САМАРСКИЙ РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ДЛЯ ОДАРЕННЫХ ДЕТЕЙ
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ОТКРЫТОЙ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ им. Ф.А. БРЕДИХИНА СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 7-9 КЛАССОВ. СЕЗОН: 2021-2022, ТУР № 2

Самара, 2022 г.

Дорогие Друзья!

Вашему вниманию в данном релизе представлены 10 оригинальных задач двух уровней сложности – «Новичок» (уровень А), «Знаток» (уровень В). Задачи составлены в соответствии с ***Перечнем*** *вопросов, рекомендуемых Центральной предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады школьников по астрономии для подготовки обучающихся 7-9 классов к решению задач ее различных этапов.*

При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!

Ссылка: **«Условия и решения конкурсных задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2022 среди обучающихся 7-9 классов. Тур № 2». – https://sites.google.com/site/samrasolimp/**

Составитель: – ***Филиппов Юрий Петрович***, научный руководитель школы, методист СРЦОД, к.ф.-м.н., доцент кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева.

Верстка в системе LaTeX – Филиппов Ю.П., Белозерская Л.Н.

Памятка участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2022

1. ***Официальный сайт Астрошколы***:
https://sites.google.com/site/samrasolimp/

2. ***Официальная группа в VK***:
vk.com/bredikhinolimp

3. ***Сроки подачи решений задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2022 тура № 2 на проверку***:
15.02.2022-31.03.2022!!!

4. ***Электронный ящик ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2022:***
samrasolimp@mail.ru

5. ***Руководство зарегистрированного участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2022***:

https://sites.google.com/site/samrasolimp/maindocs
или
https://vk.com/bredikhinolimp

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Дорогие Друзья!
Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2022, внимательно ознакомьтесь с «Руководством зарегистрированного участника ОМОА им Ф.А. Бредихина-2022»! Электронный адрес последнего указан в Памятке участника.

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Необычное созвездие небосвода»

1. Как называется созвездие, которое представлено двумя несвязанными участками небосвода? Как традиционно называют их? (2 балла)

2. Как называется созвездие, разделяющее данные участки? Какой большой круг небосвода пересекает данное созвездие в его южной части? (2 балла)

3. В какое время года данные созвездия лучше всего видны в г. Самаре? (2 балла)

4. В какой полусфере небосвода (северной или южной) преимущественно располагаются данные созвездия? (1 балл)

5. Чему равны угловые площади (телесные углы) данных созвездий (в кв. градусах)? Какие места занимают данные созвездия в рейтинге созвездий по занимаемой (угловой) площади небосвода? (2 балла)

6. Назовите (по каталогу Мессье) самые яркие шаровые скопления этих созвездий. (1 балл)

Задача № 2. «Метод суточного параллакса не работает?!»

Дайте развернутые ответы на все поставленные ниже вопросы:

1. В какой точке небосвода для земного наблюдателя должно находиться тело Солнечной системы, чтобы до него в этот момент невозможно было определить геоцентрическое расстояние методом суточного параллакса с использованием текущего значения последнего параметра? (2 балла)

2. Чему при этом равны высота и азимут небесного тела? (2 балла)

3. Чему может быть равна широта точки наблюдения, если данное тело находится для земного наблюдателя точно на эклиптике? (3 балла)

4. Каким небесным телом (верхним или нижним по отношению к земной орбите) является рассматриваемое тело Солнечной системы, если время блуждания радиоимпульса по пути «Земля-тело-Земля» при использовании метода радиолокации в оптимальной конфигурации этого тела, составило 30 минут? (3 балла)

Задача № 3. «К 210-летию со дня рождения Иоганна Галле»

Дайте развернутые ответы на все поставленные ниже вопросы:

1. Назовите три основные причины изменения угла (ε) между небесным экватором и эклиптикой. (3 балла)

2. Зависимость данного угла на больших временных интервалах описывается формулой вида:

$$\varepsilon = 23^\circ 26' 21.406'' - 46.836769'' \cdot T - 0.0001831'' \cdot T^2 + \\ +0.00200340'' \cdot T^3 - 0.576'' \cdot 10^{-6} \cdot T^4 - 4.34'' \cdot 10^{-8} \cdot T^5, \quad (1)$$

здесь T – число столетий, прошедших от эпохи J2000.0. Чему равен данный угол на данный момент? Ответ представить в градусах минутах и секундах дуги, с точностью до сотых долей секунды. (3 балла)

3. В 2022 году исполняется 210 лет со дня рождения знаменитого немецкого астронома Галле И. Г., открывшего планету Нептун. Чему был равен угол между плоскостью орбиты Земли и плоскостью земного экватора в год рождения этого ученого? Ответ представить в градусах минутах и секундах дуги, с точностью до сотых долей секунды. (3 балла)

Задача № 4. «Информационная сфера Земли»

7 мая 1895 года Попов А. С. впервые продемонстрировал работу своего радиопередатчика на заседании Русского физико-химического общества, ознаменовав тем самым *начало эры радиовещания*. Радиоволны, созданные человеком, необратимо распространяются во всех направлениях космического пространства, заполняя *информационную сферу Земли (ИнСЗ)*.

Оцените:

1. За какое время (от момента начала радиовещания) данная сфера вышла за пределы Солнечной системы, если радиус гравитационной границы последней составляет 120 тыс. а. е.? (1 балл)

2. Чему будет равен радиус ИнСЗ (в км, а.е., св.г., пк) на момент празднования дня радио (7 мая) в 2022 году? (2 балла)

3. На какое расстояние удалилась Солнечная система от центра ИнСЗ за время ее существования, если последняя относительно центра Галактики (Млечный Путь) движется со скоростью $V_0 = 220$ км/с? (1 балл)

4. Какую долю составит объем данной сферы на момент 07.05.2022 г. от объема галактического диска (см. рис. 1), если последний можно представить однородным цилиндром высотой $H_D = 600$ пк и диаметром $D_D = 56.7$ кпк? (2 балла)

5. Оцените год, в котором ИнСЗ выйдет за пределы галактического диска Млечного Пути? В расчетах следует учесть, что согласно рис. 1, Солнечная система отстоит от плоскости галактического экватора (плоскости симметрии диска) на 20 пк, и от центра Галактики на 8.3 кпк. (2 балла)

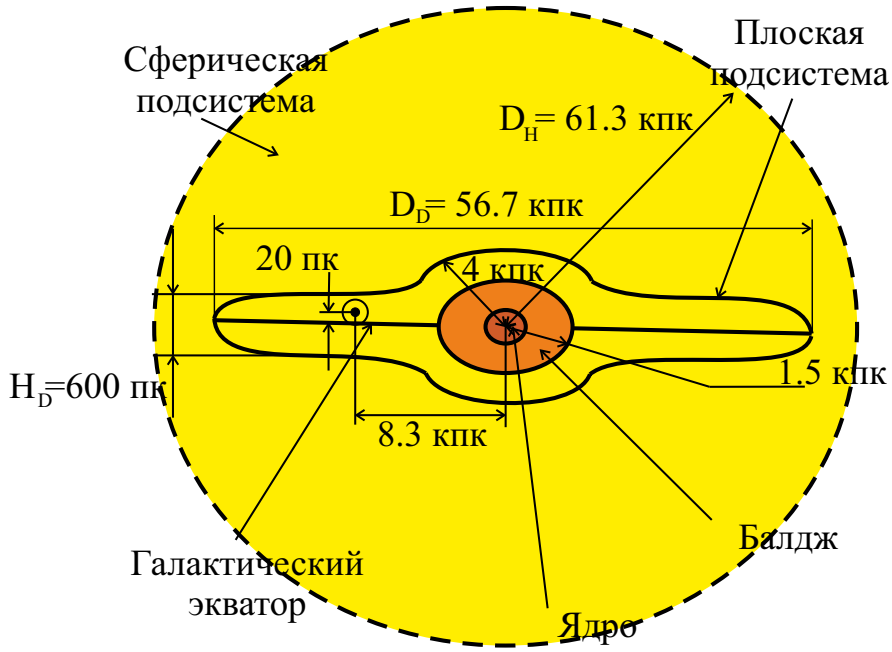


Рис. 1. К определению структуры галактики Млечный Путь.

6. Согласно формуле Дрейка, по самым оптимистичным оценкам в нашей Галактике может существовать до 5000 разумных цивилизаций, способных выходить на радиосвязь. Если полагать, что эти цивилизации распределены в диске Галактики равномерно, оцените через какое количество лет ближайшую цивилизацию достигнет ИнСЗ? (3 балла)

Уровень «Знаток» (уровень B)

Задача № 5. «Незаходящая Луна и заходящее Солнце»

Определите возможные значения географической широты точек поверхности Земли (с учетом конечности размеров дисков данных тел и явления рефракции), для которых Солнце всегда является восходящим и заходящим светилом, а Луна – незаходящим (по крайней мере 24 часа). (11 баллов).

Задача № 6. «Монумент Славы и его тень»

Одной из главных достопримечательностей г. Самары ($\varphi = +53^\circ 12'$) является Монумент Славы (см. рис. 2), который возведен в 1971 году в честь огромных заслуг рабочих авиапромышленности г. Куйбышева (прежнее название Самары), внесших большой вклад в победу в Великой Отечественной войне. Величественный монумент, выполненный из высоколегированной стали, представляет собой фигуру рабочего высотой $h_\text{ф}$, стоящую на высоком постаменте высоты H лицом к р. Волге. Рабочий на поднятых вверх руках держит большие наклоненные плоскости, символизирующие крылья выпущенных в Куйбышеве военных самолетов. Фигура рабочего символизирует труженика, а постамент – возносящийся в небо яркий луч света. Оцените:

1. Высоты постамента H, фигуры человека $h_\text{ф}$ и полную высоту конструкции H_tot, если известно, что отрезок, представленный на фотографии, имеет

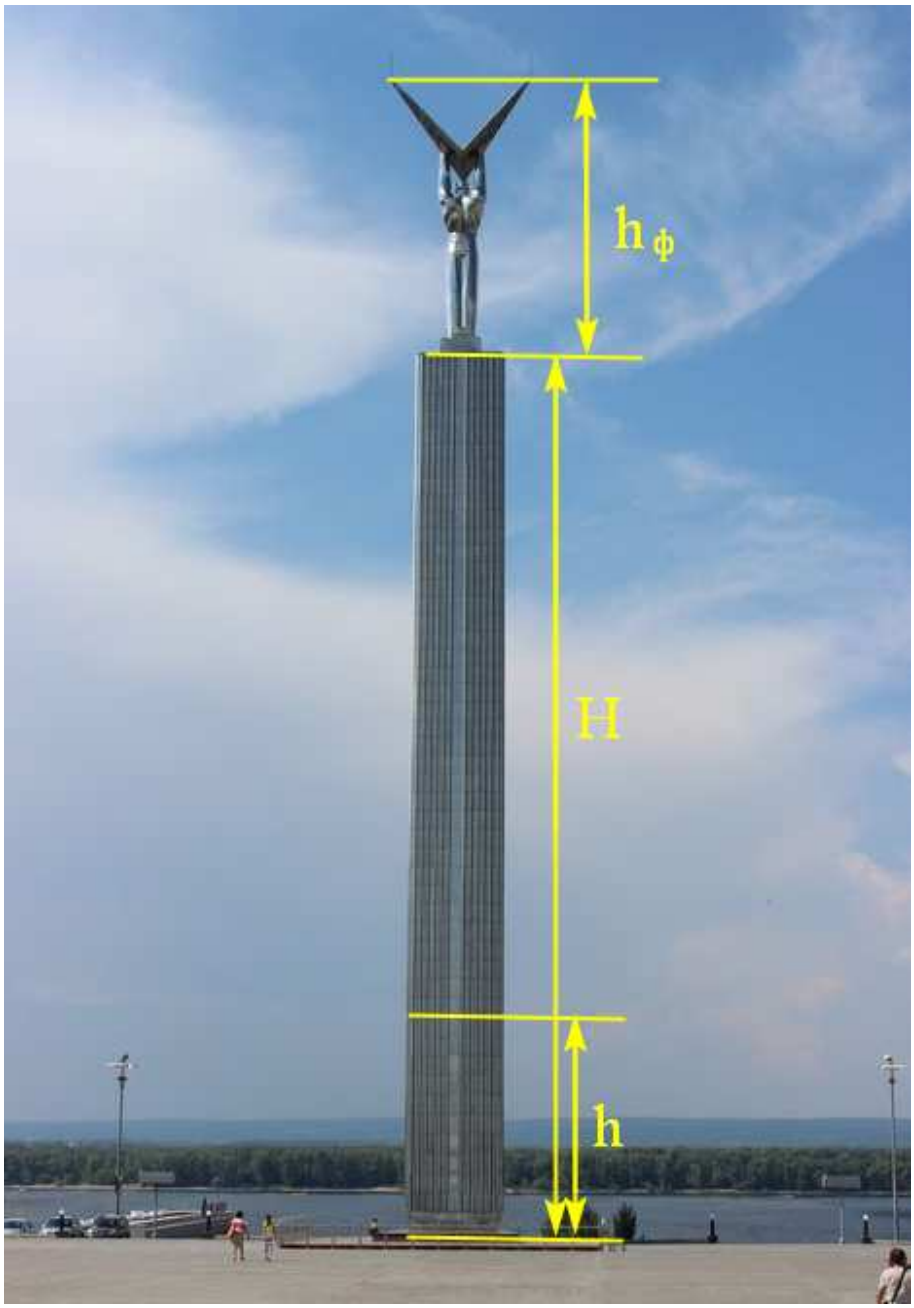


Рис. 2. Монумент Славы в г. Самаре.

длину $h = 10$ м.

2. Оцените дальность прямой видимости с верхней точки монумента.

3. Во сколько раз отличаются длины теней (определяемых в плоскости математического горизонта), отбрасываемых Монументом Славы в ясный истинный полдень, в дни летнего и зимнего солнцестояний? На сколько отличаются (в метрах) длины теней в эти дни? (12 баллов)

Задача № 7. «В сутки открытия заключительного этапа ВСОШ по астрономии в Самаре в 2022 году»

20 марта 2022 года в г. Самаре стартует заключительный этап Всероссийской олимпиады школьников по астрономии.

1. Определите в указанные сутки продолжительность дня (с учетом рефракции и конечности размеров видимого диска Солнца), если весеннее равноденствие в 2021 году наступило 20 марта в 13 час 37 мин по Самарскому

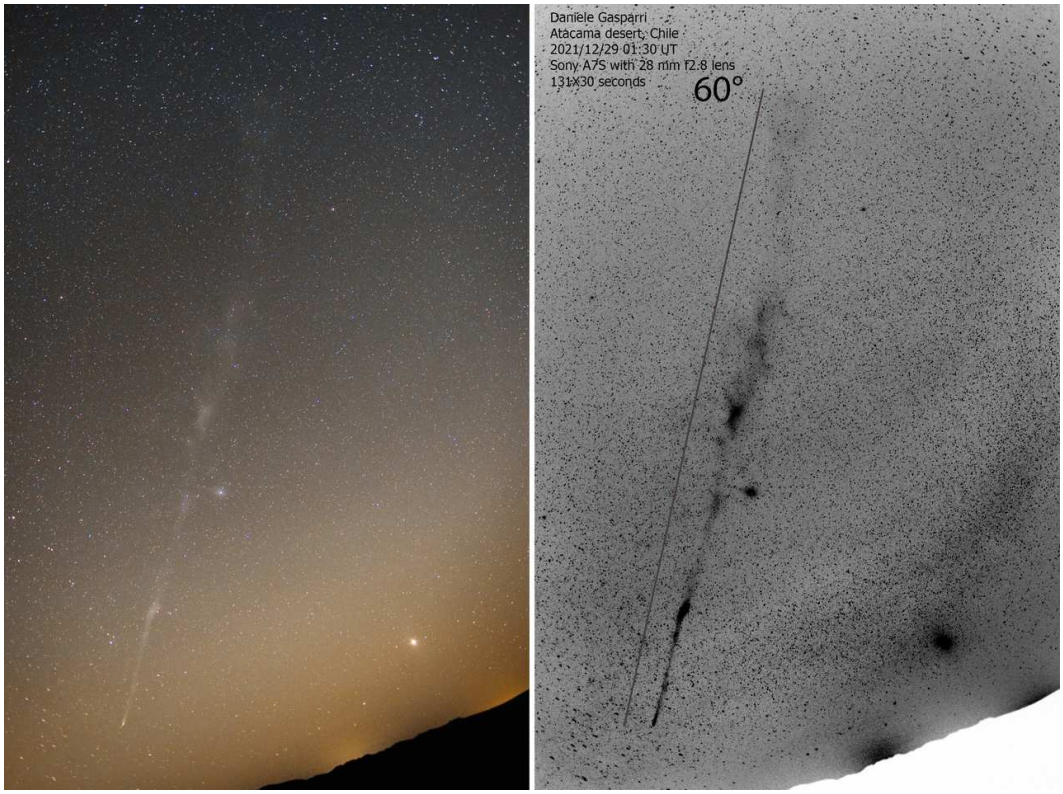


Рис. 3. Комета C/2021 A1 Leonard (автор – Daniele Gasparri).

времени?

2. Чему равны горизонтальные координаты точек восхода и захода Солнца в эти сутки?

3. Моменты восхода и захода Солнца по звездному, истинному солнечному, среднесолнечному и декретному Самарскому времени?

4. Продолжительность астрономической ночи в г. Самаре в указанные сутки. (14 баллов)

Задача № 8. «Хвостатая комета C/2021 A1 Leonard»

На рис. 3 представлен образ кометы C/2021 A1 Leonard, полученный Даниэлем Гаспарри (Daniele Gasparri) 29 декабря 2021 г.

1.а) *Для обучающихся 7-8 классов*: с использованием плагина "Угломер" виртуального планетария Stellarium, определите угол β между направлениями на ядро кометы и на Солнце.

1.б) *Для обучающихся 9 классов*: с использованием экваториальных координат Солнца ($\alpha_\odot = 18^{\rm h}32^{\rm m}49^{\rm s}$, $\delta_\odot = -23°13'30''$) и ядра кометы ($\alpha_c = 21^{\rm h}26^{\rm m}55^{\rm s}$, $\delta_c = -34°44'27''$) на момент съемки, вычислите угол β между направлениями на ядро кометы и на Солнце.

Для всех: определите,

2. Гелиоцентрическое расстояние до ядра кометы на момент съемки. Гелиоцентрическое расстояние Земли в тот же момент было равно $r_\odot = 147.119$ млн. км, а геоцентрическое расстояние до кометы – $\Delta_c = 107.851$ млн. км.

3. Истинную длину (в км) видимой с Земли части ее хвоста, если полагать, что последний относится к первому классу по классификации Бредихина Ф.

А. (14 баллов)

Задача № 9. «Планетарный гравитационный лифт для АМС»

Предложена идея использования эффекта гравитационного маневра для экономии топлива автоматической межпланетной станции (АМС) при ее запуске за пределы Солнечной системы. Стратегия запуска следующая: с круговой околоземной орбиты высоты $h = 1000$ км выполняется перевод на орбиту Гомана-Цандера-Ветчинкина (ГЦВ-орбиту), афелий которой лежит на орбите Марса. Выполнив гравитационный маневр в малой окрестности Марса и получив приращение импульса относительно Солнца, АМС переходит на ГЦВ-орбиту, афелий которой лежит уже на орбите Юпитера. Такие переходы продолжаются в окрестности каждой планеты-гиганта и лишь в окрестности Нептуна АМС получает приращение импульса, которого уже достаточно для выхода за пределы Солнечной системы. Оцените

1. Время перелета по ГЦВ-орбите между каждой парой планет. Полное время всех таких перелетов. Следует полагать, что продолжительностью гравитационного маневра в окрестности каждой планеты можно пренебречь, орбиты всех планет являются круговыми и лежащими в одной плоскости; взаимное расположение планет удовлетворяет условию стратегии.

2. Вычислите минимальную работу, которую совершают гравитационное поле планеты + ракетные двигатели АМС для перехода с одной ГЦВ-орбиты на другую в окрестности каждой планеты – участницы гравитационного подъема АМС. В окрестности какой планеты эта работа максимальна? Минимальна? (14 баллов)

Задача № 10. «Кеплеровы элементы орбиты тела»

Оцените кеплеровы элементы орбиты (большая полуось и эксцентриситет эллиптической орбиты; ее наклонение к плоскости эклиптики; геоцентрическая долгота восходящего узла, отсчитываемая в плоскости эклиптики; аргумент перигея, отсчитываемый в плоскости орбиты) для тела, движущегося вокруг Земли, если известны следующие данные наблюдений:

1. Относительное изменение освещенности (в течение длительного времени наблюдений), создаваемой телом у поверхности Земли в одной и той же фазе, равно $\eta_E = (E_{\max} - E_{\min})/(2\bar{E}) = 10.97\%$, где $\bar{E} = (E_{\max} + E_{\min})/2$.

2. Известно, что расстояние между двумя фокусами эллипса орбиты этого тела фактически равно радиусу геостационарной орбиты Земли.

3. Данное тело было замечено в наибольшем удалении от эклиптики в малой окрестности звезды α Тельца (Альдебаран).

4. В момент наблюдений восходящий узел орбиты совпал с точкой осени.

5. По данным наблюдений установлено, что наибольший угловой диаметр тело имело ровно через пять земных суток после последнего прохождения по диску Солнца. В процессе транзита данное тело приближалось к северному

полюсу эклиптики. О каком теле идет речь? (15 баллов)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Необычное созвездие небосвода»

Решение. **1.** Созвездие Змеи представлено двумя несвязанными участками небосвода (см. рис. 4): северо-западная часть – "Голова Змеи" и юго - восточная часть – "Хвост Змеи". (2 балла)

2. Созвездие Змееносца является *разделяющим* данные участки. С использованием карты звездного неба или виртуального компьютерного планетария легко убедиться в том, что область данного созвездия пересекает (почти посередине, см. рис. 4) *небесный экватор*, а *эклиптика* – в его южной части. (2 балла)

3. Прямые восхождения точек созвездия Змеи заключены в интервале $(15^{\rm h}05^{\rm m}, 18^{\rm h}52^{\rm m})$, а для Змееносца – $(15^{\rm h}55^{\rm m}, 18^{\rm h}39^{\rm m})$. Лучше всего данные созвездия видны в меридиане (в верхней кульминации), в истинную полночь. Следовательно, прямое восхождение Солнца в эти моменты должно быть на $12^{\rm h}$ меньше, т.е. $(03^{\rm h}05^{\rm m}, 06^{\rm h}52^{\rm m})$. Учитывая, что в день весеннего равноденствия прямое восхождение Солнца составляет $0^{\rm h}00^{\rm m}$, а в течение одних суток его величина у Солнца изменяется на $4^{\rm m}$, то лучшие условия для наблюдений достигаются через $47 \div 103$ сут. после дня весеннего равноденствия, т.е. 6(7)

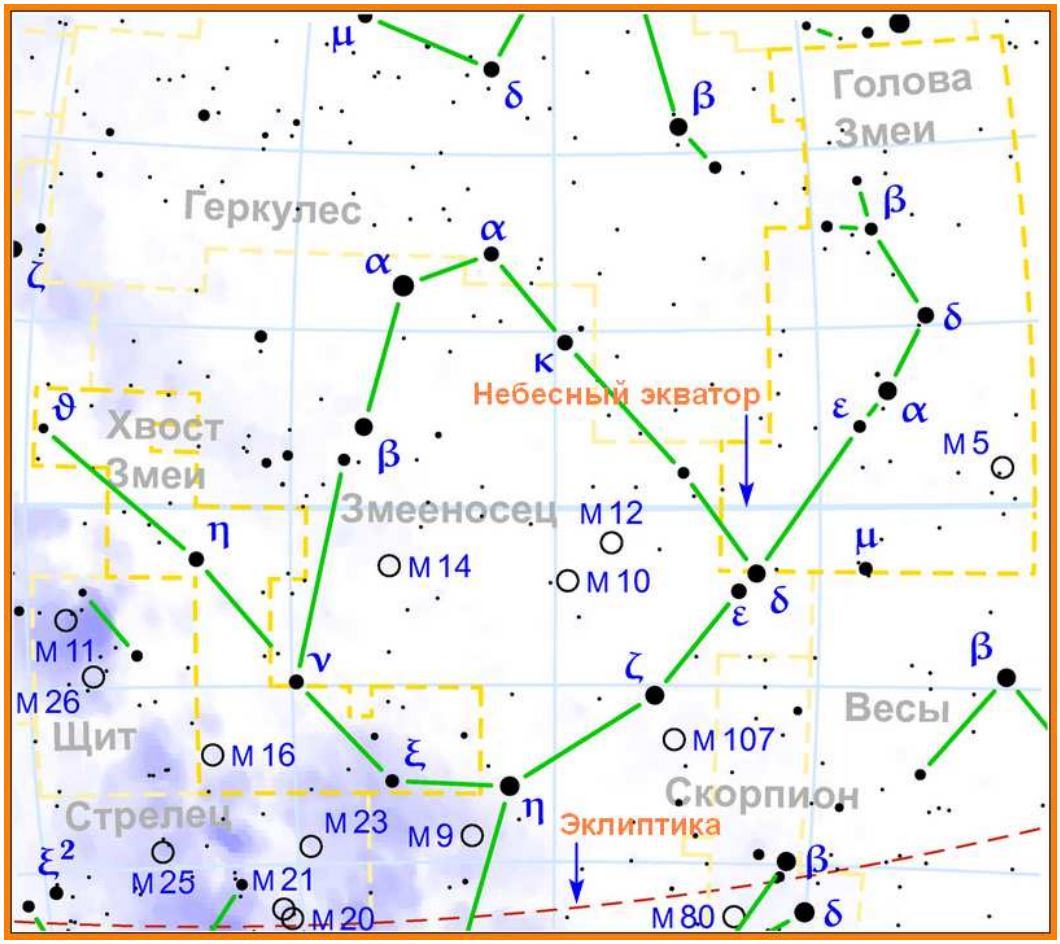


Рис. 4. К определению созвездий Змеи и Змееносца (источник – https://ru.wikipedia.org/wiki/).

мая ÷ 1(2) июля. (2 балла)

4. Восточная часть созвездия Змеи ("хвост Змеи") и созвездие Змееносца расположены преимущественно в южной полусфере. Западная часть созвездия Змеи ("голова Змеи") – преимущественно в северной полусфере. (1 балл)

5. Угловая площадь созвездия Змеи составляет 637 кв. градусов, а созвездия Змееносца – 948 кв. градусов. В рейтинге созвездий по занимаемой (угловой) площади данные созвездия занимают 23 и 11 место соответственно. (2 балла)

6. Самыми яркими шаровыми скоплениями из каталога Мессье в а) созвездии Змеи является M5, б) созвездии Змееносца – M9, M10, M12, M14, M19, M62. (1 балл)

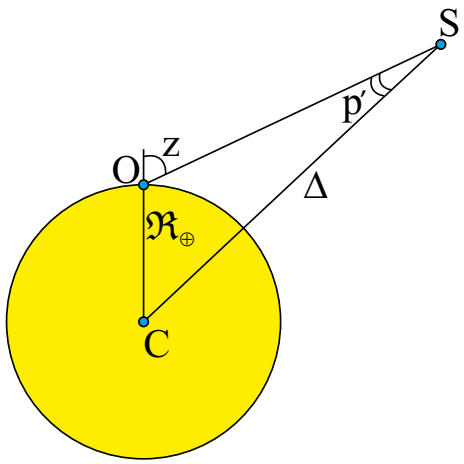


Рис. 5. К определению суточного параллакса тела Солнечной системы.

Задача № 2. «Метод суточного параллакса не работает?!»

Решение. **1.** Рассмотрим рис. 5, соответствующий условию задачи. Здесь в точке S расположено небесное тело, в т. O – земной наблюдатель, т. C – центр Земли. Согласно определению, ***суточным параллаксом*** (p') небесного тела называется угол, под которым виден радиус Земли с небесного тела, проведенный в точку, где находится наблюдатель. Воспользуемся теоремой синусов для ΔCSO:

$$\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{\sin p'} = \frac{\Delta}{\sin(180^\circ - z)}, \;\Rightarrow\; \Delta = \mathfrak{R}_\oplus \frac{\sin z}{\sin p'}, \qquad (2)$$

здесь z – зенитное расстояние небесного тела для наблюдателя, $\mathfrak{R}_\oplus$ – радиус Земли-шара. Из рис. 5 очевидно, что чем меньше z, тем меньше p'. При $z \to 0, p'$ также стремится к нулю. Согласно (2), возникает неопределенность в расчете геоцентрического расстояния тела типа $\frac{0}{0}$, которую невозможно разрешить по данным наблюдений. Следовательно, если тело Солнечной системы находится для наблюдателя в зените, то определить Δ, согласно (2) невозможно. (2 балла)

2. Как известно, высота зенита $h_z = 90^\circ$, а азимут не определен. (2 балла)

3. Как известно, высота светила в верхней кульминации определяется выражением вида:

$$h_{\max} = 90^\circ - \varphi + \delta, \qquad (3)$$

где φ – широта места наблюдения, δ – склонение небесного тела. Поскольку $h_{\max} = 90^\circ$, то из (3) следует $\varphi = \delta$. Так как светило находится точно на эклиптике, то его склонение может быть заключено в интервале:

$$-\varepsilon \le \delta \le \varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon = 23^\circ 26'.$$

Значит широта возможного места наблюдения есть (3 балла)

$$-23^\circ 26' \leq \varphi \leq 23^\circ 26'. \tag{4}$$

4. Метод радиолокации ограничен в применении порогом чувствительности приемника радиоволн, рассеянных данным телом Солнечной системы. Чем дальше от Земли данное тело, тем меньше интенсивность рассеянных волн. Следовательно, измерение расстояния данным методом необходимо проводить в конфигурации, когда расстояние между Землей и телом является минимальным. Следовательно, в случае верхнего тела такой конфигурацией должно быть противостояние. В случае нижнего тела – нижнее соединение.

Однако в случае нижнего тела необходимо учесть, что рассеянные телом волны будут приходить вместе с радиоизлучением Солнца – мощным источником радиопомех. Чтобы избежать последние, необходимо чтобы данное тело удалилось на максимальный угол от Солнца, следовательно, оптимальной конфигурацией будет восточная или западная элонгации.

Нетрудно убедиться, что расстояние до нижнего тела в элонгации не может быть больше $a_\oplus$ – среднего расстояния от Земли до Солнца. Следовательно, максимальное время блуждания радиоимпульса составляет для нижнего тела:

$$r_{\max} = \frac{2a_\oplus}{c} = 997 \text{ с.} = 16.62 \text{ мин.}, \tag{5}$$

что меньше указанного значения. Значит данное тело является верхним. (3 балла).

Задача № 3. «К 210-летию со дня рождения Иоганна Галле»

Решение. **1.** Основными причинами изменения угла ε между эклиптикой и небесным экватором являются:

а) прецессия земной оси с периодом $T_1 = 25765$ лет и амплитудой $A_1 = 23.5^\circ$,

б) нутация оси вращения Земли с периодом $T_2 = 18.61$ лет и амплитудой $A_2 = 17''$,

в) возмущения орбиты Земли в результате гравитационного действия других планет (меняют положение эклиптики) с амплитудой $A_3 = 12''$. (3 балла)

2. Рассчитаем угол ε на момент окончания второго тура данной олимпиады 01.04.2022 г.

Определим T на данный момент:

$$T_0 = \left(21 + \frac{31 + 28 + 31}{365.2425}\right) : 100 = 0.212464 \text{ столетия.} \tag{6}$$

Согласно формуле (1), расчет ε дает значение (3 балла):

$$\varepsilon_0 = \varepsilon(T_0) = 23^\circ 26' 21.406'' - 9.951'' - (8.265 \cdot 10^{-6})'' + \\ +(1.921 \cdot 10^{-5})'' - (1.174 \cdot 10^{-9})'' - (1.879 \cdot 10^{-11})'' = 23^\circ 26' 11.45''. \tag{7}$$

3. Поскольку в 2022 году исполняется 210 лет со дня рождения Галле И. Г., то его год рождения есть 1812 год. Рассчитаем угол ε на начало данного года, тогда

$$T = -(2000 - 1812) = -1.88 \text{ столетия.}$$

В итоге получаем (3 балла)

$$\varepsilon_1 = 23^\circ 26' 21.406'' + 88.053'' - (6.471 \cdot 10^{-4})''$$
$$-(1.331 \cdot 10^{-2})'' - (7.195 \cdot 10^{-6})'' + (1.019 \cdot 10^{-6})'' = 23^\circ 27' 49.45''. \quad (8)$$

Ответ: к задаче представлен выражениями (7)-(8).

Задача № 4. «Информационная сфера Земли»

Решение. **1.** Определим время выхода ИнСЗ за пределы Солнечной системы (1 балл):

$$\tau_1 = \frac{R_{SS}}{c} = 1.896 \text{ года.} \quad (9)$$

2. Определим радиус ИнСЗ на момент 7 мая 2022 года:

$$R_{\text{ИнСЗ}} = c\,\tau_2 = 1.202 \cdot 10^{15} \text{ км} = 8.038 \cdot 10^6 \text{ а.е.} = 127 \text{ св.л.} = 38.96 \text{ пк}, \quad (10)$$

где $\tau_2 = 127$ лет (2 балла).

3. Определим расстояние, на которое удалилась Солнечная система от центра ИнСЗ за время ее существования (1 балл):

$$r_{ss} = V_0\,\tau_2 = 8.82 \cdot 10^{11} \text{ км} = 5894 \text{ а.е.} \quad (11)$$

4. Искомую долю можно записать так (2 балла)

$$\eta = \frac{V_{\text{ИнСЗ}}}{V_{\text{ГД}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi\, R^3_{\text{ИнСЗ}}}{\frac{\pi}{4} D_D^2\, H_D} = \frac{16\, R^3_{\text{ИнСЗ}}}{3 H_D\, D_D^2} = 1.64 \cdot 10^{-7}. \quad (12)$$

5. Очевидно, что ИнСЗ выйдет за пределы галактического диска в его северной части. При этом радиус сферы будет равен

$$R^{(2)}_{\text{ИнСЗ}} = H_D/2 - 20 = 280 \text{ пк.} \quad (13)$$

Определим момент времени когда ИнСЗ будет иметь такой радиус

$$\tau_3 = \frac{R^{(2)}_{\text{ИнСЗ}}}{c} = 913 \text{ лет.} \quad (14)$$

Значит выход произойдет в 2808 году. (2 балла)

6. Прежде всего определим объем диска Галактики, приходящийся на одну разумную цивилизацию:

$$V_1 = \frac{V_D}{N} = \frac{\pi/4\, D_D^2\, H}{N} = 3.030 \cdot 10^8 \text{ пк}^3. \quad (15)$$

Определим размер куба имеющего данный объем:

$$a_1 = \sqrt[3]{V_1} = 672.7 \text{ пк} > H,$$

очевидно, размер такого куба больше толщины диска Галактики, следовательно, в качестве элементарного объема, приходящегося на одну разумную цивилизацию, следует рассматривать параллелепипед высотой H и квадратным основанием со стороной b_1:

$$b_1 = \sqrt{\frac{V_1}{H}} = 710.6 \text{ пк} > H.$$

Следовательно, среднее расстояние между разумными цивилизациями в диске Галактики также равно 710.6 пк. Время, в течение которого ИнСЗ достигнет ближайшей разумной цивилизации составит

$$\tau_4 = \frac{b_1}{c} = 2317 \text{ лет}. \tag{16}$$

Следовательно, ИнСЗ достигнет ближайшей разумной цивилизации лишь в 4212 году н.э. (3 балла).

Ответ: к задаче представлен выражениями (9)-(12), (14), (16).

Уровень «Знаток» (уровень B)

Задача № 5. «Незаходящая Луна и заходящее Солнце»

Решение. **1.** Как известно, точечное светило является незаходящим, если выполняется условие (1 балл):

$$|\delta| \geq (90^\circ - |\varphi|). \tag{17}$$

Рассмотрим случай северного географического полушария, т.е. $\varphi > 0$, причем для незаходящего светила $\delta > 0$. Следовательно, в предельном случае (1) запишется в виде:

$$\delta = 90^\circ - \varphi, \;\; \Rightarrow \;\; \varphi = 90^\circ - \delta.$$

Для истинного Солнца имеем

$$\varphi_\odot^{(0)} = 90^\circ - \delta_\odot, \tag{18}$$

где $\delta_\odot$ – склонение истинного Солнца (1 балл). При наблюдении с Земли Солнце имеет конечные размеры, при этом средний угловой радиус Солнца $\bar{\rho}''_\odot = 16'$. Чтобы Солнце было незаходящим, в данном случае необходимо, чтобы в нижней кульминации верхняя точка диска Солнца располагалась на горизонте. Поскольку ее склонение больше $\delta_\odot$ на $\bar{\rho}''_\odot$, то широта, с которой Солнце будет являться незаходящим светилом, представляется в виде (2 балла):

$$\varphi_\odot^{(1)} = 90^\circ - (\delta_\odot + \bar{\rho}''_\odot). \tag{19}$$

Явление рефракции световых волн в атмосфере Земли "приподнимает" все светила, находящиеся на горизонте на величину рефракции $\delta z = 35'$, следовательно, искомая широта местности есть (2 балла)

$$\varphi_{\odot}^{(2)} = 90^\circ - \delta_{\odot} - \bar{\rho}''_{\odot} - \delta z = 65^\circ 43'. \qquad (20)$$

Следовательно, при $\varphi < 65^\circ 43'$ Солнце является всегда восходящим и заходящим светилом. Луна движется по орбите, наклонение которой к плоскости эклиптики равно $i_{☾} = 5^\circ 9'$. Следовательно, склонение Луны может изменяться в пределах (2 балла):

$$-\varepsilon - i_{☾} \le \delta_a \le \varepsilon + i_{☾}, \quad \text{или} \quad -28^\circ 35' \le \delta_{☾} \le +28^\circ 35'.$$

Учитывая, что средний угловой радиус Луны равен $\bar{\rho}''_{☾} = 16'$, можно по аналогии с (20), записать формулу для широты местности, начиная с которой Луна бывает незаходящей (по крайней мере 24 часа) (2 балла):

$$\varphi_{☾}^{(2)} = 90^\circ - \delta_{☾} - \bar{\rho}''_{☾} - \delta z = 60^\circ 34'.$$

Следовательно, для интервала широт $(60^\circ 34', 65^\circ 43')$ и $(-65^\circ 43', -60^\circ 34')$, в случае южного полушария, выполняется условие настоящей задачи. (1 балл).

Ответ: $(-65^\circ 43', -60^\circ 34')$ и $(60^\circ 34', 65^\circ 43')$. (11 баллов).

Задача № 6. «Монумент Славы и его тень»

Решение. **1.** Определим с помощью линейки по рис. 2 линейные размеры данного отрезка h'=25 мм, постамента H'=100 мм, и фигуры человека $h'_{\text{ф}}$=32 мм. Заметим, что данная фотография сделана с большого расстояния относительно постамента с высоким разрешением (по-видимому, с помощью объектива типа "телевик", который характеризуется значительным фокусным расстоянием и небольшим полем зрения, которое можно считать плоским, следовательно линейный масштаб фотографии по всему полю кадра можно считать постоянным). Тогда запишем пропорцию:

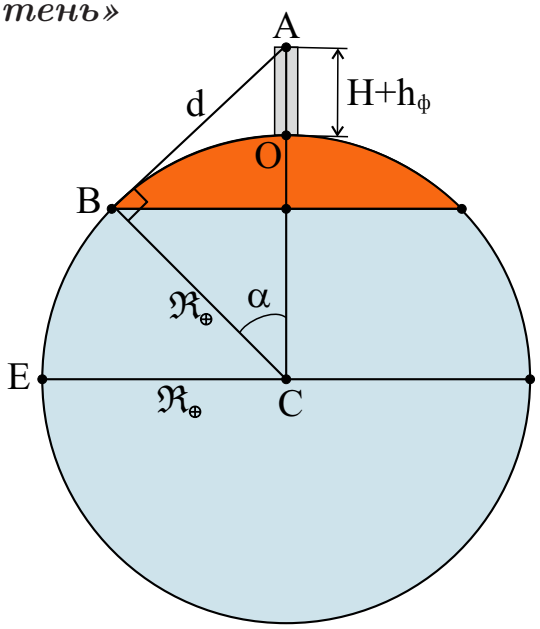


Рис. 6. К определению дальности прямой видимости.

$$\frac{h}{h'} = \frac{H}{H'} = \frac{h_{\text{ф}}}{h'_{\text{ф}}}, \quad \Rightarrow$$

$$H = H'\left(\frac{h}{h'}\right) = 40 \text{ м}, \quad h_{\text{ф}} = h'_{\text{ф}}\left(\frac{h}{h'}\right) = 12.8 \text{ м}. \qquad (21)$$

Полная высота монумента есть $H_{\rm tot} = H + h_{\phi} = 52.8$ м. (3 балла)

2. Дальность прямой видимости можно определить из прямоугольного треугольника $\triangle ABC$ (см. рис. 6) по теореме Пифагора (4 балла):

$$d = \sqrt{(\mathfrak{R}_{\oplus} + H + h_{\phi})^2 - \mathfrak{R}_{\oplus}^2} \approx \sqrt{2\mathfrak{R}_{\oplus}(H + h_{\phi})} = 25.94 \text{ км}. \qquad (22)$$

3. Длину тени от монумента в полдень (согласно рис. 7) можно представить в виде (1 балл):

$$L = (H + h_{\phi})/\operatorname{tg} h_{\odot}, \qquad (23)$$

здесь $h_{\odot}$ – высота Солнца в полдень, определяемая для Самары в виде (1 балл):

$$h_{\odot} = 90^{\circ} - \varphi + \delta_{\odot}, \qquad (24)$$

где $\delta_{\odot}$ – склонение Солнца на момент наблюдений. Склонение Солнца в течение года изменяется в пределах (1 балл)

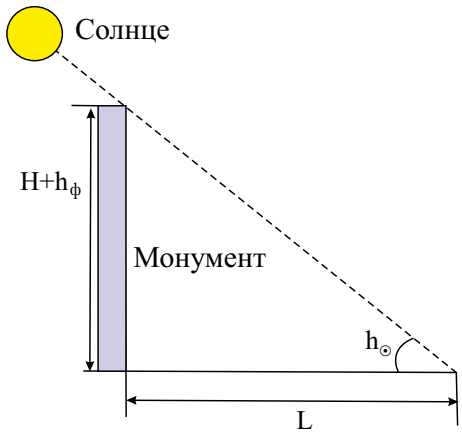


Рис. 7. К определению длины тени монумента.

$$-\varepsilon \le \delta_{\odot} \le \varepsilon, \quad \text{где} \quad \varepsilon = 23^{\circ}26'. \qquad (25)$$

Значит значения высоты Солнца в дни солнцестояний представляются в виде (1 балл):

$$h_s = 90^{\circ} - \varphi + \varepsilon = 60^{\circ}14', \quad h_w = 90^{\circ} - \varphi - \varepsilon = 13^{\circ}22', \qquad (26)$$

здесь и далее географические координаты г. Самары есть $\varphi_s = 53^{\circ}12'$, $\lambda_s = 3^{\rm h}20^{\rm m} = 50^{\circ}06'$. Из (22)-(25) следует, что

$$L_s = (H + h_{\phi})/\operatorname{tg} h_s = 30.2 \text{ м}, \quad L_w = (H + h_{\phi})/\operatorname{tg} h_w = 222.2 \text{ м}. \qquad (27)$$

В результате получаем (1 балл)

$$\frac{L_w}{L_s} = 7.36, \quad \Delta L = L_w - L_s = 192 \text{ м}. \qquad (28)$$

Ответ: к задаче представлен выражениями (21)-(22), (28). (12 баллов).

Задача № 7. «В сутки открытия заключительного этапа ВСОШ по астрономии в Самаре в 2022 году»

Решение. **1.** Определим прежде всего момент наступления астрономической весны (АВ) в 2022 году. Как известно, данный год является невисокосным, следовательно он содержит 365 суток. Продолжительность тропического года составляет $T_{\rm тр}$=365.24219 сут. Значит в 2022 году АВ наступит на

τ_0=0.24219 сут. позже, чем в 2021 году, т.е. на 5 часов 49 мин. Т.о, момент наступления АВ в 2022 году – 19 час. 26 мин. по Самарскому времени.

Учет эффекта нутации оси вращения Земли приводит к уточненному моменту – $T_d^{(\Upsilon)} = 19$ час. 33 мин. Значит в указанный момент склонение истинного Солнца точно равно нулю ($\delta_\odot = 0°$). В эти сутки Солнце движется фактически по небесному экватору и приближенное значение продолжительности дня составит $\tau_d^{(0)} \approx 12$ час. (без учета рефракции и конечности размеров видимого диска Солнца) (1 балл).

Определим приближенные значения моментов восхода и захода Солнца в указанную дату по декретному Самарскому времени. Согласно определению, декретное время есть

$$T_d = T_N + 1^{\mathrm{h}}, \tag{29}$$

где T_N – поясное время, определяемое выражением:

$$T_N = T_0 + N^{\mathrm{h}}, \tag{30}$$

здесь T_0 – всемирное время; N^{h} – номер часового пояса Самары ($N^{\mathrm{h}} = 3^{\mathrm{h}}$). С другой стороны, можно определить местное среднее солнечное время.

$$T_m = T_\odot + \eta, \;\; \text{или} \;\; T_m = T_0 + \lambda, \tag{31}$$

здесь $T_\odot, \eta$ – истинное солнечное время и уравнение времени соответственно; λ – долгота места нахождения.

Истинное солнечное время можно определить через часовой угол ($t_\odot$) истинного солнца:

$$T_\odot = t_\odot + 12^{\mathrm{h}}. \tag{32}$$

Из (29)-(32) следует явное выражение для декретного времени (1 балл):

$$T_d = t_\odot + \eta + N^{\mathrm{h}} + 13^{\mathrm{h}} - \lambda. \tag{33}$$

Далее задачу будем решать методом последовательных приближений:

1.а) *Низшее приближение.* Будем полагать, что склонение Солнца в течение всего дня 20 марта постоянно и равно $\delta_\odot^{(0)} = 0°$. Тогда часовые углы восхода и захода Солнца будут

$$t_{\odot,r}^{(0)} = 18^{\mathrm{h}}, \;\; t_{\odot,s}^{(0)} = 6^{\mathrm{h}}. \tag{34}$$

Согласно (33), время восхода и захода: $T_{d,r}^{(0)} = 6^{\mathrm{h}}48^{\mathrm{m}}$, $T_{d,s}^{(0)} = 18^{\mathrm{h}}48^{\mathrm{m}}$, при $\eta = 8^{\mathrm{m}}$ (см. рис. А.2 приложения А). Тогда промежутки времени от восхода и захода до момента наступления весеннего равноденствия (1 балл):

$$\tau_r = 12^{\mathrm{h}}45^{\mathrm{m}}, \;\; \tau_s = 0^{\mathrm{h}}45^{\mathrm{m}}.$$

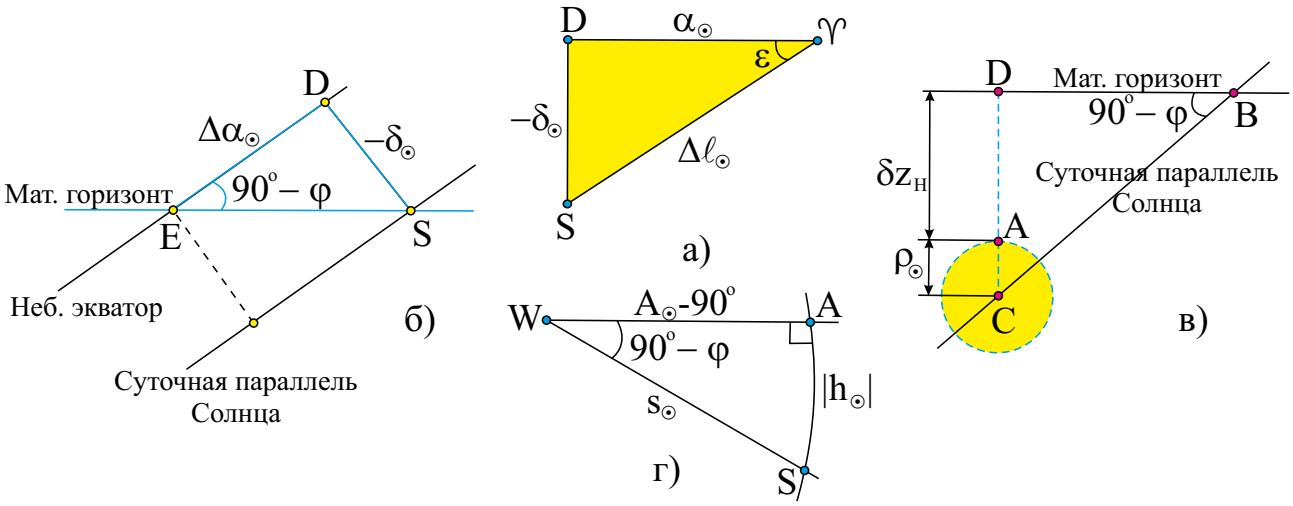


Рис. 8. К определению а) склонения Солнца в моменты его восхода и захода; б) разности прямых восхождений точки востока (E) и Солнца в момент восхода последнего; в) промежутка времени $\Delta\tau_2$; г) дуги экватора $s_\odot$.

Учтем далее, что в окрестности точки весны Υ эклиптика образует угол ε с экватором. Рассмотрим плоский треугольник $\Delta\Upsilon DS$ (см. рис. 8.а): здесь ΥD – дуга небесного экватора. ΥS – дуга эклиптики, DS – дуга круга склонения Солнца.

1.б) *Приближение первого уровня.* Определим склонение Солнца на момент, отстоящий от момента наступления AB на величину τ. Из рисунка видно, что

$$-\delta_\odot = \Delta\ell_\odot \sin\varepsilon, \quad \text{где} \quad \Delta\ell_\odot = \frac{360^\circ}{T_{\text{тр}}}\tau, \quad \Rightarrow \quad \delta_\odot = -\frac{360^\circ}{T_{\text{тр}}}\tau \sin\varepsilon. \tag{35}$$

Тогда значения склонения Солнца в момент восхода и захода Солнца будут

$$\delta^{(1)}_{\odot,r} = -0.2082^\circ = -12.49', \quad \delta^{(1)}_{\odot,s} = -0.0122^\circ = -0.73'. \tag{36}$$

Рассмотрим плоский треугольник ΔESD (см. рис. 8.б), здесь E – точка востока. Очевидно, что

$$\text{tg}(90^\circ - \varphi) = -\frac{\delta_\odot}{\Delta\alpha_\odot}, \quad \Rightarrow \quad \Delta\alpha_\odot = -\frac{\delta_\odot}{\text{ctg}\,\varphi} = -\delta_\odot\,\text{tg}\varphi. \tag{37}$$

Тогда промежутки времени, на которые Солнце взойдет позже/ зайдет за горизонт раньше будут (2 балла)

$$\Delta\tau_{1,r} = \frac{\Delta\alpha_\odot}{\omega_\odot} = -\frac{\delta^{(1)}_{\odot,r}\text{tg}\varphi}{360^\circ}\,24^{\text{h}} = 1.1^{\text{m}}, \quad \Delta\tau_{1,s} = -\frac{\Delta\delta^{(1)}_{\odot,s}\text{tg}\varphi}{360^\circ}\,24^{\text{h}} = 0.07^{\text{m}}.$$

1.в) Полагая, что средний угловой диаметр видимого диска Солнца есть $\rho_\odot = 16'$, а угол рефракции у горизонта $\delta z_H = 35'$ определим промежуток времени, на который увеличится продолжительность дня за счет указанных факторов. Момент восхода знаменуется появлением на горизонте точки A –

верхней точки видимого диска Солнца. Согласно рис. 8.в) центр видимого диска (точка C, истинное солнце) находится ниже горизонта на величину $\delta h = \rho_\odot + \delta z_H = 51'$. Искомый промежуток времени можно представить так

$$\Delta\tau_2 = \frac{\delta h}{\sin(90^\circ - \varphi)\,\omega_\odot} = \frac{\delta h \cdot 24^\mathrm{h}}{\cos\varphi\, 360^\circ} = 5.68^\mathrm{m}. \tag{38}$$

Следовательно искомые моменты восхода и захода Солнца и продолжительность дня (с точностью до минуты) можно представить в виде (2 балла):

$$T^{(1)}_{d,r} = T^{(0)}_{d,r} + \Delta\tau_{1,r} - \Delta\tau_2 = 6^\mathrm{h}43^\mathrm{m},\;\; T^{(1)}_{d,s} = T^{(0)}_{d,s} - \Delta\tau_{1,s} + \Delta\tau_2 = 18^\mathrm{h}54^\mathrm{m}. \tag{39}$$

$$\Delta T = T^{(1)}_{d,s} - T^{(1)}_{d,r} = 12^\mathrm{h}11^\mathrm{m}. \tag{40}$$

3. Из формулы (29)-(33) следует явные выражения для среднего солнечного и истинного солнечного времени:

$$T_m = T_d + \lambda - N^\mathrm{h} - 1^\mathrm{h},\;\; T_\odot = T_m - \eta. \tag{41}$$

Следовательно искомые моменты по данным шкалам времени (2 балла):

$$T_{m,r} = 6^\mathrm{h}03^\mathrm{m},\;\; T_{m,s} = 18^\mathrm{h}14^\mathrm{m}, \tag{42}$$

$$T_{\odot,r} = 5^\mathrm{h}55^\mathrm{m},\;\; T_{\odot,s} = 18^\mathrm{h}06^\mathrm{m}. \tag{43}$$

Для определения моментов восхода и захода Солнца по шкале звездного времени определим момент истинного полдня по шкале декретного времени ($t_\odot = 0^\mathrm{h}$), согласно (33) есть $T^{(0)}_d = 12^\mathrm{h}48^\mathrm{m}$.

Тогда прямое восхождение истинного Солнца в этот момент будет

$$\alpha^{(0)}_\odot = 24^\mathrm{h} - \frac{(T^{(\Upsilon)}_d - T^{(0)}_d)}{24^\mathrm{h}} \cdot \frac{360^\circ}{T_\mathrm{тр}} \cos\varepsilon = 23^\mathrm{h}59^\mathrm{m}.$$

Искомые моменты по шкале звездного времени тогда есть (1 балл)

$$S_r = \alpha^{(0)}_\odot - K(T^{(0)}_d - T^{(1)}_{d,r}) = 23^\mathrm{h}59^\mathrm{m} - 6^\mathrm{h}06^\mathrm{m} = 17^\mathrm{h}53^\mathrm{m}, \tag{44}$$

$$S_s = \alpha^{(0)}_\odot + K(T^{(1)}_{d,s} - T^{(0)}_d) = 23^\mathrm{h}59^\mathrm{m} + 6^\mathrm{h}07^\mathrm{m} = 6^\mathrm{h}6^\mathrm{m}. \tag{45}$$

2. Согласно рис. 8.б) горизонтальные координаты точек восхода и захода Солнца в эти сутки можно определить как (2 балла)

$$\left.\begin{aligned} h_r &= 0^\circ,\;\; A_r = 270^\circ + \tfrac{|\delta^{(1)}_{\odot,r}|}{\sin(90^\circ-\varphi)} = 270^\circ 21', \\ h_s &= 0^\circ,\;\; A_s = 90^\circ - \tfrac{|\delta^{(1)}_{\odot,s}|}{\sin(90^\circ-\varphi)} = 89^\circ 59' \end{aligned}\right\}. \tag{46}$$

3. Для определения продолжительности астрономической ночи в указанные сутки рассмотрим сферический треугольник $\Delta_s WAS$ (см. рис. 8.г). Здесь

$\breve{WS}$ – дуга небесного экватора, $\breve{WA}$ – дуга математического горизонта, $\breve{AS}$ – дуга вертикала Солнца. Воспользуемся формулой синусов для данного треугольника:

$$\sin(90^\circ - \varphi)\,\sin s_\odot = \sin|h_\odot|\,\sin 90^\circ, \;\Rightarrow \tag{47}$$

$$\sin s_\odot = \frac{\sin|h_\odot|}{\cos\varphi}, \;\Rightarrow\; s_\odot = \arcsin\left[\frac{\sin|h_\odot|}{\cos\varphi}\right] = 31.06^\circ. \tag{48}$$

Астрономическая ночь наступит, когда высота Солнца будет $h_\odot = -18^\circ$. Этот момент наступит после прохождения истинным Солнцем точки W спустя промежуток времени:

$$\tau_N = \frac{s_\odot \cdot 24^\mathrm{h}}{360^\circ} = 2^\mathrm{h}04^\mathrm{m},$$

т.е. в момент

$$T_{N,b} = T^{(0)}_{d,s} - \Delta\tau_{1,s} + \tau_N = 20^\mathrm{h}52^\mathrm{m}.$$

Аналогично можно найти момент окончания ночи:

$$T_{N,f} = T^{(0)}_{d,r} + \Delta\tau_{1,r} - \tau_N = 4^\mathrm{h}45^\mathrm{m}.$$

Следовательно продолжительность астрономической ночи в данные сутки есть (2 балла)

$$\Delta T_N = (24^\mathrm{h} - T_{N,b}) + (T_{N,f} - 0) = 7^\mathrm{h}53^\mathrm{m}. \tag{49}$$

Ответ: к задаче представлены выражениями (39)-(43), (42)-(46), (49). (14 баллов).

Задача № 8. «Хвостатая комета C/2021 A1 Leonard»

Решение. **1.а)** *Для обучающихся 7-8 классов*. С использованием плагина "Угломер" виртуального компьютерного планетария Stellarium, определим угол β между направлениями на ядро кометы и на Солнце (3 балла):

$$\beta = 39^\circ 30'. \tag{50}$$

1.б) *Для обучающихся 9 классов*. Рассмотрим $\Delta_S P_N C S$ – сферический треугольник (см. рис. 9.а), в вершинах которого расположены северный полюс мира (P_N), Солнце (S) и комета (C). Воспользуемся формулой косинусов:

$$\cos\beta = \cos p_\odot\,\cos p_c + \sin p_\odot\,\sin p_c\,\cos\Delta\alpha, \tag{51}$$

здесь β – искомое угловое расстояние между Солнцем и кометой, $p_\odot$, p_c – полярные расстояния Солнца и ядра кометы соответственно, $\Delta\alpha = \alpha_\odot - \alpha_c$ – разность прямых восхождений данных тел. Учитывая, что полярное

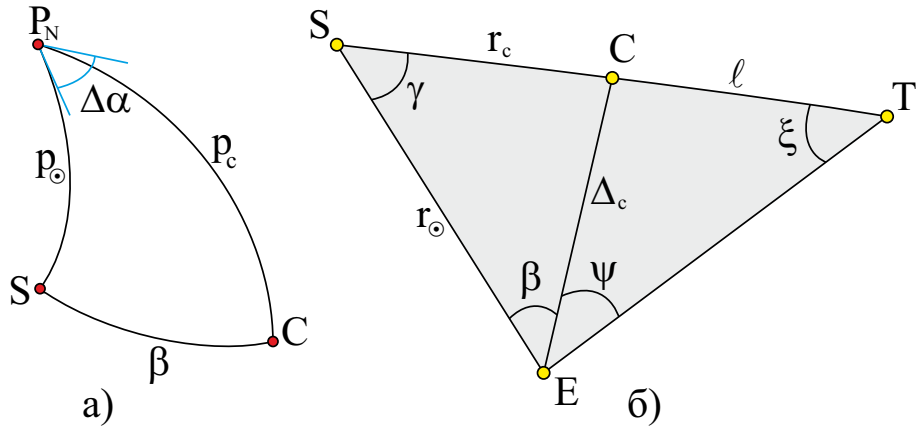


Рис. 9. К определению а) углового расстояния между Солнцем и ядром кометы; б) длины хвоста кометы.

расстояние связано со склонением выражением вида: $p = 90° - \delta$, в результате получаем (3 балла)

$$\cos\beta = \sin\delta_\odot \sin\delta_c + \cos\delta_\odot \cos\delta_c \cos(\alpha_c - \alpha_\odot), \;\Rightarrow$$
$$\beta = \arccos[\sin\delta_\odot \sin\delta_c + \cos\delta_\odot \cos\delta_c \cos(\alpha_c - \alpha_\odot)] = 39°27' = 39.443°. \quad (52)$$

2. Гелиоцентрическое расстояние ядра кометы определим по теореме косинусов для плоского треугольника $\triangle SET$ (см. рис. 9.б), в вершинах которого располагаются Солнце, Земля и ядро кометы (4 балла):

$$r_c = \sqrt{r_\odot^2 + \Delta_c^2 - 2 r_\odot \Delta_c \cos\beta} = 93.644 \text{ млн км}. \quad (53)$$

3. Если видимый хвост относится к I -му классу по классификации Бредихина, то он должен располагаться строго по другую сторону от Солнца, на продолжении гелиоцентрического радиуса – вектора ядра кометы (2 балла). Рассмотрим рис. 9.б). Здесь в точке E находится Земля, в т. S – Солнце, в т. C – ядро кометы CT – видимый хвост кометы. Воспользуемся теоремой синусов для ΔSEC (2 балла):

$$\frac{\sin\gamma}{\Delta_c} = \frac{\sin\beta}{r_c}, \;\Rightarrow\; \gamma = \arcsin\left[\frac{\Delta_c}{r_c}\sin\beta\right] = 47.029°. \quad (54)$$

Тогда угол

$$\xi = 180° - \gamma - \beta - \Psi = 33.528°. \quad (55)$$

Воспользуемся теоремой синусов для ΔCET и определим длину ℓ хвоста (3 балла):

$$\frac{\ell}{\sin\Psi} = \frac{\Delta_c}{\sin\xi}, \;\Rightarrow\; \ell = \Delta_c \frac{\sin\Psi}{\sin\xi} = 169.10 \text{ млн км}. \quad (56)$$

Ответ: к задаче представлен выражениями (50), (52), (53), (56). (14 баллов).

Планета	№	$a_i^{(p)}$, а.е.	a_i, а.е.	ε_i	T_i, лет	$t_i^{(f)}$, лет	$A_{i\to i+1}$, $\times 10^7$ Дж/кг
Земля	0	1.0000	–	–	–	–	29.88
Марс	1	1.5237	1.2619	0.2075	1.4175	0.7087	21.97
Юпитер	2	5.2028	3.3633	0.5470	6.1679	3.0840	7.173
Сатурн	3	9.5388	7.3708	0.2941	20.0111	10.0056	2.931
Уран	4	19.1914	14.3651	0.3360	54.4456	27.2228	1.287
Нептун	5	30.0611	24.6263	0.2207	122.207	61.1037	1.802
Итого:	–	–	–	–	–	102.125	65.04

Таблица 1. К определению большой полуоси a_i, эксцентриситета ε_i, периода T_i обращения и времени перелета $t_i^{(f)}$ АМС по i-ой ГЦВ-орбите.

Задача № 9. «Планетарный гравитационный лифт для АМС»

Решение. **1.** Для бóльшего удобства присвоим каждой планете, участвующей в гравитационном маневре АМС, свой индекс, который представлен в таблице ниже:

Планета	№	Планета	№	Планета	№
Земля	0	Марс	1	Юпитер	2
Сатурн	3	Уран	4	Нептун	5

Для перелета по эллиптической ГЦВ-орбите необходимо, чтобы перигелий последней располагался на орбите исходной планеты, а афелий – на орбите конечной планеты. В случае i-ой ГЦВ-орбиты перигелийное (q_i) и афелийное (Q_i) расстояния, большая полуось (a_i) и эксцентриситет (ε_i) данной орбиты, период обращения (T_i) и время перелета ($t_i^{(f)}$) по ней представляются выражениями:

$$q_i = a_{i-1}^{(p)},\;\; Q_i = a_i^{(p)},\;\; a_i = \frac{q_i + Q_i}{2} = \frac{a_{i-1}^{(p)} + a_i^{(p)}}{2},\;\; \varepsilon_i = \frac{1 - x_i}{1 + x_i},\;\; \text{где}\;\; x_i = \frac{q_i}{Q_i},$$

$$T_i = T_\oplus \left(\frac{a_i}{a_\oplus}\right)^{3/2} \;\;\Rightarrow\;\; t_i^{(f)} = \frac{T_i}{2} = \frac{T_\oplus}{2}\left(\frac{a_i}{a_\oplus}\right)^{3/2}. \qquad (57)$$

В последнем выражении $a_i^{(p)}$ – радиус орбиты i-ой планеты.

В табл. 1 представлены результаты вычислений определенных выше величин. В предпоследнем столбце записаны искомые значения времени перелета по i-ой ГЦВ-орбите. Очевидно, полное время такого подъема АМС по 5 ГЦВ-орбитам составляет более 102 лет! (7 баллов)

2. Чтобы АМС вывести на первую ГЦВ-орбиту необходимо, прежде всего, чтобы она покинула гравитационное поле Земли. Следовательно ее ракетные двигатели должны совершить работу:

$$A_{01} = \frac{mV_{02}^2}{2} - \frac{mV_{01}^2}{2} = \frac{G\,m\,\mathfrak{M}_\oplus}{(\mathfrak{R}_\oplus + h)} - \frac{1}{2}\frac{G\,m\,\mathfrak{M}_\oplus}{(\mathfrak{R}_\oplus + h)} = \frac{1}{2}\frac{G\,m\,\mathfrak{M}_\oplus}{(\mathfrak{R}_\oplus + h)}.$$

Поскольку масса АМС не дана в условии, то здесь и далее будем вычислять работу, приходящуюся на единицу массы космического аппарата:

$$\mathcal{A}_{01} = \frac{A_{01}}{m} = \frac{1}{2}\frac{G\,\mathfrak{M}_\oplus}{(\mathfrak{R}_\oplus + h)} = 2.71 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}. \tag{58}$$

После того как АМС удалится от Земли на значительное расстояние (на котором гравитационным влиянием последней можно пренебречь), при этом оставаясь в окрестности орбиты Земли, необходимо будет совершить работу с помощью двигателей для перехода на первую ГЦВ-орбиту:

$$\mathcal{A}_{02} = \frac{1}{2}V_0^2 - \frac{1}{2}(\vec{V}_\oplus + \vec{u}_{\text{II}})^2, \tag{59}$$

здесь V_0 – начальная скорость движения по первой ГЦВ-орбите, $V_\oplus$ – орбитальная скорость Земли, u_{II} – вторая космическая скорость АМС относительно Земли на круговой орбите, определяемые выражениями вида:

$$V_0 = \sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{a_1}\frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}} = \sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{a_\oplus}(1+\varepsilon_1)} = V_\oplus\sqrt{1+\varepsilon_1} = 32.74 \text{ км/с},$$

$$V_\oplus = \sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{a_\oplus}} = 29.79 \text{ км/с}, \quad u_{\text{II}} = \sqrt{\frac{2\,G\,\mathfrak{M}_\oplus}{(\mathfrak{R}_\oplus + h)}} = 10.40 \text{ км/с}.$$

В итоге (59) можно представить так

$$\mathcal{A}_{02} = \frac{1}{2}\left[V_\oplus^2\varepsilon_1 - u_{\text{II}}^2 - 2V_\oplus u_{\text{II}}\cos\alpha\right], \tag{60}$$

здесь α – угол между векторами $\vec{V}_\oplus$ и $\vec{u}_{\text{II}}$. Очевидно, выход на первую ГЦВ-орбиту должен произойти в окрестности земной орбиты (вдали от Земли), при этом вектор скорости $\vec{V}_0$ должен быть направлен по касательной к последней. Участок траектории от точки схода с круговой околоземной орбиты до точки перехода на ГЦВ-орбиту является фактически прямолинейным, следовательно, вектор $\vec{V}_\oplus + \vec{u}_{\text{II}}$ должен быть также направлен по касательной к земной орбите. Следовательно, угол α может принимать лишь значения $0°$ и $180°$ соответственно. Легко убедиться, что в случае $\alpha = 0°$ работа ракетных двигателей минимальна (они работают на торможение АМС относительно Солнца) и равна по модулю $|\mathcal{A}_{02}| = 2.717 \cdot 10^8$ Дж/кг. Значит итоговая работа (вычисленная на единицу массы) двигателей по выводу АМС на первую ГЦВ-орбиту есть $A_0 = \mathcal{A}_{01} + |\mathcal{A}_{02}| = 2.988 \cdot 10^8$ Дж/кг. Заметим, что направление движения АМС относительно Солнца по ГЦВ-орбите происходит в том же направлении, что у всех классических планет, что принципиально необходимо для реализации гравитационного маневра в окрестности верхних планет. (4 балла)

Работа по переходу с i-ой ГЦВ-орбиты на i+1-ю орбиту можно представить в виде:

$$\mathcal{A}_{i\to i+1} = \frac{1}{2}\left[V^2_{q,i+1} - V^2_{Q,i}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{a_{i+1}}\frac{1+\varepsilon_{i+1}}{1-\varepsilon_{i+1}} - \frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{a_i}\frac{1-\varepsilon_i}{1+\varepsilon_i}\right] =$$

$$= V^2_\oplus\left(\frac{a_\oplus}{a^{(p)}_i}\right)\left[\frac{\varepsilon_{i+1}+\varepsilon_i}{2}\right]. \qquad (61)$$

В численном анализе учтем, что при переходе в окрестности Нептуна на параболическую орбиту эксцентриситет $\varepsilon_6 = 1$. В табл. 1 (в последнем столбце) представлены значения для работы $\mathcal{A}_{i\to i+1}$. Из таблицы видно, что наибольшее значение работы достигается в окрестности Земли, при выходе на первую ГЦВ-орбиту. А наименьшее значение – в окрестности Урана при переходе с 4-ой на 5-ую ГЦВ-орбиту. Примечателен тот факт, что значительную часть от полной работы совершают гравитационные силы планеты. Этим достигается значительная экономия топлива АМС. (3 балла)

Ответ: к задаче представлен в табл. 1. (14 баллов).

Задача № 10. «Кеплеровы элементы орбиты тела»

Решение. **1.** Как известно, орбиты всех спутников Земли подвержены явлению прецессии. Следовательно, обязательно наступит момент, когда данное тело в данной фазе будет находиться в перигее (апогее) своей орбиты, при этом освещенность, создаваемая данным телом подчиняется закону обратных квадратов:

$$E_q \sim \frac{1}{q^2}, \quad E_Q \sim \frac{1}{Q^2}, \qquad (62)$$

здесь q, Q – геоцентрическое расстояние перигея (апогея) данного тела, которое можно записать так

$$q = a(1-\varepsilon), \quad Q = a(1+Q),$$

здесь a, ε – большая полуось, эксцентриситет орбиты данного тела. Тогда относительное изменение освещенности есть

$$\eta = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}}\,100\% = \frac{E_q - E_Q}{E_q - E_Q}\,100\% = \frac{\frac{1}{a^2(1-\varepsilon)^2} - \frac{1}{a^2(1+\varepsilon)^2}}{\frac{1}{a^2(1-\varepsilon)^2} + \frac{1}{a^2(1+\varepsilon)^2}} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2} \quad \Rightarrow$$

$$\varepsilon^2 - \frac{2\varepsilon}{\eta} + 1 = 0, \qquad (63)$$

$$D = \frac{4}{\eta^2} - 4 = 4\left(\frac{1-\eta^2}{\eta^2}\right), \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{1}{\eta} \pm \frac{1}{\eta}\sqrt{1-\eta^2}, \quad \Rightarrow$$

$$\varepsilon_1 = 0.0550, \quad \varepsilon_2 = 18.1765. \qquad (64)$$

Очевидно, второй корень не удовлетворяет условию задачи, поскольку для любого тела, являющегося спутником Земли траектория движения – эллипс, эксцентриситет которого должен принадлежать полуинтервалу $[0.1)$. Следовательно, эксцентриситет орбиты данного тела $\varepsilon = 0.0550$. (3 балла)

2. Определим радиус геостационарной орбиты искусственного спутника Земли. Как известно, период обращения такого ИСЗ вокруг центра Земли равно звездным суткам Земли – $P_\oplus = 23^{\mathrm{h}}56^{\mathrm{m}}04^{\mathrm{s}}$. Запишем второй закон Ньютона для ИСЗ:

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{Gm\mathfrak{M}_\oplus}{R^2}, \;\; \Rightarrow \;\; v^2 = \frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{R},$$

учитывая, что скорость тела на орбите есть

$$v = \frac{2\pi R}{P_\oplus},$$

то можно получить явное выражение для радиуса геостационарной орбиты:

$$\frac{4\pi^2 R^2}{P_\oplus^2} = \frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{R}, \;\; \Rightarrow \;\; R = \sqrt[3]{\frac{G\mathfrak{M}_\oplus P_\oplus^2}{4\pi^2}} =$$

$$= \mathfrak{R}_\oplus \sqrt[3]{\left(\frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus}\right)\left(\frac{P_\oplus}{2\pi\mathfrak{R}_\oplus}\right)^2} = \mathfrak{R}_\oplus \sqrt[3]{\frac{v_{\mathrm{I}}^2}{v_{eq}^2}} = 42165.7 \text{ км}, \qquad (65)$$

здесь мы использовали явное выражение для первой космической скорости v_{I} у поверхности Земли и скорость суточного движения точек экватора Земли v_{eq}:

$$v_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus}}, \;\; v_{eq} = \frac{2\pi\mathfrak{R}_\oplus}{P_\oplus}.$$

Расстояние между фокусами орбиты тела равно удвоенному значению фокального расстояния: $c = a \cdot \varepsilon$, т.е.

$$2a \cdot \varepsilon = R, \;\; \Rightarrow \;\; a = \frac{R}{2\varepsilon} = 383325 \text{ км}. \qquad (66)$$

Из полученных значений a и ε можно уже догадаться что это тело – Луна. (5 баллов)

3. С использованием компьютерного планетария Stellarium можно определить эклиптическую широту Альдебарана – β_*. Поскольку данное тело было в наибольшем удалении от эклиптики в окрестности Альдебарана, то наклонение орбиты данного тела приблизительно будет равно (2 балла)

$$i \approx |\beta_*| = 5^\circ 28'. \qquad (67)$$

4. Согласно условию, в момент наблюдений восходящий узел орбиты совпал с точкой осени. Согласно определению, ***долготой восходящего узла***

(Ω) называется угол между направлениями на точку весны и на восходящий узел орбиты, если смотреть из центра Земли. Значит $\Omega = 180°$, поскольку точки весны и осени являются диаметрально противоположными. (2 балла)

5. Наибольший угловой диаметр данное тело достигает в своем перигее. Поскольку прошло τ_0=5 сут. после солнечного затмения, которое достигается в одном из узлов орбиты тела, при этом, согласно условию задачи во время транзита (затмения) данное тело двигалось от южного полюса эклиптики – в направлении северного, значит во время затмения Луна была в окрестности восходящего узла.

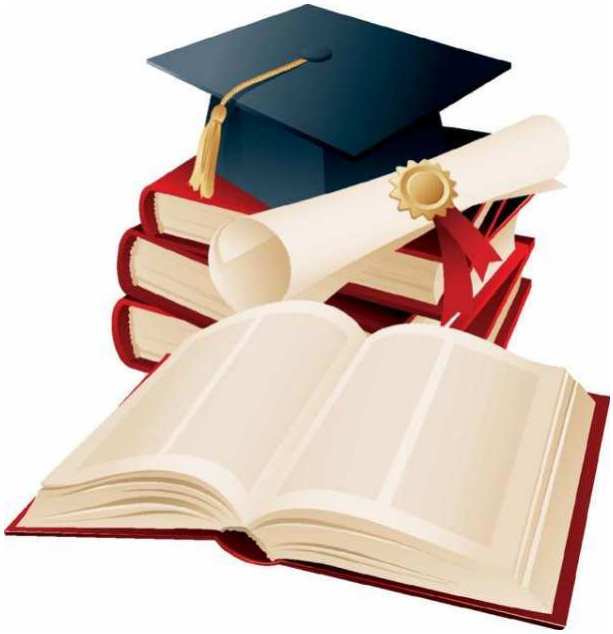
Аргумент перигея ω – это угол между направлениями на восходящий узел и на перигей орбиты тела, если смотреть из центра Земли. Поскольку эксцентриситет орбиты – малая величина, то движение вокруг Земли по орбите можно считать равномерным, тогда искомый угол ω можно определить так

$$\omega = \omega_{☾} \cdot \tau_0 = \frac{360°}{T_{☾}}\tau_0 = 66°,$$

здесь $T_{☾}$ – сидерический период обращения Луны. (3 балла)

Ответ: ε=0.0550; a=383315 км; $i \approx 5°28'$; $\Omega = 180°$; $\omega = 66°$; Луна. (15 баллов).

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ



A.1. Основные физические и астрономические постоянные

- *Гравитационная постоянная* – $G = 6.674 \cdot 10^{-11}$ м$^3\cdot$ кг$^{-1} \cdot c^{-2}$
- *Скорость света в вакууме* – $c = 2.998 \cdot 10^8$ м/с
- *Универсальная газовая постоянная* – $R = 8.31$ кг$\cdot$м$^2\cdot$ с$^{-2}\cdot$K$^{-1}\cdot$ моль$^{-1}$
- *Постоянная Стефана-Больцмана* – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ кг$\cdot$с$^{-3}\cdot$K^{-4}
- *Постоянная Авогадро* – $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
- *Масса протона* – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг
- *Масса электрона* – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ кг
- *Астрономическая единица* – 1 а.е. $= 1.496 \cdot 10^{11}$ м
- *Парсек* – 1 пк $= 206265$ а.е. $= 3.086 \cdot 10^{16}$ м
- *Постоянная Хаббла* – $H = 72$ км$\cdot$с$^{-1}\cdot$Мпк$^{-1}$

A.2. Данные о Солнце

- *Радиус* – $6.955 \cdot 10^5$ км
- *Масса* – $1.989 \cdot 10^{30}$ кг
- *Светимость* – $3.827 \cdot 10^{26}$ Вт
- *Спектральный класс* – G2
- *Видимая звездная величина* – -26.74^m
- *Абсолютная болометрическая звездная величина* – $+4.83^m$
- *Показатель цвета (B-V)* – $+0.67^m$
- *Эффективная температура* – 5778 K
- *Средний горизонтальный параллакс* – $8.794''$
- *Солнечная постоянная (во всем спектре) на расстоянии Земли* – 1361 Вт/м^2
- *Солнечная постоянная (в видимом свете) на расстоянии Земли* – 600 Вт/м^2

A.3. Данные о Земле

- *Эксцентриситет орбиты* – 0.017
- *Тропический год* – 365.24219 сут
- *Средняя орбитальная скорость* – 29.8 км/с
- *Период вращения* – 23 часа 56 минут 04 секунды
- *Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0* – $23^\circ\,26'\,21.45''$

- *Средний по объему радиус* – 6371.0 км
- *Средний экваториальный радиус* – 6378.14 км
- *Длина земного меридиана* – 20004.276 км
- *Полярный радиус* – 6356.77 км
- *Масса* – $5.974 \cdot 10^{24}$ кг
- *Средняя плотность* – 5.52 г·см$^{-3}$
- *Объемный состав атмосферы* – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim$ 1%)

А.4. Данные о Луне

- *Среднее расстояние от Земли* – 384400 км
- *Минимальное расстояние от Земли* – 356410 км
- *Максимальное расстояние от Земли* – 406700 км
- *Эксцентриситет орбиты* – 0.055
- *Наклон плоскости орбиты к эклиптике* – $5°09'$
- *Сидерический (звездный) период обращения* – 27.321662 сут
- *Синодический период обращения* – 29.530589 сут
- *Радиус* – 1738 км
- *Масса* – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или 1/81.3 массы Земли
- *Средняя плотность* – 3.34 г·см$^{-3}$
- *Визуальное геометрическое альбедо* – 0.12
- *Видимая звездная величина в полнолуние* -12.7^m

А.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin\alpha \pm x\,\cos\alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos\alpha \mp x\,\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg}\alpha \pm \frac{x}{\cos^2\alpha};$$

$$(1+x)^n \approx 1 + n\,x;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.

А.6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.		градусы		сут
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

А.7. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли	г·см$^{-3}$		градусы		
Солнце	$1.989{\cdot}10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут†	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час†	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;
† – обратное вращение.

А.8. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см$^{-3}$	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685†	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.9. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике и график для уравнения времени

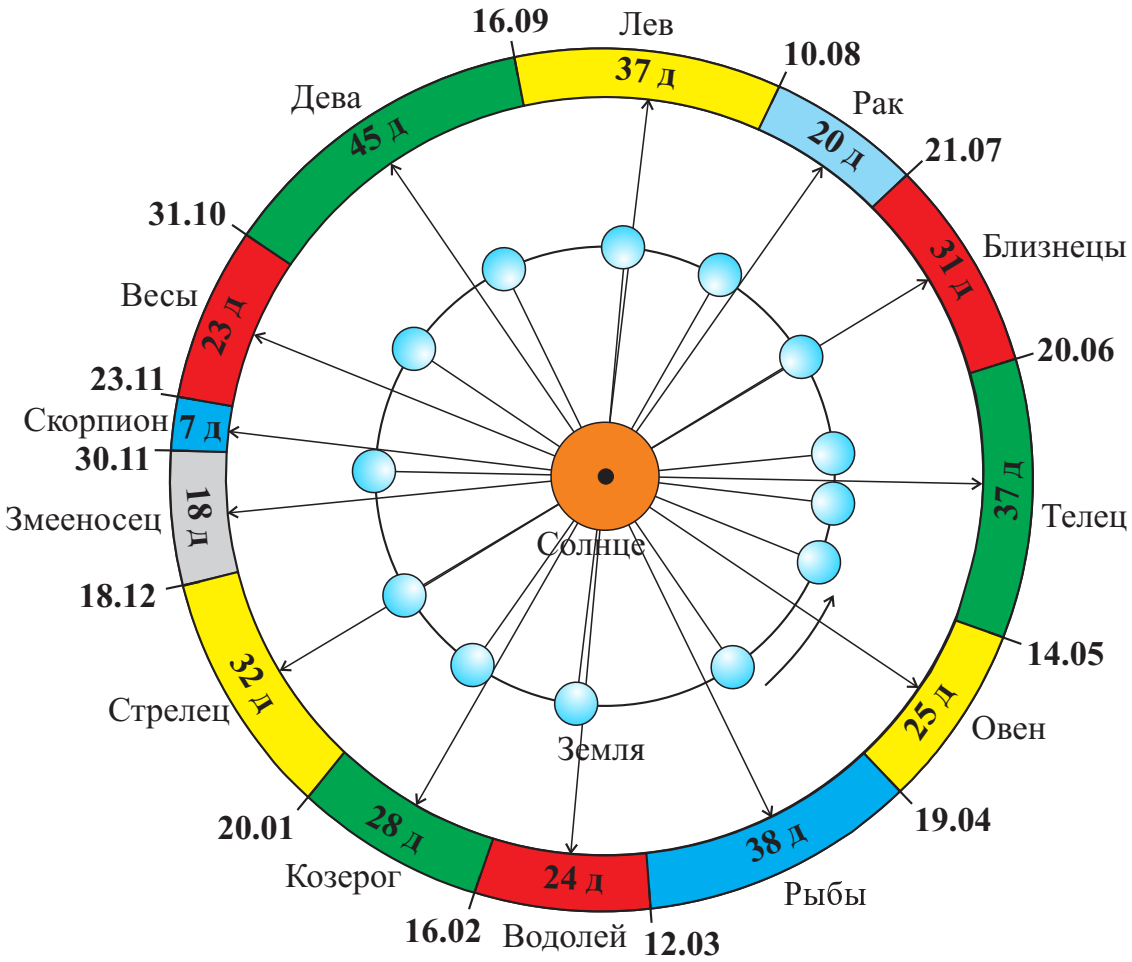


Рис. А.1. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике.

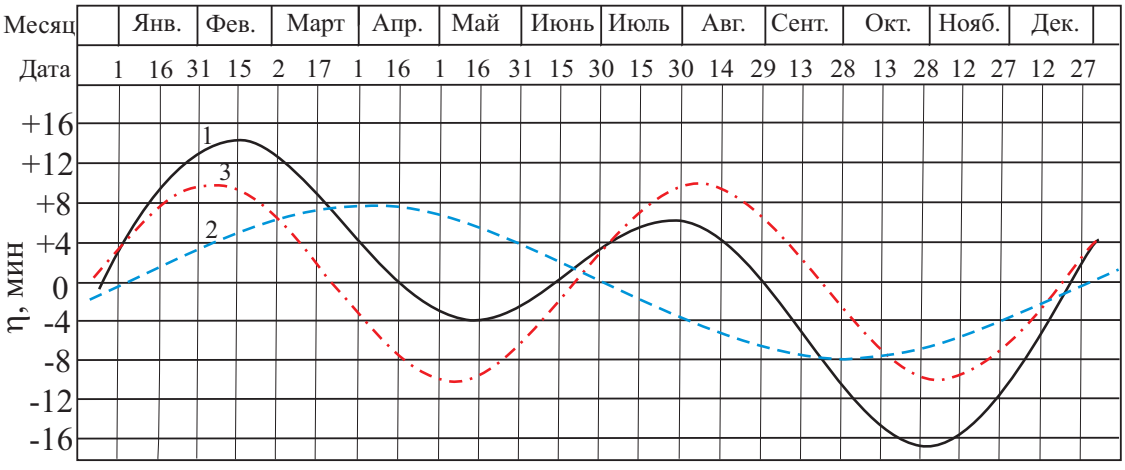


Рис. А.2. График уравнения времени: 1 – уравнение времени, 2 – уравнение центра, 3 – уравнение от наклона эклиптики.

А.10. Географические координаты и номера (N) часовых поясов некоторых городов

Город	Широта	Долгота	N	Город	Широта	Долгота	N
Самара	$+53°12'$	$50°06'$	3	Москва	$+55°45'$	$37°37'$	2

А.11. Некоторые характеристики звезд

Болометрические поправки ΔM_b

Спектр	ΔM_b	Спектр	ΔM_b		
			Гл. последовательность	Гиганты	Сверхгиганты
B0	– 2.70	F5	– 0.04	– 0.08	– 0.12
B5	– 1.58	F8	– 0.05	– 0.17	– 0.28
A0	– 0.72	G0	– 0.06	– 0.25	– 0.42
A5	– 0.31	G2	– 0.07	– 0.31	– 0.52
F0	– 0.09	G5	– 0.10	– 0.39	– 0.65
F2	– 0.04	G8	– 0.10	– 0.47	– 0.80
		K0	– 0.11	– 0.54	– 0.93
		K2	– 0.15	– 0.72	– 1.20
		K3	– 0.31	– 0.89	– 1.35
		K4	– 0.55	– 1.11	– 1.56
		K5	– 0.85	– 1.35	– 1.86
		M0	– 1.43	– 1.55	– 2.2
		M1	– 1.70	– 1.72	– 2.6
		M2	– 2.03	– 1.95	– 3.0
		M3	– 2.35	– 2.26	– 3.6
		M4	– 2.7	– 2.72	– 3.8
		M5	– 3.1	– 3.4	– 4.0

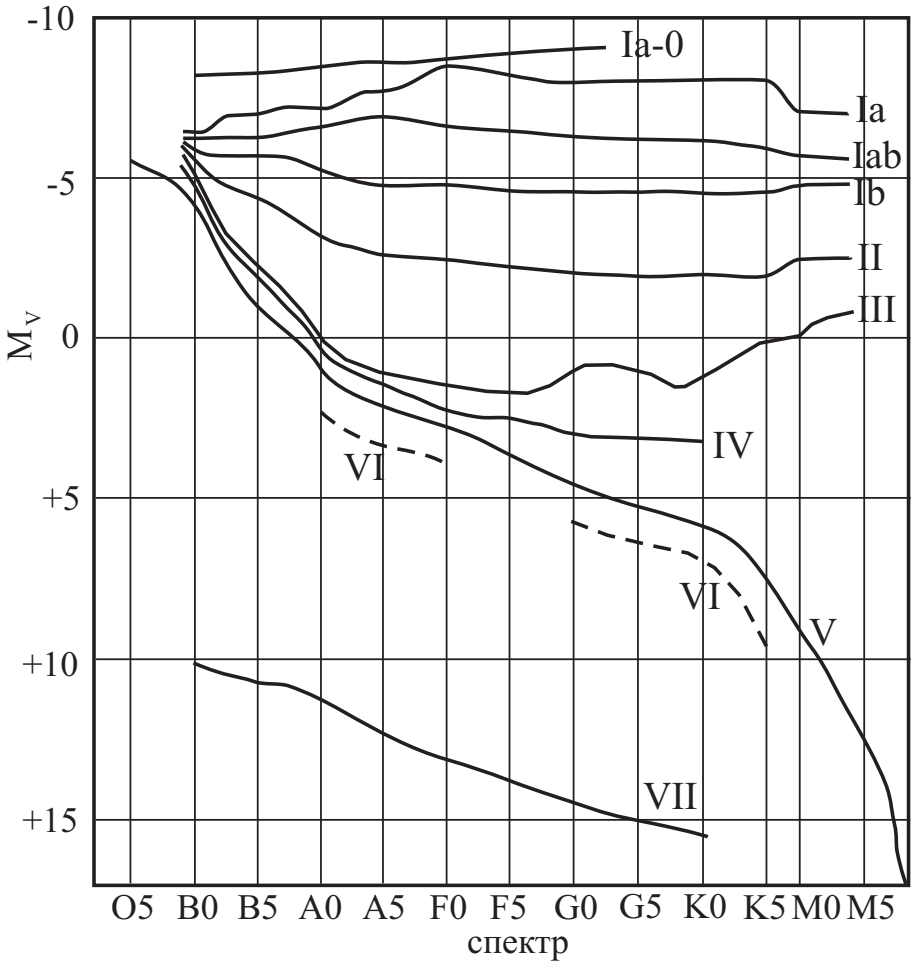


Рис. А.3. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.

Рис. А.4. Таблица Менделеева.