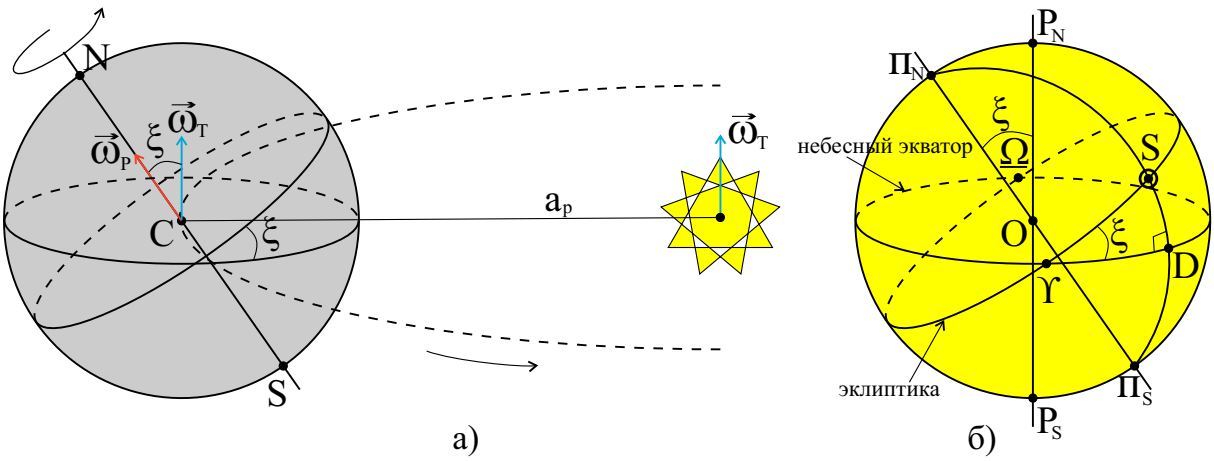


Рис. 6. К определению а) ориентации векторов угловых скоростей $\vec{\omega}_P$ и $\vec{\omega}_T$; б) основных кругов небесной сферы экзопланеты.

ему противоположный – ***южным полюсом***. Плоскость, перпендикулярная оси вращения ЭП, проходящая через ее центр (тоска C), пересекает тело экзопланеты по большому кругу называемому ***экватором*** ЭП. Далее всю терминологию для небесной сферы земного небосвода будем применять по аналогии для небосвода ЭП.

2. Определим угловую скорость ω_S, с которой центральное светило движется относительно точек поверхности ЭП. Для этого, прежде всего, спроецируем вектор $\vec{\omega}_T$ на направление вектора $\vec{\omega}_P$. Заметим далее, что если видимое движение центрального светила совпадает с направлением осевого вращения ЭП, то искомая угловая скорость должна определяться разностью данных величин (2 балла):

$$\omega_S = \omega_P - \omega_T \cos\xi, \;\Rightarrow\; \frac{2\pi}{S} = \frac{2\pi}{P} - \frac{2\pi}{T}\cos\xi, \;\Rightarrow\; S = \frac{P\,T}{T - P\cos\xi}. \qquad (43)$$

В частном случае $P \ll T$, выражение для синодического периода (S) центрального светила можно упростить и записать так

$$S = \frac{P\,T}{T(-(P/T)\cos\xi)} \approx P\left(1 + \frac{P}{T}\cos\xi\right).$$

Эклиптика центрального светила будет составлять также угол ξ с плоскостью небесного экватора ЭП (см. рис. 6.б). Поскольку экзопланета движется по круговой траектории относительно центрального светила, то эклиптическая долгота последнего будет меняться равномерно с течением времени и может быть представлена в виде: $\ell_* = \Upsilon S = \omega_T\, t$, где t – время, прошедшее от момента прохождения центральным светилом точки весны (Υ) до данного момента времени (текущего его положения, в точке S). Воспользуемся теоремой синусов для сферического треугольника $\triangle_S \Upsilon S D$:

$$\sin\xi \sin\ell_* = \sin\delta_* \sin 90^\circ, \;\Rightarrow\; \delta_* = \arcsin[\sin\xi \sin\omega_T\, t], \qquad (44)$$

здесь δ_* – склонение центрального светила в экваториальной системе координат. Очевидно, что в течение года склонение звезды меняется в пределах

(2 балла):

$$\left.\begin{aligned} &-\xi \le \delta_* \le \xi, \ \text{ при } \ 0^\circ \le \xi \le 90^\circ, \\ &-(180^\circ - \xi) \le \delta_* \le (180^\circ - \xi), \ \text{ при } \ 90^\circ < \xi \le 180^\circ \end{aligned}\right\}. \qquad (45)$$

3. Предположим, что предпринята попытка наблюдения центрального светила с поверхности ЭП в точке с планетоцентрической широтой φ. Для данной позиции центральная звезда может быть

а) *незаходящей* и тогда продолжительность (полярного) дня будет больше продолжительности синодического периода S. Условие наступления полярного дня, очевидно, определяется неотрицательной высотой светила в нижней кульминации:

$$h_{\min} = |\varphi| + |\delta_*| - 90^\circ \ge 0, \ \Rightarrow \ |\delta_*| \ge 90^\circ - |\varphi|, \ \text{ при } \ \operatorname{sign}\delta_* = \operatorname{sign}\varphi. \qquad (46)$$

а.1) В случае *северного полушария* имеем $\operatorname{sign}\delta_* = \operatorname{sign}\varphi = +1$, тогда неравенство (46) представляется так

$$\delta_* \ge 90^\circ - \varphi, \Rightarrow \sin\delta_* \ge \cos\varphi, \Rightarrow \sin\xi\sin\omega_T t \ge \cos\varphi, \Rightarrow \sin\omega_T t \ge \frac{\cos\varphi}{\sin\xi}.$$

$$\frac{T}{2\pi}\arcsin\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\xi}\right] \le t \le \frac{T}{2\pi}\left(\pi - \arcsin\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\xi}\right]\right), \ \text{ при } \ \xi \ne 0^\circ, 180^\circ. \qquad (47)$$

Последний интервал определяется моментами наступления и окончания полярного дня. Следовательно, продолжительность полярного дня составляет (2 балла)

$$\tau_d = \frac{T}{2\pi}\left(\pi - 2\arcsin\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\xi}\right]\right), \ \text{ при } \ \xi \ne 0^\circ, 180^\circ. \qquad (48)$$

а.2) В случае *южного полушария* имеем $\operatorname{sign}\delta_* = \operatorname{sign}\varphi = -1$, тогда неравенство (46) представляется так (при $\xi \ne 0^\circ, 180^\circ$):

$$-\delta_* \ge 90^\circ + \varphi, \Rightarrow \sin\delta_* \le -\cos\varphi, \Rightarrow \sin\omega_T t \le -\frac{\cos\varphi}{\sin\xi}.$$

$$\frac{T}{2\pi}\left(\pi + \arcsin\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\xi}\right]\right) \le t \le \frac{T}{2\pi}\left(2\pi - \arcsin\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\xi}\right]\right). \qquad (49)$$

При этом продолжительность полярного дня определяется также выражением (48). (1 балл)

В случае $\xi = 0^\circ, 180^\circ$, $\delta_* = 0^\circ$ и условие (46) достигается только на полюсах, при этом продолжительность дня здесь уже ничем не ограничена, поскольку центральное светило всегда находится на горизонте, т.е. $\tau_d = \infty$. (2 балла)

б) *восходящей и заходящей*, следовательно высота звезды в нижней кульминации будет меньше нуля, а в верхней – не меньше нуля:

$$h_{\min} = |\varphi| + |\delta_*| - 90^\circ < 0 \cup h_{\max} = (90^\circ - |\varphi|) - |\delta_*| \geq 0, \text{ или}$$

$$|\varphi| + |\delta_*| < 90^\circ \cup |\varphi| + |\delta_*| \leq 90^\circ, \Rightarrow |\varphi| + |\delta_*| < 90^\circ. \quad (50)$$

4. Рассмотрим суточное движение материнской звезды по небосводу (см. рис. 7) вдоль суточной параллели $R_*C_uS_*C_d$, для наблюдателя, находящегося (для определенности) в северном географическом полушарии, на широте φ ($\varphi > 0$). Звезда восходит над горизонтом в точке R_*, поднимается выше и кульминирует в точке C_u, затем опускается и заходит за горизонт в точке S_*.

Далее ее суточное движение по небосводу продолжается по дуге $S_*\,C_d\,R_*$, скрытой от глаз наблюдателя, находящегося в точке O – центре небесной сферы. Т.о., нам необходимо определить угловую меру ℓ дуги $R_*\,C_u\,S_*$. Из рисунка видно, дугу можно представить в виде:

$$\ell = 360^\circ - 2\beta, \quad (51)$$

где β – угол прямоугольного треугольника ΔAR_*B. Последний можно определить следующей формулой:

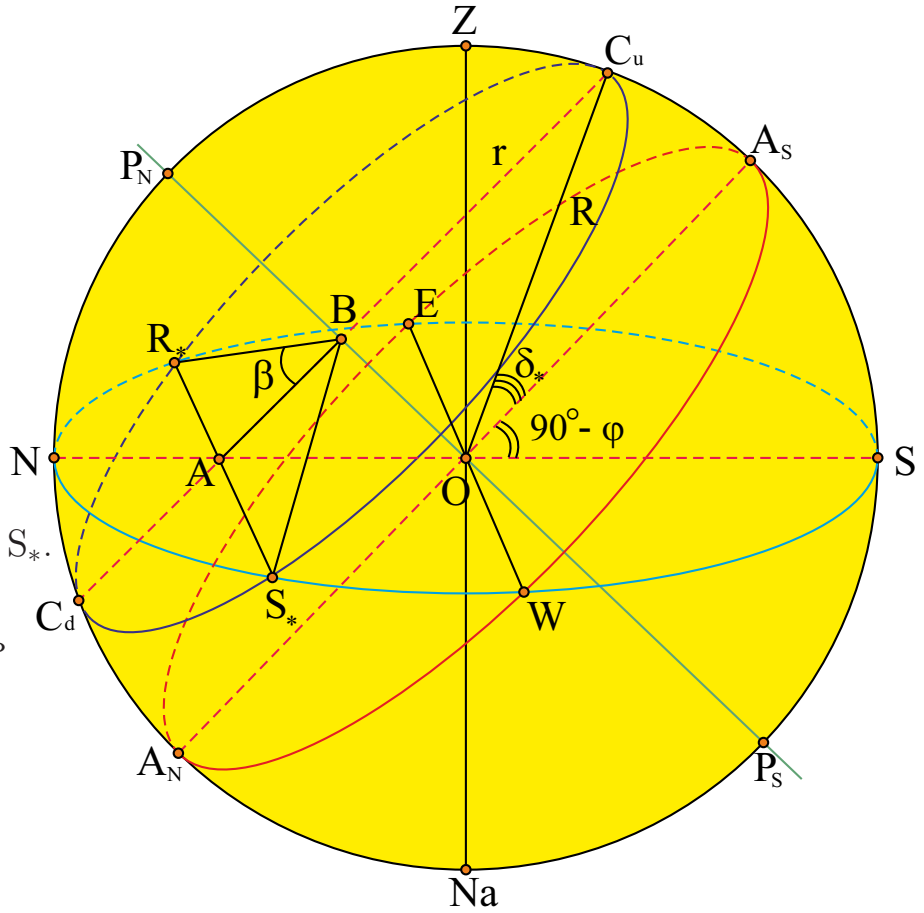


Рис. 7. К определению части дуги суточной параллели звезды, соответствующей ее видимому движению над горизонтом.

$$\cos\beta = \frac{AB}{R_*B} = \frac{OB\ \mathrm{ctg}\angle BAO}{r}, \quad (52)$$

здесь $r = R_*B = BC_u$ – радиус суточной параллели звезды, который можно легко определить из ΔOC_uB:

$$r = R\cos\delta_*, \quad (53)$$

здесь R – радиус небесной сферы, δ_* – склонение звезды. OB можно выразить из того же треугольника

$$OB = R\sin\delta_*.$$

Из рис. 7 нетрудно видеть, что $\angle BAO = \angle A_s OS = 90^\circ - \varphi$. В итоге $\cos\beta$ можно представить в виде:

$$\cos\,\beta = \mathrm{tg}\;\delta_* \cdot \mathrm{tg}\;\varphi, \quad \text{при}\;\; |\delta_*| < 90^\circ - |\varphi|. \tag{54}$$

Следовательно, итоговое выражение для длины дуги видимой части суточной параллели звезды (в северном полушарии) можно записать так:

$$\ell = 360^\circ - 2\arccos(\mathrm{tg}\,\delta_* \cdot \mathrm{tg}\,\varphi). \tag{55}$$

Тогда продолжительность дня в данном случае:

$$\tau_d = \frac{\ell}{\omega_S} = S\left(1 - \frac{1}{\pi}\arccos(\mathrm{tg}\,\delta_* \cdot \mathrm{tg}\,\varphi)\right), \tag{56}$$

где S определяется выражением (43).Отметим, что полученный результат применим для южных широт ЭП. (3 балла)

в) В случае *невосходящей* звезды, день невозможен в принципе, значит $\tau_d = 0$ при $|\varphi| + |\delta_*| > 90^\circ$ и $\mathrm{sign}\,\delta_* = -\mathrm{sign}\,\varphi$. (1 балл). Подведем итог (1 балл):

$$\tau_d = \left\{\begin{array}{ll} (48), & \text{при}\,|\delta_*| + |\varphi| \geq 90^\circ,\ \mathrm{sign}\,\delta_* = \mathrm{sign}\,\varphi;\, \xi \neq 0^\circ, 180^\circ; \\ \infty & \text{при}\,\xi = 0^\circ, 180^\circ;\, \delta_* = 0^\circ,\ \varphi = \pm 90^\circ; \\ (56), & \text{при}\,|\varphi| + |\delta_*| < 90^\circ, \\ 0, & \text{при}\,|\varphi| + |\delta_*| > 90^\circ, \mathrm{sign}\,\delta_* = -\mathrm{sign}\,\varphi \end{array}\right\}. \tag{57}$$

Ответ: к задаче представлен системой результатов (57). (14 баллов).

Задача № 9. «Изменение поверхностной яркости Солнца»

Решение. **1.** Согласно формуле Погсона имеем

$$m_v^{(Z)} - m_v^{(0)} = -2.5\lg\left(\frac{f_\odot^{(\mathrm{vis})}}{f_\odot^{(0)}}\right), \;\Rightarrow\; m_v^{(Z)} = m_v^{(0)} + 2.5\lg\left(\frac{f_\odot^{(0)}}{f_\odot^{(\mathrm{vis})}}\right) =$$

$$-26.74^{\mathrm{m}} - 2.5\lg(0.75) = -26.74^{\mathrm{m}} + 0.31^{\mathrm{m}} = -26.43^{\mathrm{m}}. \tag{58}$$

При записи последнего результата было учтено, что солнечная постоянная в оптическом диапазоне $f_\odot^{(0)}$ за пределами земной атмосферы связана с солнечной постоянной $f_\odot^{(\mathrm{vis})}$ в том же диапазоне у поверхности Земли посредством формулы (3) Кастена-Янга при $z = 0^\circ$. (2 балла)

2. В случае, когда Солнце находится в зените, то земному наблюдателю оно видится круглым диском с угловым диаметром $D''_\odot = 32'$. Рассмотрим ситуацию, когда земной наблюдатель видит Солнце на горизонте. Если в некоторый момент времени нижняя точка A' видимого диска Солнца коснулась горизонта, то ее видимая высота $h_{A'} = 0^\circ$ (см. рис. 8). При этом, согласно

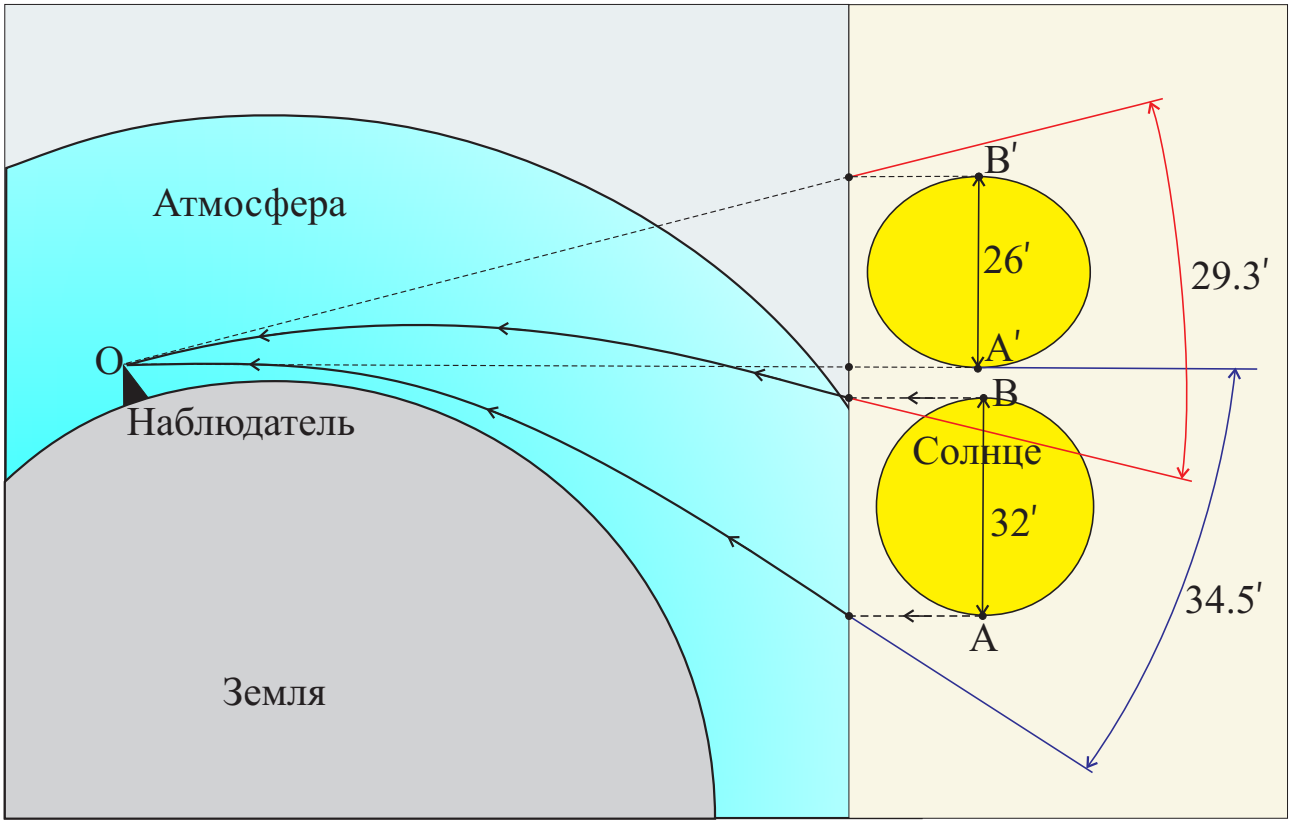


Рис. 8. К определению сжатия видимого диска Солнца у горизонта, в силу атмосферной рефракции.

формуле (1), угол рефракции данной точки есть $\delta h_A = 34.5'$. Следовательно, высота нижней точки (A) истинного диска Солнца есть

$$h_A = h_{A'} - \delta h_A = -34.5'. \tag{59}$$

Высота верхней точки (B) истинного диска Солнца есть

$$h_B = h_A + D''_{\odot} = -2.5'.$$

С использование формулы (2) можно вычислить угол рефракции для данной точки $\delta h_B = 29.3'$. Следовательно, высота верхней точки B' видимого диска Солнца есть

$$h_{B'} = h_B + \delta\, h_B = 26.8'. \tag{60}$$

Следовательно, у горизонта видимый диск Солнца представляется сплюснутым вдоль отвесной линии эллипсом с большой осью $a''_{\odot} = D''_{\odot} = 32'$ и малой осью – $b''_{\odot} = 26.8'$.

Полагая, что в направлении наблюдателя Солнце испускает всегда одну и ту же порцию энергии за один и тот же промежуток времени, следовательно, поверхностная яркость Солнца будет изменяться в силу уменьшения площади его видимого диска. Для протяженного объекта ***поверхностной яркостью*** (B) называется освещенность (или соответствующая ей видимая звездная величина), создаваемая единицей угловой площади (в нашем случае – одной квадратной угловой секундой) видимой поверхности данного объекта:

$$B = \frac{E}{\Omega}, \tag{61}$$

здесь E – интегральная освещенность, создаваемая данным небесным телом в точке, где находится наблюдатель; Ω – телесный угол (угловая площадь) под которым наблюдается объект. В случае, когда Солнце представляется круглым диском и эллипсом, соответствующие телесные углы представляются в виде:

$$\Omega_{\odot}^{(Z)} = \frac{\pi\, D_{\odot}''^{2}}{4}, \quad \Omega_{\odot}^{(H)} = \frac{\pi}{4} a_{\odot}'' \cdot b_{\odot}''. \tag{62}$$

Следовательно, изменение (относительное) визуальной поверхностной яркости Солнца на горизонте относительно его положения в зените в силу феномена рефракции света (без учета атмосферного поглощения) есть (4 балла):

$$\eta_B = \frac{B^{(H)} - B^{(Z)}}{B^{(H)}} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{S_{\odot}^{(H)}}{S_{\odot}^{(Z)}}\right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{b_{\odot}''}{a_{\odot}''}\right) \cdot 100\% = 16.3\%. \tag{63}$$

3. В данном случае мы полагаем, что размер диска Солнца в зените и на горизонте одинаковый, а освещенность должна определяться формулой Кастена-Янга (4 балла):

$$E^{(Z)} = f_{\odot}^{(0)} P^{M(0)}, \quad E^{(H)} = f_{\odot}^{(0)} P^{M(90^\circ)}.$$

Тогда

$$\frac{B^{(Z)}}{B^{(H)}} = P^{M(0^\circ) - M(90^\circ)} = 40995. \tag{64}$$

4. В данном случае необходимо учесть оба фактора. Очевидно, что поглощение света в атмосфере более значимый фактор, поэтому (4 балла)

$$\frac{B^{(Z)}}{B^{(H)}} = \frac{S_{\odot}^{(H)}}{S_{\odot}^{(Z)}} \cdot P^{M(0^\circ) - M(90^\circ)} = \frac{b_{\odot}''}{a_{\odot}''} \cdot P^{M(0^\circ) - M(90^\circ)} = 34333. \tag{65}$$

При этом видимая звездная величина Солнца на горизонте будет

$$m_v^{(H)} = m_v^{(Z)} - 2.5 \lg \left[P^{M(0^\circ) - M(90^\circ)}\right] = -14.9^{\mathrm{m}}. \tag{66}$$

Именно поэтому Солнце у горизонта лишь на 2.5^{m} ярче полной Луны, наблюдаемой в зените (с учетом поглощения света). Смотреть и фотографировать диск Солнца на закате уже можно без специальных защитных средств.

Ответ: к задаче представлен выражениями (58), (63)-(66). (14 баллов).

Задача № 10. «Фокусировка по далекому фонарю»

Решение. **1.** Согласно условию задачи, для формирования образа точечного источника света на матрице фотоаппарата необходимо не менее трех пикселей. При этом он не должен превратиться в образ протяженного источника, следовательно пятно не должно покрывать 4 пикселя. Чтобы 4-ый пиксель не сработал, необходимо, чтобы его освещал источник не более

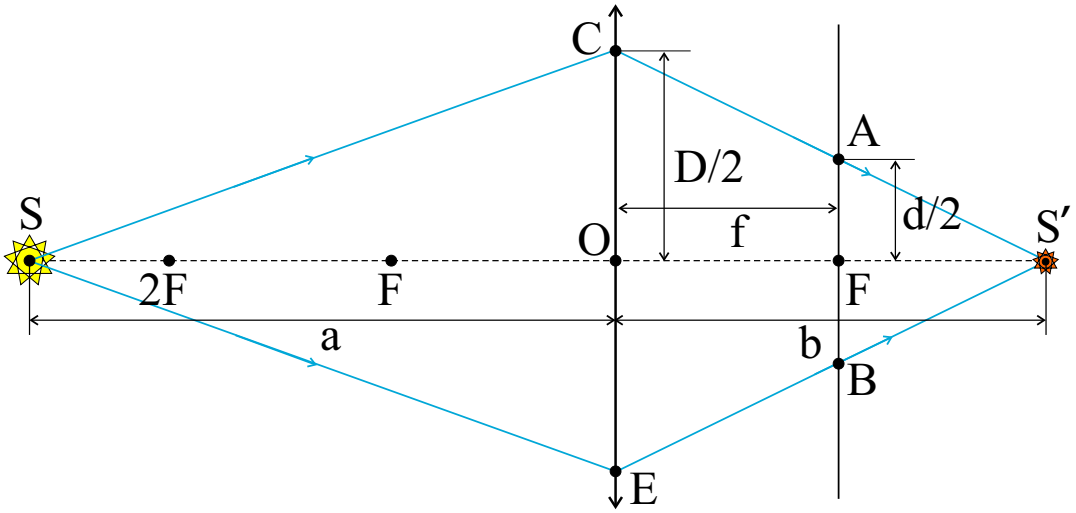


Рис. 9. К определению размеров пятна в фокальной плоскости объектива (на матрице фотоаппарата).

чем наполовину. Значит максимально допустимый размер пятна составляет 3.5 пикселя. Тогда диаметр пятна составляет $d = 3.5 \cdot s_0 = 15.05$ мкм, где $s_0 = 4.3$ мкм – размер одного пикселя. (3 балла)

2. Построим рис. 9, соответствующий условию задачи. Здесь в точке S (на расстоянии a) находится точечный источник света; в точке S' находится изображение данного источника. В задней фокальной плоскости объектива формируется пятно, диаметр которого $AB = d$. Воспользуемся подобием треугольников $\triangle COS'$ и $\triangle AFS'$:

$$\frac{OC}{AF} = \frac{OS'}{AF'}, \quad \Rightarrow \quad \frac{D}{d} = \frac{b}{b-f}.$$

Воспользуемся формулой для тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b\,f}{b-f}.$$

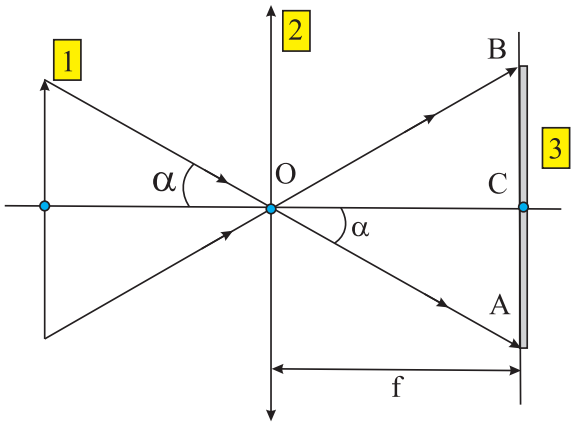


Рис. 10. К определению оптической схемы "объектив-фотокамера".

Из двух последних выражений следует, что

$$a = f\frac{D}{d} = \frac{\chi}{d}f^2. \tag{67}$$

В итоге получаем (4 балла)

$$\text{Для } f_1 = 70 \text{ мм и } \chi_1 = 1:4.0, \quad a_1 = 81.4 \text{ м}, \tag{68}$$

$$\text{Для } f_2 = 300 \text{ мм и } \chi_2 = 1:5.6, \quad a_2 = 1068 \text{ м}. \tag{69}$$

3. Рассмотрим оптическую схему "объектив-фотокамера" (см. рис. 10). Здесь $\boxed{1}$ – объект фотообзора, определяющий максимальную угловую высоту h, которую еще может запечатлеть матрица $\boxed{3}$; $\boxed{2}$ – объектив, в фокусе

которого расположена матрица (в случае наблюдения небесного тела). Очевидно, что максимальная угловая высота $h = 2\alpha$, причем из ΔOAC следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB/2}{f} = \frac{\ell}{2\,f}, \;\Rightarrow\; \alpha = \operatorname{arctg}\left[\frac{\ell}{2\,f}\right], \tag{70}$$

здесь и далее $\ell_{\max} = 22.3$ мм, $\ell_{\min} = 14.9$ мм – линейные размеры матрицы камеры. В итоге угловая высота кадра есть

$$h_1 = 2\operatorname{arctg}\left[\frac{\ell_{\min}}{2\,f_1}\right] = 12.15^\circ, \;\; h_2 = 2\operatorname{arctg}\left[\frac{\ell_{\min}}{2\,f_2}\right] = 2.85^\circ. \tag{71}$$

Аналогично рассуждая, можно рассчитать угловую ширину кадра L и угловую длину $\mathcal{D}$ диагонали кадра:

$$L_1 = 2\operatorname{arctg}\left[\frac{\ell_{\max}}{2\,f_1}\right] = 18.10^\circ, \;\; L_2 = 2\operatorname{arctg}\left[\frac{\ell_{\max}}{2\,f_2}\right] = 4.26^\circ. \tag{72}$$

$$\mathcal{D}_{\{1,2\}} = 2\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{\ell_{\min}^2 + \ell_{\max}^2}}{2\,f_{\{1,2\}}}\right] = \{21.69^\circ, 5.12^\circ\}. \tag{73}$$

Последняя величина *определяет угловой диаметр поля зрения камеры с данным объективом.* (4 балла)

4. Определим освещенность, создаваемую фонарем на расстоянии r от последнего:

$$E = \frac{\eta\,P_0}{4\pi\,r^2}.$$

С использованием формулы Погсона определим минимальную звездную величину для данного фонаря:

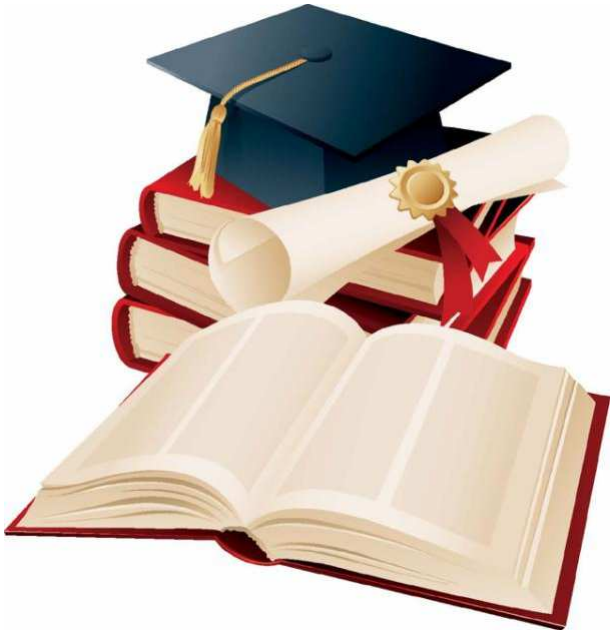
$$m_{\min} = m_v^{(\odot)} - 2.5\lg\left(\frac{E}{f_v^{(\odot)}}\right) = m_v^{(\odot)} - 2.5\lg\left(\frac{\eta\,P_0}{4\pi\,f_v^{(\odot)}\,a^2}\right), \tag{74}$$

здесь $m_v^{(\odot)} = -26.74^{\mathrm{m}}$ – видимая звездная величина Солнца в оптическом диапазоне, $f_v^{(\odot)} = 600$ Вт/м^2 – солнечная постоянная в том же диапазоне. Численный расчет, выполненный для полученных выше значений $a_{\{1,2\}}$, дает следующие значения видимой звездной величины (4 балла):

$$m_{\min\{1,2\}} = \{-11.74^{\mathrm{m}}, -6.15^{\mathrm{m}}\}. \tag{75}$$

Ответ: диаметр пятна $d = 15.05$ мкм; к задаче представляется выражениями (68)-(69), (71)-(75). (15 баллов).

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ



А.1. Основные физические и астрономические постоянные

- *Гравитационная постоянная* – $G = 6.674 \cdot 10^{-11}$ м$^3\cdot$ кг$^{-1} \cdot c^{-2}$
- *Скорость света в вакууме* – $c = 2.998 \cdot 10^8$ м/с
- *Универсальная газовая постоянная* – $R = 8.31$ кг·м$^2\cdot$ с$^{-2}$·К$^{-1}\cdot$ моль$^{-1}$
- *Постоянная Стефана-Больцмана* – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ кг·с$^{-3}$·К$^{-4}$
- *Постоянная Авогадро* – $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
- *Масса протона* – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг
- *Масса электрона* – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ кг
- *Астрономическая единица* – 1 а.е. $= 1.496 \cdot 10^{11}$ м
- *Парсек* – 1 пк = 206265 а.е. $= 3.086 \cdot 10^{16}$ м
- *Постоянная Хаббла* – $H = 72$ км·с$^{-1}$·Мпк$^{-1}$

А.2. Данные о Солнце

- *Радиус* – $6.955 \cdot 10^5$ км
- *Масса* – $1.989 \cdot 10^{30}$ кг
- *Светимость* – $3.827 \cdot 10^{26}$ Вт
- *Спектральный класс* – G2
- *Видимая звездная величина* – -26.74^m
- *Абсолютная болометрическая звездная величина* – $+4.83^m$
- *Показатель цвета (B-V)* – $+0.67^m$
- *Эффективная температура* – 5778 К
- *Средний горизонтальный параллакс* – $8.794''$
- *Солнечная постоянная (во всем спектре) на расстоянии Земли* – 1361 Вт/м^2
- *Солнечная постоянная (в видимом свете) на расстоянии Земли* – 600 Вт/м^2

А.3. Данные о Земле

- *Эксцентриситет орбиты* – 0.017
- *Тропический год* – 365.24219 сут
- *Средняя орбитальная скорость* – 29.8 км/с
- *Период вращения* – 23 часа 56 минут 04 секунды
- *Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0* – $23^\circ\, 26'\, 21.45''$

- *Средний по объему радиус* – 6371.0 км
- *Средний экваториальный радиус* – 6378.14 км
- *Длина земного меридиана* – 20004.276 км
- *Полярный радиус* – 6356.77 км
- *Масса* – $5.974 \cdot 10^{24}$ кг
- *Средняя плотность* – 5.52 г·см$^{-3}$
- *Объемный состав атмосферы* – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim$ 1%)

А.4. Данные о Луне

- *Среднее расстояние от Земли* – 384400 км
- *Минимальное расстояние от Земли* – 356410 км
- *Максимальное расстояние от Земли* – 406700 км
- *Эксцентриситет орбиты* – 0.055
- *Наклон плоскости орбиты к эклиптике* – $5°09'$
- *Сидерический (звездный) период обращения* – 27.321662 сут
- *Синодический период обращения* – 29.530589 сут
- *Радиус* – 1738 км
- *Масса* – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или 1/81.3 массы Земли
- *Средняя плотность* – 3.34 г·см$^{-3}$
- *Визуальное геометрическое альбедо* – 0.12
- *Видимая звездная величина в полнолуние* -12.7^m

А.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin\alpha \pm x\,\cos\alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos\alpha \mp x\,\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg}\alpha \pm \frac{x}{\cos^2\alpha};$$

$$(1+x)^n \approx 1 + n\,x;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.

А.6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.		градусы		сут
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

А.7. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли	г·см$^{-3}$		градусы		
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут†	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час†	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;
† – обратное вращение.

А.8. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см$^{-3}$	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	−12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685†	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.9. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике и график для уравнения времени

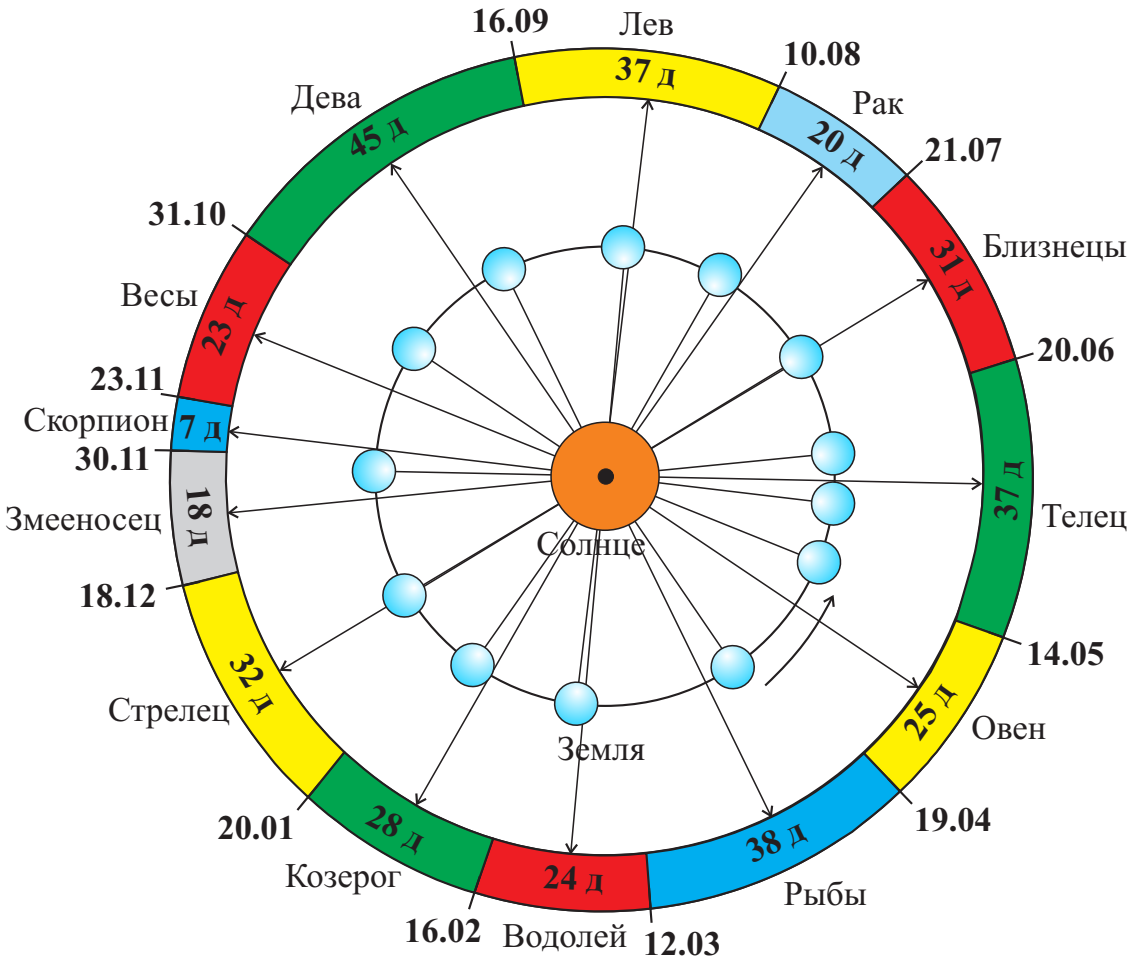


Рис. А.1. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике.

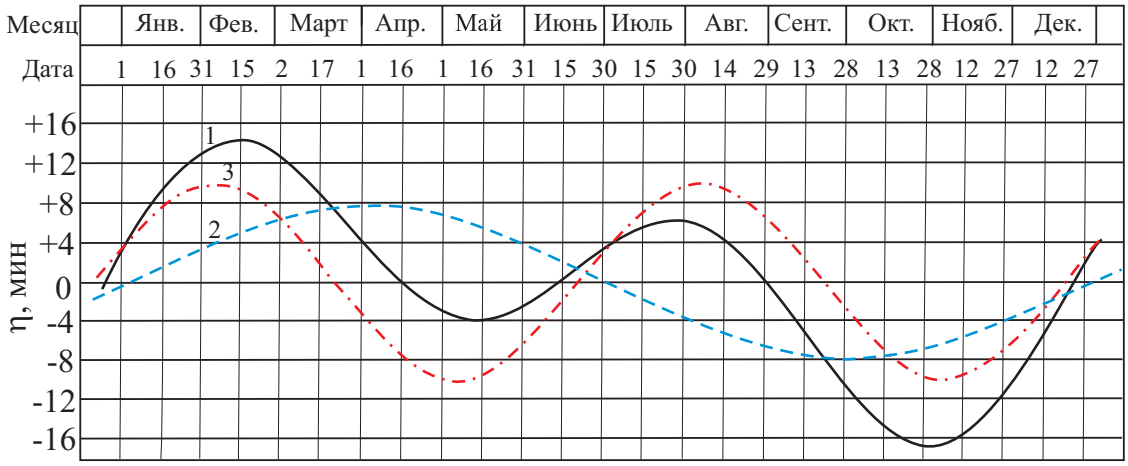


Рис. А.2. График уравнения времени: 1 – уравнение времени, 2 – уравнение центра, 3 – уравнение от наклона эклиптики.

А.10. Географические координаты и номера (N) часовых поясов некоторых городов

Город	Широта	Долгота	N	Город	Широта	Долгота	N
Самара	+53°12′	50°06′	3	Москва	+55°45′	37°37′	2

А.11. Некоторые характеристики звезд

Болометрические поправки ΔM_b

Спектр	ΔM_b	Спектр	ΔM_b		
			Гл. последовательность	Гиганты	Сверхгиганты
B0	– 2.70	F5	– 0.04	– 0.08	– 0.12
B5	– 1.58	F8	– 0.05	– 0.17	– 0.28
A0	– 0.72	G0	– 0.06	– 0.25	– 0.42
A5	– 0.31	G2	– 0.07	– 0.31	– 0.52
F0	– 0.09	G5	– 0.10	– 0.39	– 0.65
F2	– 0.04	G8	– 0.10	– 0.47	– 0.80
		K0	– 0.11	– 0.54	– 0.93
		K2	– 0.15	– 0.72	– 1.20
		K3	– 0.31	– 0.89	– 1.35
		K4	– 0.55	– 1.11	– 1.56
		K5	– 0.85	– 1.35	– 1.86
		M0	– 1.43	– 1.55	– 2.2
		M1	– 1.70	– 1.72	– 2.6
		M2	– 2.03	– 1.95	– 3.0
		M3	– 2.35	– 2.26	– 3.6
		M4	– 2.7	– 2.72	– 3.8
		M5	– 3.1	– 3.4	– 4.0

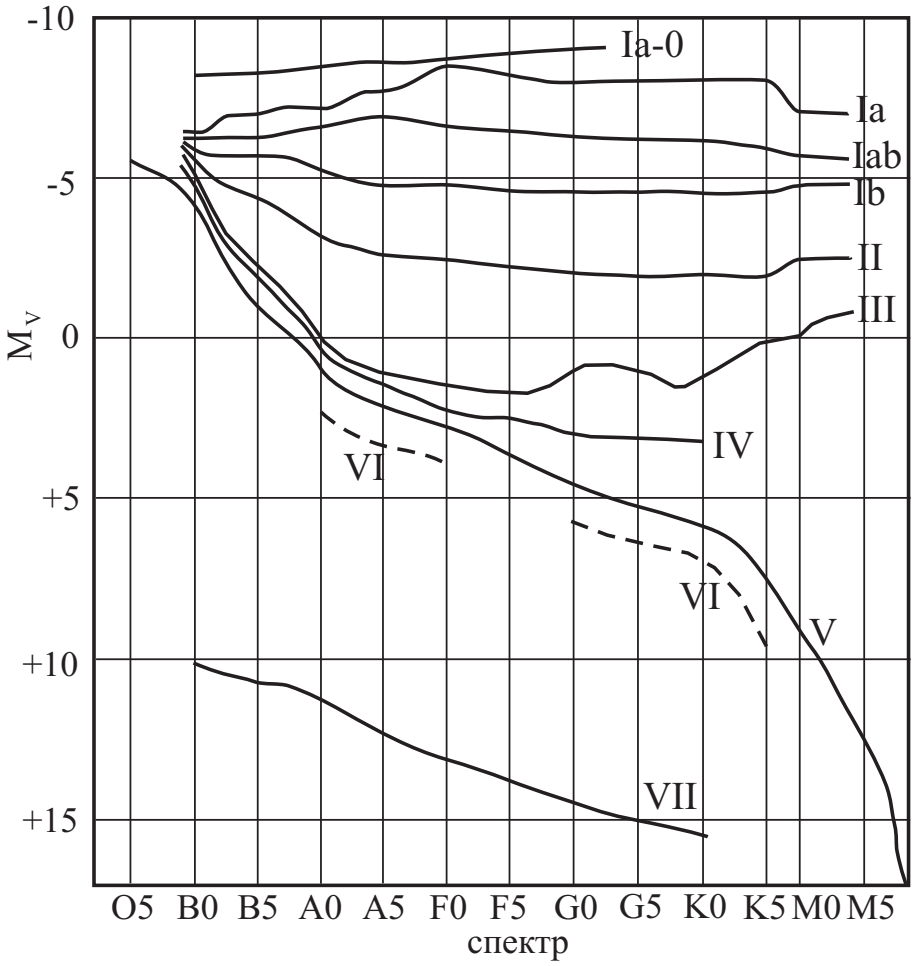


Рис. А.3. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.

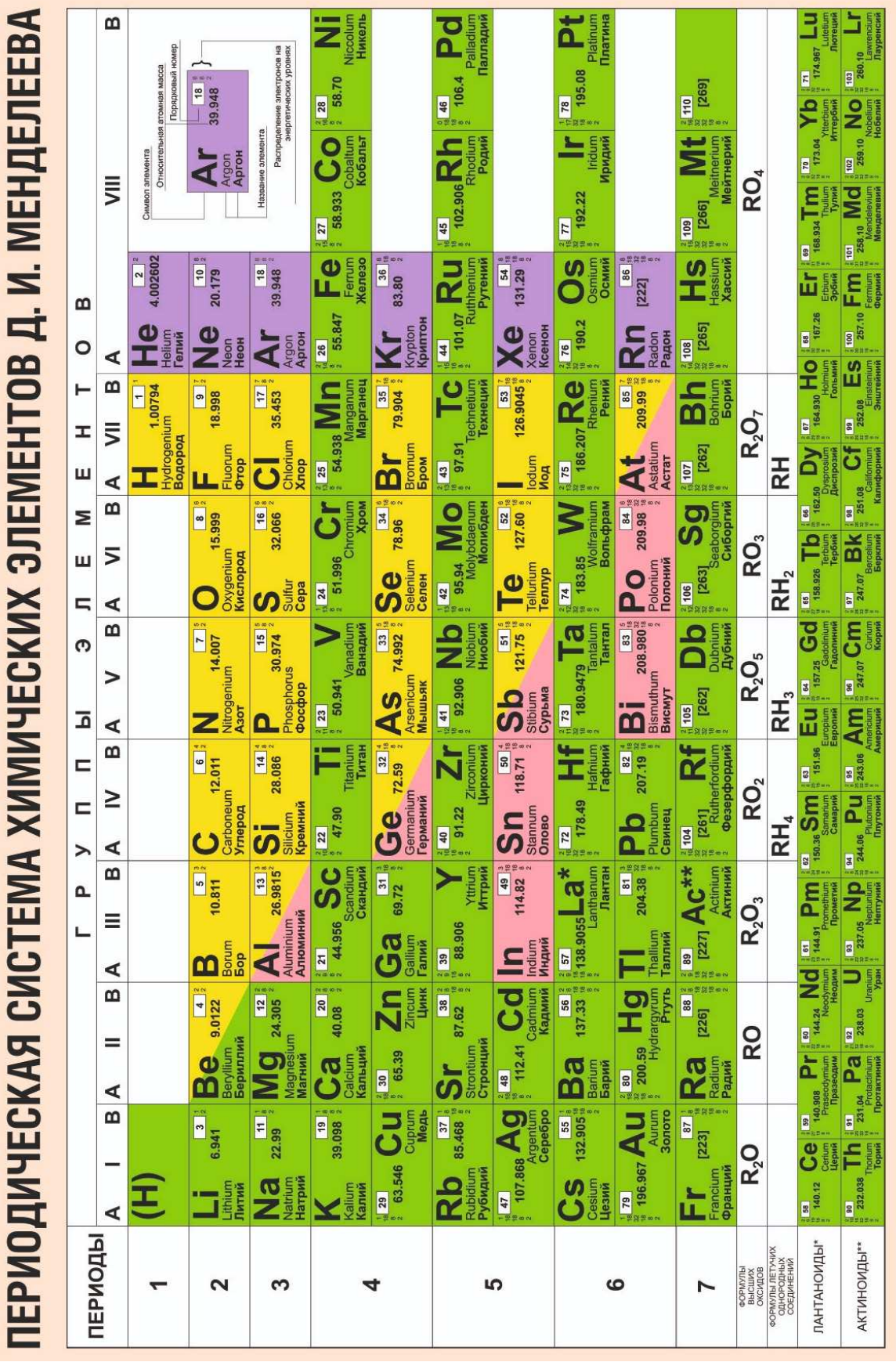


Рис. А.4. Таблица Менделеева.