САМАРСКИЙ РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ДЛЯ ОДАРЕННЫХ ДЕТЕЙ
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ОТКРЫТОЙ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ им. Ф.А. БРЕДИХИНА

СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ.

СЕЗОН: 2021-2022, ТУР № 1

Самара, 2021 г.

Дорогие Друзья!

Вашему вниманию в данном релизе представлены 10 оригинальных задач двух уровней сложности – «Новичок» (уровень А), «Знаток» (уровень В). Задачи составлены в соответствии с ***Перечнем*** *вопросов, рекомендуемых Центральной предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады школьников по астрономии для подготовки обучающихся 10-11 классов к решению задач ее различных этапов.*

При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!

Ссылка: **«Условия и решения конкурсных задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2022 среди обучающихся 10-11 классов. Тур № 1». – https://sites.google.com/site/samrasolimp/**

Составитель: – ***Филиппов Юрий Петрович***, научный руководитель школы, методист СРЦОД, к.ф.-м.н., доцент кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева.

Верстка в системе LaTeX – Филиппов Ю.П., Белозерская Л.Н.

Памятка участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2022

1. ***Официальный сайт Астрошколы***:
https://sites.google.com/site/samrasolimp/

2. ***Официальная группа в VK***:
vk.com/bredikhinolimp

3. ***Сроки подачи решений задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2022 тура № 1 на проверку***:
15.10.2021-30.11.2021!!!

4. ***Электронный ящик ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2022:***
samrasolimp@mail.ru

5. ***Руководство зарегистрированного участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2022***:

https://sites.google.com/site/samrasolimp/maindocs
или
https://vk.com/bredikhinolimp

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Дорогие Друзья!
Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2022, внимательно ознакомьтесь с «Руководством зарегистрированного участника ОМОА им Ф.А. Бредихина-2022»! Электронный адрес последнего указан в Памятке участника.

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «88 созвездий небосвода и особенности их названий»

В табл. 1 представлен Вашему вниманию список всех созвездий небосвода Земли. Выберите те созвездия, названия которых определяют профессии или призвания человека. Какие из выбранных Вами созвездий проходят через зенит г. Самары ($\varphi_S = 53°12'$, $\lambda_S = 50°06'$)? (7 баллов)

01.	Андромеда,	02.	Близнецы,	03.	Большая Медведица,	04.	Большой Пес,
05.	Весы,	06.	Водолей,	07.	Возничий,	08.	Волк,
09.	Волопас,	10.	Волосы Вероники	11.	Ворон,	12.	Геркулес,
13.	Гидра,	14.	Голубь,	15.	Гончие Псы,	16.	Дева,
17.	Дельфин,	18.	Дракон,	19.	Единорог,	20.	Жертвенник,
21.	Живописец,	22.	Жираф,	23.	Журавль,	24.	Заяц,
25.	Змееносец,	26.	Змея,	27.	Золотая Рыба,	28.	Индеец,
29.	Кассиопея,	30.	Киль,	31.	Кит,	32.	Козерог,
33.	Компас,	34.	Корма,	35.	Лебедь,	36.	Лев,
37.	Летучая Рыба,	38.	Лира,	39.	Лисичка,	40.	Малая Медведица,
41.	Малый Конь,	42.	Малый Лев,	43.	Малый Пес,	44.	Микроскоп,
45.	Муха,	46.	Насос,	47.	Наугольник,	48.	Овен,
49.	Октант,	50.	Орел,	51.	Орион,	52.	Павлин,
53.	Паруса,	54.	Пегас,	55.	Персей,	56.	Печь,
57.	Райская птица,	58.	Рак,	59.	Резец,	60.	Рыбы,
61.	Рысь,	62.	Северная Корона,	63.	Секстант,	64.	Сетка,
65.	Скорпион,	66.	Скульптор,	67.	Столовая Гора,	68.	Стрела,
69.	Стрелец,	70.	Телескоп,	71.	Телец,	72.	Треугольник,
73.	Тукан,	74.	Феникс,	75.	Хамелеон,	76.	Центавр,
77.	Цефей,	78.	Циркуль,	79.	Часы,	80.	Чаша,
81.	Щит,	82.	Эридан,	83.	Южная Гидра,	84.	Южная Корона,
85.	Южная Рыба,	86.	Южный Крест,	87.	Южный Треугольник,	88.	Ящерица.

Таблица 1. Названия созвездий земного небосвода.

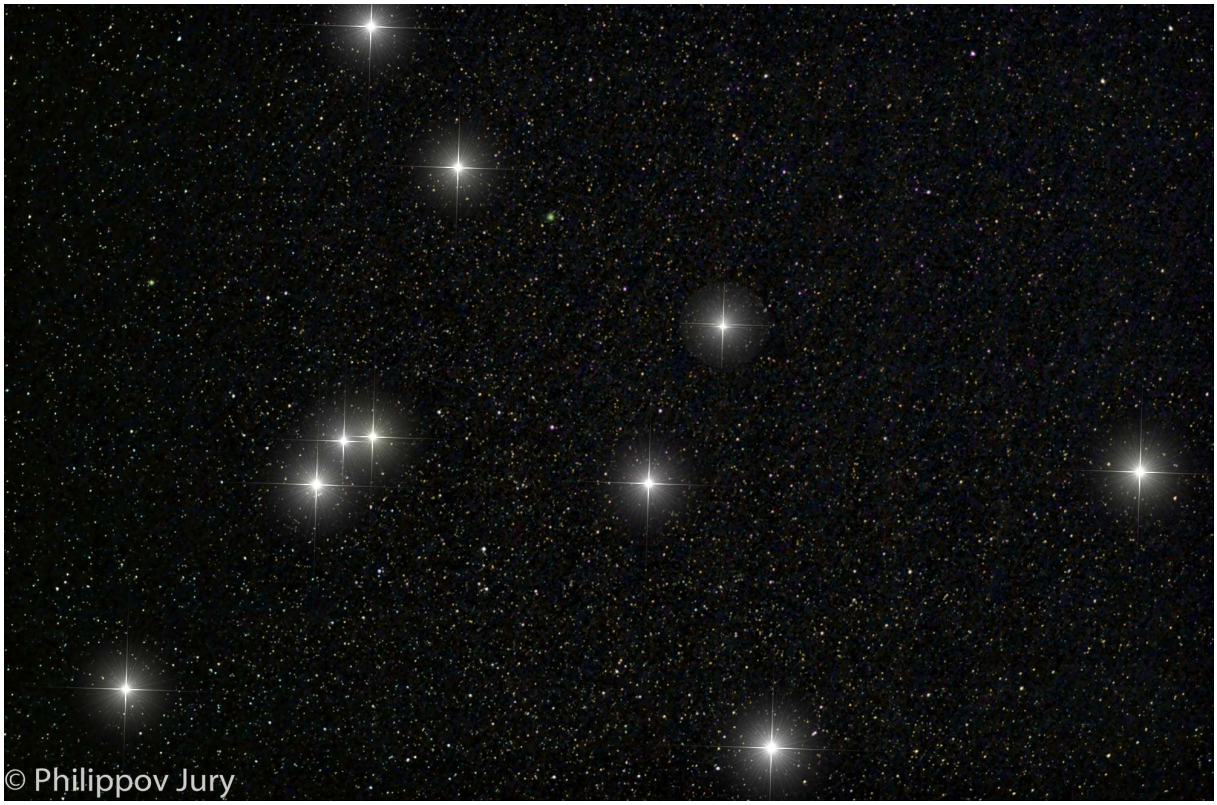


Рис. 1. Фотография созвездия (автор – Филиппов Юрий).

Задача № 2. «Созвездие и его характеристики»

На рис. 1 представлена фотография созвездия.

1. Как называется это созвездие? (1 балл)
2. В какой полусфере небосвода (северной или южной) преимущественно располагается данное созвездие? (1 балл)
3. Чему равна площадь данного созвездия (в квадратных градусах)? (1 балл)
4. Какое место занимает данное созвездие в рейтинге самых больших созвездий небосвода? (1 балл)
5. В какое время года его условия наблюдений являются оптимальными? (1 балл)
6. Как называется самая яркая звезда этого созвездия? (1 балл)
7. Чему равна звездная величина (с точностью до сотых долей) данной звезды? (1 балл)
8. Каким типом объекта (незаходящим, невосходящим или восходящим и заходящим) является данная звезда для наблюдателя в г. Самаре ($\varphi_S = 53°12'$, $\lambda_S = 50°06'$)? (2 балла)
9. Какой спектральный класс и класс светимости имеет ее главная компонента? (2 балла)

Задача № 3. «Видимое суточное движение Солнца по небосводу»

На рис. 2 представлена фотография-коллаж видимого движения Солнца по небосводу, в день осеннего равноденствия.

Рис. 2. Фотография суточного движения Солнца по небосводу (источник – https://vk.com/welsis).

1. По дуге какого большого круга совершает свое суточное движение Солнце в эти сутки? (1 балл)
2. Какие точки небесной сферы являются полюсами данного круга? (1 балл)
3. В каких точках горизонта Солнце его пересекает в эти сутки? (1 балл)
4. Чему равно время пребывания Солнца над горизонтом в эти сутки в месте получения фото? (1 балл)
5. Чему равна высота Солнца в эти сутки в верхней кульминации для наблюдателя, находящегося на широте φ? (2 балла)
6. В какой момент времени данных суток, на восходе или на закате, а) склонение Солнца, б) прямое восхождение Солнца будет больше? (2 балла)
7. Начало какого астрономического сезона определяет указанная дата? (1 балл)
8. Какие созвездия проходит Солнце в этом сезоне? (1 балл)
9. В каком из указанных Вами созвездий Солнце пребывает наибольшее время? Наименьшее время? (2 балла)

Задача № 4. «Ярчайшие звезды небосвода и их свойства»

На рис. 3 представлены 16 ярчайших звезд небосвода. Определите,

1. Какая из указанных звезд обладает наибольшей массой? (1 балл)
2. Какая из указанных звезд обладает наибольшими размерами? (1 балл)
3. Какие из указанных звезд входят в состав двойных или кратных звезд? (1 балл)
4. У каких звезд уверенно обнаруживается переменность их блеска? (1 балл)
5. Какие из указанных звезд относятся к спектральному классу B? (1 балл)
6. Какие из указанных звезд относятся к спектральному классу M? (1 балл)

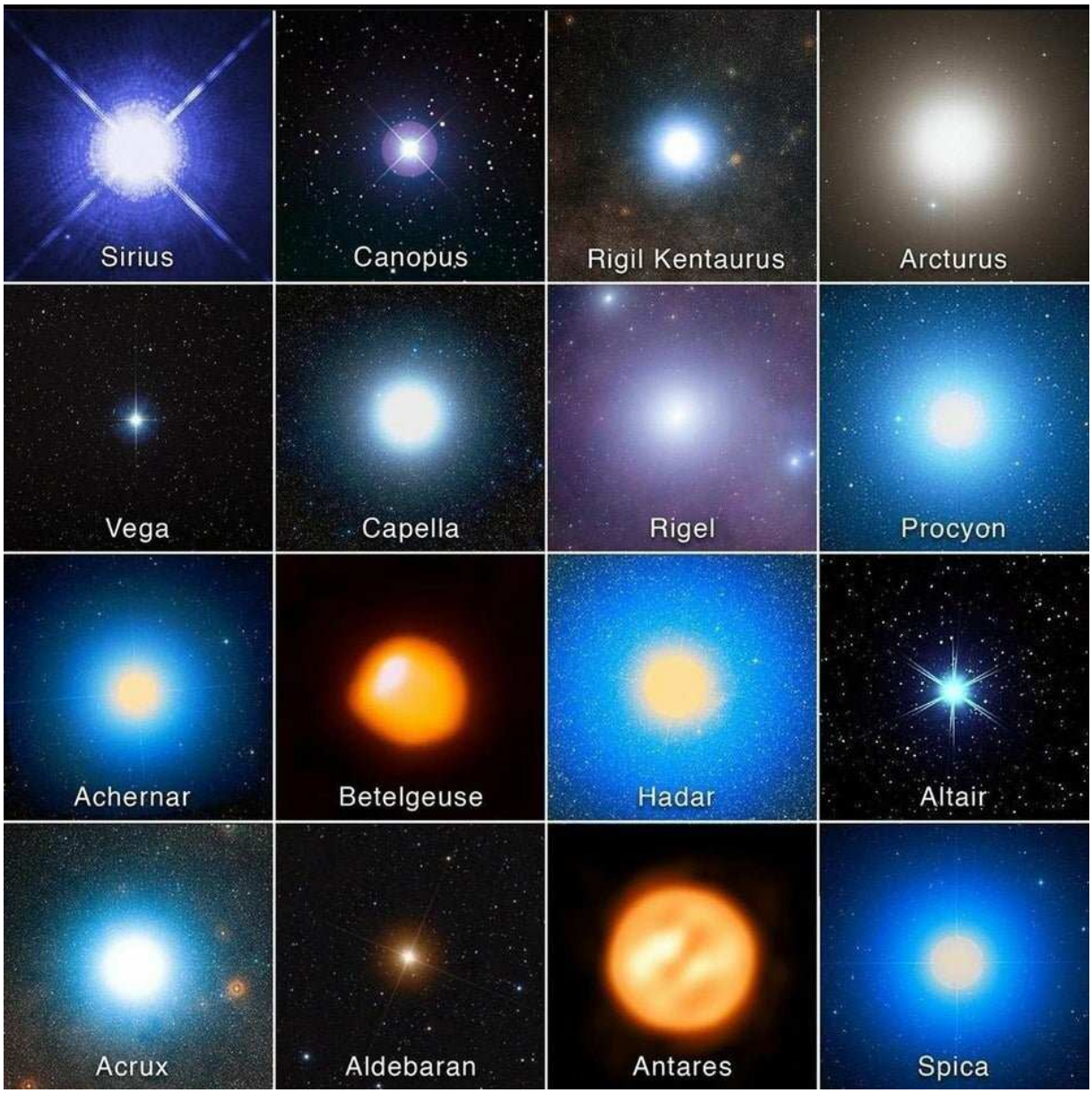


Рис. 3. Топ-16 ярчайших звезд небосвода (источник – https://vk.com/space_astro).

7. Какие из указанных звезд относятся к сверхгигантам? (1 балл)
8. Какие из указанных звезд относятся к гигантам? (1 балл)
9. Какие из указанных звезд располагаются внутри сферы с центром в Солнце и радиусом 10 пк? (1 балл)
10. Какие из указанных звезд движутся в направлении Солнца? (1 балл)

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 5. «Фотография Земли и свойства Луны»

На рис. 4 представлена фотография Земли, полученная с поверхности Луны одним из посадочных модулей программы Аполлон. Определите, чему была равна фаза Луны для земного наблюдателя на момент получения фотографии? Оцените время, прошедшее от момента последнего новолуния до момента получения данной фотографии. Какое из тел, Земля или Луна, было ближе к Солнцу на момент съемки? Следует полагать, что геоцентрическое

Рис. 4. Фотография Земли, полученная с поверхности Луны.

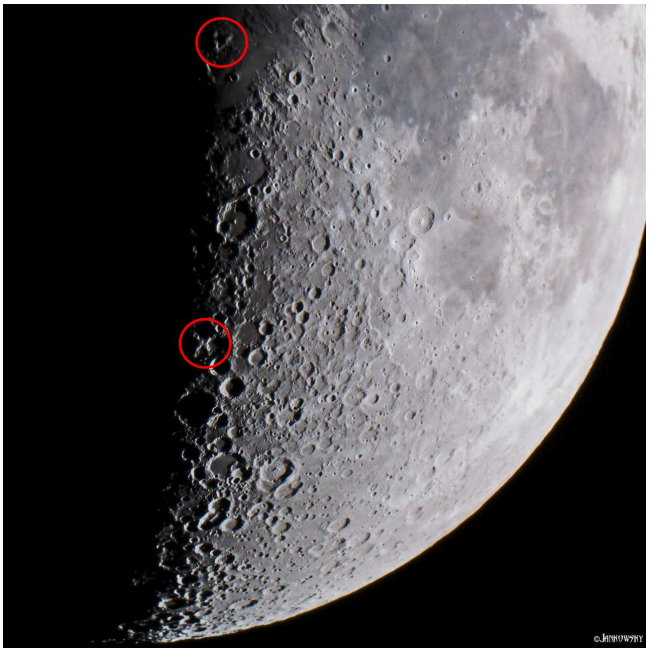


Рис. 5. К определению оптических явлений – Креста Пурбаха и лунного V (автор – К. Янковский, источник – https://vk.com/astrophotography).

расстояние до Луны много меньше гелиоцентрического расстояния системы «Земля-Луна». Орбиту Луны следует считать круговой. (11 баллов)

Задача № 6. «Поправка маятниковых часов»

Маятниковые часы перевезены с земного экватора в Антарктиду (в окрестность южного геополюса) для проведения научных экспериментов. Оцените поправку маятниковых часов, набегающую за земные сутки в Антарктиде (при температуре $t_2 = -90°\text{C}$), если эти часы выверены на экваторе (при температуре $t_1 = +50°\text{C}$). Коэффициент теплового расширения вещества маятника –$\alpha_h = 2.4 \cdot 10^{-5}$ град$^{-1}$. Исходная выверенная длина маятника $\ell_0 = 300$ мм. На сколько нужно изменить длину маятника, чтобы поправка часов за сутки была не больше 10 секунд? (12 баллов)

Задача № 7. «Трио Местной группы и фотометрия ее главных галактик»

Как известно, Млечный путь (абсолютная звездная величина которого $M_0 = -21.0^{\text{m}}$), Туманность Андромеды (M31, интегральная видимая звездная величина – $m_1 = 3.4^{\text{m}}$, абсолютная звездная величина – $M_1 = -21.0^{\text{m}}$, экваториальные координаты центра – $\alpha_1 = 00^{\text{h}}42^{\text{m}}44^{\text{s}}$, $\delta_2 = 41°16'8''$, видимые размеры – $a' \times b' = 3.2° \times 1.0°$) и Спираль Треугольника (M33, расстояние до галактики – $r_2 = 900$ кпк, интегральная видимая звездная величина – $m_2 = 5.7^{\text{m}}$, экваториальные координаты центра – $\alpha_2 = 01^{\text{h}}33^{\text{m}}50.90^{\text{s}}$, $\delta_2 = 30°39'36''$, видимые размеры – $a' \times b' = 73 \times 45'$) являются самыми массивными компонентами Местной группы галактик. Оцените:

1. Величину разности абсолютных звездных величин M31 и M33? (2 балла)

2. Разницу расстояний до галактик M31 и M33? (2 балла)

3. Радиусы данных галактик. (2 баллов)

4. Видимую звездную величину M33 с позиции гипотетического наблюдателя, расположенного в M31? (2 балла)

5. Видимую звездную величину M31 с позиции гипотетического наблюдателя, расположенного в M33? (2 балла)

6. Поверхностную яркость галактик с точки зрения земного наблюдателя в зв. величинах на квадрат. угл. сек. (4 балла)

Задача № 8. «Одинокий Юпитер и центр масс»

Определите на сколько изменятся радиус орбиты Юпитера и период его обращения вокруг Солнца при условии, что все оставшиеся классические планеты покинули Солнечную систему. Насколько изменится при этом положение центра масс системы «Солнце-Юпитер»? В каком направлении при этом движется данная точка по отношению к центру масс материнской звезды? Орбиты все планет считать круговыми. Межпланетными взаимодействиями следует пренебречь. (14 баллов)

Задача № 9. «Вероятность "поимки" креста Пурбаха»

Оцените вероятность случайного наблюдения астрономом-любителем оптического феномена на поверхности Луны – креста Пурбаха и "лунный V"(см. рис. 5), если последний, каждую неделю, случайным образом уделяет наблюдениям данного небесного тела два сеанса по 30 минут. Следует полагать, что данный феномен можно наблюдать лишь в течение времени, пока терминатор проходит соответствующую область поверхности Луны. Следует полагать, что Луна в момент наблюдений находилась на среднем расстоянии от Земли, вблизи небесного экватора. (14 баллов)

Задача № 10. «Сборка солнечной энергии»

В рамках миссии исследования астероида космический аппарат (КА) был отправлен с Земли. По пути к астероиду КА испытал явление гравитационного маневра в гравитационном поле Марса, после которого он перешел на новую орбиту. В момент перехода гелиоцентрическое расстояние КА было равно фокальному параметру новой орбиты. Двигаясь в направлении малой полуоси, КА достигает астероида в точке афелия своей орбиты. Рассчитайте количество световой солнечной энергии, которое соберет КА за время экспедиции к астероиду, если солнечные батареи площадью $S = 30$ м^2 и КПД $\eta = 25\%$ были запущены в работу сразу после гравитационного маневра. Чему равен эксцентриситет новой орбиты, если период обращения КА по ней составил 10 лет? (15 баллов)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «88 созвездий небосвода и особенности их названий»

1. К созвездиям, названия которых определяют профессии или призвания человека, относятся Водолей, Возничий, Волопас, Жертвенник, Живописец, Змееносец, Скульптор, Стрелец (5 баллов).

2. Чтобы определить созвездия из выбранных в пункте 1, которые проходят через зенит города Самары, необходимо с использованием звездной карты или виртуального компьютерного планетария выяснить, какие из этих созвездий пересекаются суточной параллелью со склонением, равным широте г. Самары, $\varphi_S = 53°12'$. Данными созвездиями являются Возничий и Волопас (2 балла).

Задача № 2. «Созвездие и его характеристики»

Решение. **1.** Опираясь на взаимное расположение наиболее ярких звезд на данной фотографии и сравнивая их с расположением звезд на звездных картах или небосводе виртуального компьютерного планетария, легко убедиться в том, что данное созвездие – Геркулес (1 балл).

2. Легко убедиться в том, что данное созвездие полностью располагается в северной полусфере небосвода (1 балл).

3-4. Согласно данным сторонних источников [1], площадь данного созвездия составляет 1225 квадратных градусов, а само созвездие занимает 5-е место среди самых больших созвездий небосвода (2 балла).

5. Условия наблюдений небесного объекта является оптимальными, если последний находится в верхней кульминации, в тот момент, когда Солнце находится в нижней кульминации, то есть в момент истинной полночи. При этом склонение Солнца отличается от склонения объекта на $12^{\rm h}$. Учитывая, что прямое восхождение точек данного созвездия заключено в интервале:

$$15^{\rm h}45^{\rm m} \leq \alpha \leq 18^{\rm h}52^{\rm m}.$$

Прямое восхождение Солнца в момент верхней кульминации точек созвездия должно принадлежать интервалу:

$$3^{\rm h}30^{\rm m} \leq \alpha_\odot \leq 6^{\rm h}52^{\rm m}.$$

Учитывая, что в день весеннего равноденствия $\alpha_\odot = 0^{\rm h}00^{\rm m}$ и за сутки эта координата Солнца меняется на $1/15^{\rm h}$, то оптимальные условия наблюдения созвездия приходятся на 12(13) мая – 3(4) июля, т.е. на конец весны - начало лета (1 балл).

6-7. Самой яркой звездой этого созвездия является Рас Альгети (α Геркулеса). Однако данная звезда является переменной, и иногда она уступает

[1] Например, https://ru.wikipedia.org/wiki/Список_созвездий_по_площади.

в блеске другой звезде этого созвездия – Корнефоросу (β Геркулеса). Видимая звездная величина[2] Рас Альгети в максимуме своей яркости составляет $+2.74^{\mathrm{m}}$, а у Корнефороса – $+2.78^{\mathrm{m}}$ (2 балла).

8. Согласно сторонним справочным данным, склонение[3] Рас Альгети составляет $\delta_\alpha = 14°23'$, а склонение[4] Корнефороса – $\delta_\beta = 21°29'$. Очевидно, что последнее значение удовлетворяет неравенству, которое выполняется для восходящих и заходящих светил:

$$-(90° - |\varphi|) \leq \delta_* \leq (90° - |\varphi|),$$

значит Рас Альгети и Корнефорос – восходящие и заходящие звезды в г. Самаре (2 балла).

9. Рас Альгети является тройной звездой, состоящей из яркого красного гиганта (A-компонент) спектрального класса M5 и классом светимости II, по размерам в $264 \div 303$ раза превышающего Солнце, меняющего блеск от 2.8^{m} до 3.5^{m} и меньшей звезды 5-й звездной величины, которая в свою очередь состоит из желтого гиганта (B-компонент) и белой звезды (C-компонент) главной последовательности. Альфа Геркулеса A является одной из крупнейших известных звезд, видимых невооруженным глазом (ее размер лишь немногим меньше размера орбиты Марса) (2 балла).

Задача № 3. «Видимое суточное движение Солнца по небосводу»

Решение. **1.** В День осеннего равноденствия склонение Солнца равно нулю, и при этом оно находится на небесном экваторе. Следовательно Солнце свое суточное движение в этот день совершает именно по данному кругу (1 балл).

2. Полюсами небесного экватора являются северный и южный полюсы мира (1 балл).

3. В день осеннего равноденствия Солнце пересекает горизонт в точках Востока (E) и Запада (W) (1 балл).

4. В день осеннего равноденствия время пребывания Солнца над горизонтом составляет приблизительно 12 часов (1 балл).

5. Как известно, высота Солнца в верхней кульминации, в общем случае, может быть представлена формулой вида:

$$h_\odot = 90° - \varphi + \delta_\odot.$$

Учитывая тот факт, что склонение Солнца в день осеннего равноденствия равно нулю ($\delta_\odot = 0°$), тогда высота Солнца принимает значение – $h_\odot = 90° - \varphi$ (2 балла).

[2] См., например, https://ru.wikipedia.org/wiki/Геркулес_(созвездие)
[3] См., например, https://ru.wikipedia.org/wiki/Рас_Альгети.
[4] См., например, https://ru.wikipedia.org/wiki/Бета_Геркулеса.

6. Поскольку в день осеннего равноденствия Солнце проходит точку осени, двигаясь из северного полушария в южное, то склонение Солнца в течение данного дня непрерывно уменьшается. Следовательно на восходе склонение Солнца будет больше чем на закате. Учитывая также, что Солнце движется с запада на восток, его прямое восхождение непрерывно увеличивается. Следовательно на восходе его прямое восхождение меньше чем на закате (2 балла).

7. День осеннего равноденствия является началом астрономической осени (1 балл).

8. С использованием рис. А.1 раздела "Справочные данные" легко установить, что Солнце проходит в сезон астрономической осени следующие созвездия: Дева, Весы, Скорпион, Змееносец и Стрелец (1 балл).

9. Согласно той же диаграмме, наибольшее количество времени Солнце находится в созвездии Дева (45 дней), а наименьшее количество времени – в созвездии Скорпиона (7 суток) (2 балла).

Задача № 4. «Ярчайшие звезды небосвода и их свойства»

Решение. Опираясь на сторонние источники информации, составим сводную таблицу 2 основных свойств указанных звезд.

1. Опираясь на результаты данной таблицы, легко видеть, что среди одиночных звезд самой массивной является Ригель, однако среди кратных звезд самой массивной (по сумме масс всех компонентов) является Акрукс (1 балл).

2. Наибольшими размерами обладает Бетельгейзе (1 балл).

Среди указанных выше звезд:

3. Двойными или кратными звездами являются Сириус, Ригил-Толиман-Проксима, Арктур, Капелла, Процион, Ахернар, Хадар, Альдебаран, Антарес, Акрукс, Спика (1 балл).

4. Переменностью блеска обладают Арктур, Капелла, Ахернар, Бетельгейзе, Альтаир, Альдебаран, Антарес, Спика (1 балл).

5. К спектральному классу B относятся Ригель, Ахернар, Хадар, Акрукс, Спика (1 балл).

6. К спектральному классу M относятся Проксима Центавра, Бетельгейзе, Антарес (1 балл).

7. К сверхгигантам относятся Канопус, Ригель, Бетельгейзе, Антарес (1 балл).

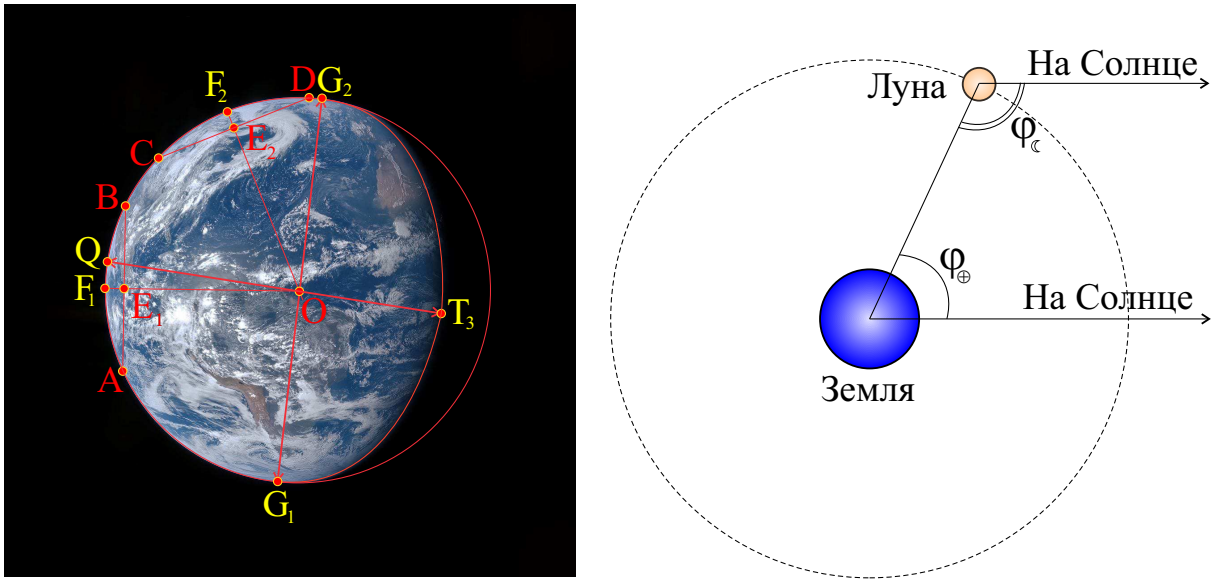
8. К гигантам относятся Арктур, Капелла, Хадар, Альдебаран, Спика (1 балл).

9. Располагаются внутри сферы радиусом 10 пк, с центром в Солнце следующие светила: Сириус, Ригил-Толиман-Проксима, Вега, Процион, Альтаир (1 балл).

№	Звезда	$\mathfrak{M}_*/\mathfrak{M}_\odot$	$\mathfrak{R}_*/\mathfrak{R}_\odot$	Двой-ст-сть/ Кратность	Перемен-ность	Сп. класс	Класс светимости	r, пк	Sign(V_r)
1	Сириус (α Большого Пса)	2.06/1.02	1.711/0.0084	+	-	A1/DA2	V/VII	2.64	-
2	Канопус (α Киля)	10.6	65	-	-	F0	Ib	96	+
3	Ригил/Толиман/ Проксима (α Центавра A/B/C)	1.10/0.90/ 0.123	1.227/0.865/ 0.14	+	-	G2/K1/M6	V/V/V	1.34/1.30	-
4	Арктур (α Волопаса)	1.10	25.4	+	+	K2	III	11.26	-
5	Вега (α Лиры)	2.135	2.818	-	-	A0	V	7.67	-
6	Капелла (α Возничего A/B)	2.69/2.56	12.2/9.2	+	+	K0/G1	III/III	12.9	+
7	Ригель (β Ориона)	18	79	-	-	B8	Iab	260	+
8	Процион (α Малого Пса A/B)	1.50/0.60	1.86/0.02	+	-	F5/D	IV-V/VII	3.496	-
9	Ахернар (α Эридана A/B)	6.7/2.0	11.4/?	+	+	B3/A0-3	V/V	43	+
10	Бетельгейзе (α Ориона)	17	764	-	+	M2	Iab	168	+
11	Хадар (β Центавра A/B)	10.7/10.3	7.07/?	+	-	B1/?	III/?	120	+
12	Альтаир (α Орла)	1.79	1.83	-	+	A7	V	5.15	-
13	Акрукс (α Южного Креста A/B/C)	17.8/6.1/15.5	7.8/?/5.4	+	-	B1/B1/B4	IV/IV/V	99	-
14	Альдебаран (α Тельца)	2.5	45	+	+	K5/M2	III/V	20	+
15	Антарес (α Скорпиона A/B)	12.4/10	400/5.2	+	+	M2/B4	Iab-Ib/V	190	-
16	Спика (α Девы A/B)	11/7	7.8/4.0	+	+	B1/B2	III-IV/V	80	+

Примечания: здесь $\mathfrak{M}_*$, $\mathfrak{M}_\odot$ – массы звезды и Солнца соответственно, $\mathfrak{R}_*$, $\mathfrak{R}_\odot$ – радиусы звезды и Солнца соответственно, r – расстояние до звезды, Sign(V_r) – знак лучевой скорости.

Таблица 2. 16 самых ярких звезд небосвода и их характеристики.



а) б)

Рис. 6. К определению а) фазы Земли, б) связи фазовых углов Земли и Луны.

10. В направлении Солнца (судя по знаку их радиальной скорости) движутся Сириус, Ригил-Толиман-Проксима, Арктур, Вега, Процион, Альтаир, Акрукс, Антарес (1 балл).

Задача № 5. «Фотография Земли и свойства Луны»

Решение. **1.** Для определения фазы Луны необходимо, прежде всего, определить фазу Земли. Для этого рассмотрим рис. 6.а) и воспользуемся следующей методикой.

Согласно определению, ***фазой небесного тела*** называется скалярная величина, равная отношению площади $S_{\text{осв}}$ освещенной части поверхности видимого диска к площади $S_{\text{д}}$ всего диска небесного тела, то есть

$$\Phi = \frac{S_{\text{осв}}}{S_{\text{д}}}. \qquad (1)$$

Выполнив ряд геометрических преобразований легко показать, что исходное определение можно свести к отношению ширины серпа (измеряемой вдоль диаметра данного тела) освещенной части диска к диаметру всего диска:

$$\Phi = \frac{d_{\text{серп}}}{D_{\text{д}}}. \qquad (2)$$

В каком-либо графическом редакторе (или циркулем на бумаге) натянем окружность на образ Земли. Выберем две неблизкие хорды AB и CD. Проведем через их центры перпендикуляры E_1F_1 и E_2F_2. Найдем точку O их пересечения – центр данной окружности (видимого диска). Построим огибающую линию $G_1T_3G_2$, определяющую терминатор диска Земли. Соединим прямой G_1OG_2 крайние точки терминатора G_1 и G_2 и определим диаметр $G_1G_2 = D_{\text{д}} = 177$ мм. Через центр последнего проведем перпендикулярно

отрезок $QT_3 = d_{\text{серп}} = 155$ мм (здесь и далее Ваши значения линейных размеров, определенные по фотографии, могут отличаться от указанных здесь, в силу использования фотографии с иными линейными размерами). Из (2) следует, что $\Phi_\oplus = 0.88$.

Иначе фазу Земли можно определить через ее ***фазовый угол*** ($\varphi_\oplus$) – угол между направлениями на источник излучения (Солнце) и приемник излучения (Луна), если смотреть из центра Земли:

$$\Phi_\oplus = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\varphi_\oplus\right). \tag{3}$$

Аналогично можно записать фазу Луны:

$$\Phi_\leftmoon = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\varphi_\leftmoon\right). \tag{4}$$

Поскольку геоцентрическое расстояние до Луны много меньше гелиоцентрического расстояния системы «Земля-Луна», а орбита Луны является круговой, то, согласно рис. 6.б), фазовые углы данных тел связаны уравнением:

$$\varphi_\oplus + \varphi_\leftmoon = \pi. \tag{5}$$

Из выражений (4)-(5) следует, что (6 баллов)

$$\Phi_\oplus + \Phi_\leftmoon = 1, \;\Rightarrow\; \Phi_\leftmoon = 1 - \Phi_\oplus = 0.12. \tag{6}$$

2. Очевидно, что фазовый угол $\varphi_\oplus$ Земли является также позиционным углом $\psi_\leftmoon$ Луны на ее орбите. Определим его из результата (4):

$$\cos\varphi_\oplus = 2\Phi_\oplus - 1, \;\Rightarrow\; \psi_\leftmoon = \varphi_\oplus = \arccos\left[2\Phi_\oplus - 1\right] = 41.3^\circ.$$

С другой стороны, позиционный угол Луны можно представить через синодический период $S_\leftmoon$ обращения Луны вокруг Земли в виде: $\psi_\leftmoon = \frac{360^\circ}{S_\leftmoon}t$, где t – время, прошедшее от момента последнего новолуния до момента получения данной фотографии. Откуда следует ответ для t (3 балла):

$$t = S_\leftmoon\left(\frac{\psi_\leftmoon}{360^\circ}\right) = 3.39 \text{ сут}. \tag{7}$$

3. Очевидно, что рис. 6.б) полностью соответствует условию задачи и показывает адекватное взаимное расположение данных тел по отношению к Солнцу. Значит Луна была расположена к Солнцу ближе на момент съемки (2 балла).

Ответ: $\Phi_\leftmoon = 0.12$; $t = 3.39$ сут, Луна ближе к Солнцу. (11 баллов).

Задача № 6. «Поправка маятниковых часов»

Решение. **1.** Поправка маятниковых часов, набегающая за земные сутки, согласно определению, есть

$$\Delta T = T_{\text{true}} - T_{\text{clock}}, \tag{8}$$

T_{true} – точное значение времени, которое показывают точно идущие (выверенные) часы, T_{clock} – показания невыверенных часов в данных условиях. Далее отметим, что под ***выверенными маятниковыми часами*** понимаются такие часы, у которых период колебаний маятника в точности равен промежутку времени, на который смещаются показания часов (например, положение секундной стрелки) за одно полное колебание их маятника. Предположим, что в процессе наблюдения за невыверенными часами прошли ровно одни средние солнечные сутки, тогда $T_{\text{true}} = \tau_0$, где $\tau_0 = 24$ часа $= 86400$ с. Пусть T_0 и T – периоды колебаний маятников выверенных и невыверенных часов соответственно. Тогда за одни сутки они совершают следующие количества колебаний:

$$N_0 = \frac{\tau_0}{T_0}, \quad N = \frac{\tau_0}{T}. \tag{9}$$

Значит искомую поправку часов можно записать так

$$\Delta T = N_0\, T_0 - N\, T_0 = \tau_0 \left(1 - \frac{T_0}{T}\right). \tag{10}$$

Периоды колебаний маятников часов можно определить следующими формулами:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0}{g_0}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

здесь ℓ_0, ℓ – длины маятников на экваторе и на полюсе соответственно, g_0, g – ускорения свободного падения маятников на экваторе и на полюсе соответственно. Данные параметры можно записать так

$$\ell_0 = \bar{\ell}(1 + \alpha_h\, t_1), \quad \ell = \bar{\ell}(1 + \alpha_h\, t_2), \quad g_0 = \frac{G\,\mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus^2} - \frac{4\pi^2\,\mathfrak{R}_\oplus}{T_\oplus^2}, \quad g = \frac{G\,\mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus^2},$$

здесь $\bar{\ell}$ – длина маятника при температуре $t_0 = 0°$; $\mathfrak{M}_\oplus, \mathfrak{R}_\oplus, T_\oplus$ – масса, радиус и сидерический период вращения Земли вокруг своей оси. В результате поправку часов можно представить в виде:

$$\Delta T = \tau_0 \left(1 - \sqrt{\frac{\ell_0}{\ell}\frac{g}{g_0}}\right) = \tau_0 \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{\ell}(1 + \alpha_h\, t_1)}{\bar{\ell}(1 + \alpha_h\, t_2)}\left(1 - \frac{4\pi^2\,\mathfrak{R}_\oplus^3}{G\,\mathfrak{M}_\oplus\, T_\oplus^2}\right)^{-1}}\right) \approx$$

$$\approx \tau_0 \left(1 - \sqrt{(1 + \alpha_h\, t_1)(1 - \alpha_h\, t_2)\left(1 + \frac{4\pi^2\,\mathfrak{R}_\oplus^3}{G\,\mathfrak{M}_\oplus\, T_\oplus^2}\right)}\right) \approx$$

$$\approx \tau_0 \left(1 - \sqrt{1 + \alpha_h (t_1 - t_2) + \frac{4\pi^2\,\mathfrak{R}_\oplus^3}{G\,\mathfrak{M}_\oplus\,T_\oplus^2}}\right) \approx -\frac{\tau_0}{2}\left(\alpha_h (t_1 - t_2) + \frac{4\pi^2\,\mathfrak{R}_\oplus^3}{G\,\mathfrak{M}_\oplus\,T_\oplus^2}\right) =$$

$$= -\frac{\tau_0}{2}\left(3.36 \cdot 10^{-3} + 3.45 \cdot 10^{-3}\right) = -588 \text{ с}. \qquad (11)$$

В расчетах последней величины было учтено, что во всех круглых скобках вторые слагаемые являются малыми величинами в сравнении с единицей, и поэтому было использовано биномиальное приближение (последняя формула блока А.5 раздела "Справочные данные"). Т.о., данные часы в Антарктиде будут уходить вперед почти на 10 минут (на это указывает знак «−») (7 баллов)!

2. Из последнего результата также следует, что чтобы изменить поправку до значения $\Delta T_0 = 10$ с, необходимо увеличить исходную выверенную длину маятника на малую величину $\Delta\ell_0$. Тогда с использованием результата (11) вновь можно записать (5 баллов):

$$\tau_0 \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{\ell}(1 + \alpha_h\,t_1)}{(\ell_0 + \Delta\ell_0)}\left(1 - \frac{4\pi^2\,\mathfrak{R}_\oplus^3}{G\,\mathfrak{M}_\oplus\,T_\oplus^2}\right)^{-1}}\right) \le \Delta T_0,$$

$$\tau_0 \left(1 - \sqrt{(1 + \alpha_h\,t_1)(1 - \alpha_h\,t_2)\left(1 - \frac{\Delta\ell_0}{\ell_0}\right)\left(1 + \frac{4\pi^2\,\mathfrak{R}_\oplus^3}{G\,\mathfrak{M}_\oplus\,T_\oplus^2}\right)}\right) \le \Delta T_0,$$

$$\approx \tau_0 \left(1 - \sqrt{1 + \alpha_h (t_1 - t_2) + \frac{4\pi^2\,\mathfrak{R}_\oplus^3}{G\,\mathfrak{M}_\oplus\,T_\oplus^2} - \frac{\Delta\ell_0}{\ell_0}}\right) \le \Delta T_0,$$

$$\left(\frac{\Delta\ell_0}{\ell_0} - \alpha_h (t_1 - t_2) - \frac{4\pi^2\,\mathfrak{R}_\oplus^3}{G\,\mathfrak{M}_\oplus\,T_\oplus^2}\right) \le \frac{2\,\Delta T_0}{\tau_0},$$

$$\Delta\ell_0 \le \ell_0 \left(\frac{2\,\Delta T_0}{\tau_0} + \alpha_h (t_1 - t_2) + \frac{4\pi^2\,\mathfrak{R}_\oplus^3}{G\,\mathfrak{M}_\oplus\,T_\oplus^2}\right), \;\Rightarrow\; \Delta\ell_0 \le 2.11 \text{ мм}. \qquad (12)$$

Ответ: к задаче представлен выражениями (11), (12). (12 баллов).

Задача № 7. «Трио Местной группы и фотометрия ее главных галактик»

Решение. **1.** Определим абсолютную звездную величину галактики M33 с помощью формулы вида (2 балла):

$$M_2 = m_2 + 5^{\text{m}} - 5^{\text{m}} \lg r_2 = -19.1^{\text{m}}, \;\Rightarrow\; |M_2 - M_1| = 1.9^{\text{m}}. \qquad (13)$$

2. С использованием той же формулы вычислим расстояние до галактики

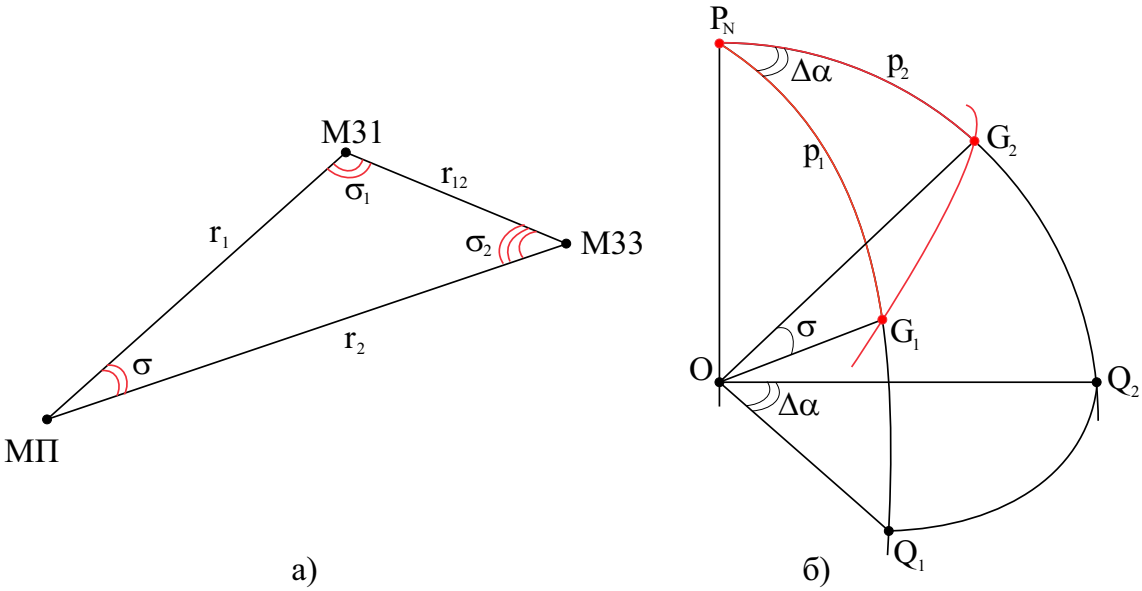


Рис. 7. К определению а) плоского треугольника, в вершинах которого расположены данные галактики, б) сферического треугольника "Северный полюс мира-M31-M33".

M31 (2 балла):

$$M_1 = m_1 + 5^{\mathrm{m}} - 5^{\mathrm{m}} \lg r_1, \;\Rightarrow\; r_1 = 10^{1+0.2(m_1-M_1)} = 758.6 \text{ кпк}, \;\Rightarrow$$
$$|r_2 - r_1| = 141.4 \text{ кпк}. \qquad (14)$$

3. Определим радиусы галактик, учитывая, что наибольший угловой размер задает данную величину (2 балла):

$$\mathfrak{R}_1 = r_1 \operatorname{tg}\left(\frac{a_1'}{2}\right) = 21.2 \text{ кпк}, \quad \mathfrak{R}_2 = r_2 \operatorname{tg}\left(\frac{a_2'}{2}\right) = 9.56 \text{ кпк}. \qquad (15)$$

4. Для определения видимой звездной величины M33 с позиции гипотетического наблюдателя, расположенного в M31, необходимо прежде вычислить расстояние между галактиками M31 и M33. Для этого воспользуемся теоремой косинусов для плоского треугольника, в вершинах которого расположены данные галактики (см. рис. 7.а):

$$r_{12} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos\sigma}, \qquad (16)$$

здесь r_1, r_2 – гелиоцентрические расстояния до галактик M31 и M33 соответственно, σ – угол между направлениями на данные галактики с позиции наблюдателя, находящегося в центре Солнца (или Земли).

Для определения последнего параметра рассмотрим сферический треугольник $P_N G_1 G_2$ (см. рис. 7.б), образованный Северным полюсом мира (P_N) галактикой M31 (G_1) и галактикой M33 (G_2). Учтем далее, что дуга $P_N G_1$ определяется полярным расстоянием (p_1) галактики M31, отсчитываемым вдоль круга склонения $P_N Q_1$, а дуга $P_N G_2$ определяется полярным расстоянием (p_2) галактики M33, отсчитываемым вдоль круга склонения $P_N Q_2$. Угол при

полюсе мира равен разности прямых восхождений ($\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$) данных галактик, а дуга G_1G_2 большого круга есть искомая величина σ. Воспользуемся формулой косинусов для данного сферического треугольника:

$$\cos\sigma = \cos p_1 \cos p_2 + \sin p_1 \sin p_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \;\Rightarrow$$
$$\cos\sigma = \cos(\alpha_2 - \alpha_1)\cos\delta_1 \cos\delta_2 + \sin\delta_1 \sin\delta_2, \;\Rightarrow$$
$$\sigma = \arccos\left[\cos(\alpha_2 - \alpha_1)\cos\delta_1 \cos\delta_2 + \sin\delta_1 \sin\delta_2\right] = 14.785^\circ. \qquad (17)$$

При записи последнего результата была использована связь между полярным расстоянием p_i и склонением δ_i светила в виде:

$$p_i + \delta_i = 90^\circ, \;\Rightarrow\; p_i = 90^\circ - \delta_i.$$

В результате, с использованием формулы (16), получаем искомое расстояние $r_{12} = 255.2$ кпк. В итоге видимая звездная величина M33 представляется в виде (2 балла):

$$m_2^{(1)} = M_2 - 5 + 5\lg r_{12} = 2.93^{\rm m}. \qquad (18)$$

5. Видимую звездную величину M31 с позиции гипотетического наблюдателя, расположенного в M33, можно вычислить аналогично (2 балла):

$$m_1^{(2)} = M_1 - 5 + 5\lg r_{12} = 1.03^{\rm m}. \qquad (19)$$

6. Согласно определению, ***поверхностной яркостью*** протяженного небесного тела называется отношение освещенности, создаваемой единичной угловой площадкой его поверхности в точке, где находится наблюдатель, к величине этой площадки. Если полагать, что по поверхности объекта поверхностная яркость постоянна, то данную величину (или ее среднее значение) можно определить так:

$$B = \frac{E}{\pi\,(a'/2)\times(b'/2)}, \qquad (20)$$

здесь E – интегральная освещенность, создаваемая данным небесным объектом в точке, где находится наблюдатель. Здесь данные туманности моделируются эллипсоидами с осями $a' \times b'$. Пусть m_B – звездная величина, соответствующая поверхностной яркости галактики на одну квадратную угловую секунду. Тогда, используя формулу Погсона имеем

$$m_B - m_i = -2.5\lg\left(\frac{B}{E}\right), \;\Rightarrow\; m_B = m_i + 2.5\lg\left(\frac{\pi}{4}\,a'\times b'\right). \qquad (21)$$

Выполняя численные расчеты, получаем значения:

$$m_{B\,1} = 22.18^{\rm m}/\text{кв. угл. сек.}, \;\; m_{B\,2} = 23.12^{\rm m}/\text{кв. угл. сек.} \qquad (22)$$

Из последних результатов следует, что M31 почти на 1 звездную величину ярче M33 с каждой квадратной угловой секунды (4 балла).

Ответ: к задаче представляется выражениями: 1) (13), 2) (14), 3) (15), 4) (18), 5) (19), 6) (21). (14 баллов).

Задача № 8. «Одинокий Юпитер и центр масс»

Решение. **1.** Поскольку все планеты Солнечной системы изначально двигались по круговым орбитам, то для каждой справедлив второй закон Ньютона:

$$m_i\frac{V_i^2}{r_i}=\frac{G\,m_i\,\mathfrak{M}_\odot}{r_i^2},\quad\Rightarrow\quad m_i\frac{V_i^2}{2}=\frac{G\,m_i\,\mathfrak{M}_\odot}{2r_i},\quad\text{где}\;\;i=1,\ldots,7,\tag{23}$$

здесь m_i, V_i, r_i – масса, скорость, радиус орбиты i-й классической планеты соответственно, $\mathfrak{M}_\odot$ – масса Солнца, G – универсальная гравитационная постоянная.

Полная механическая энергия i-й планеты есть

$$E_i=m_i\frac{V_i^2}{2}-\frac{G\,m_i\,\mathfrak{M}_\odot}{r_i}=-\frac{G\,m_i\,\mathfrak{M}_\odot}{2\,r_i},\quad i=1,\ldots,7.\tag{24}$$

Чтобы i-ая планета могла покинуть Солнечную систему, необходимо чтобы ее полная энергия была неотрицательной. Следовательно, в предельном случае, данная планета должна "забрать" у Юпитера энергию, равную

$$|E_i|=\frac{G\,m_i\,\mathfrak{M}_\odot}{2\,r_i}.\tag{25}$$

Чтобы все классические планеты (кроме Юпитера) смогли покинуть Солнечную систему, необходимо чтобы Юпитер отдал энергию

$$\sum_{i=1}^{7}|E_i|=\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{2}\sum_{i=1}^{7}\frac{m_i}{r_i}.\tag{26}$$

Запишем закон сохранения полной механической энергии для Солнечной системы:

$$-\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{2}\sum_{i=1}^{7}\frac{m_i}{r_i}-\frac{G\,m_{♃}\,\mathfrak{M}_\odot}{2\,r_{♃}^{(0)}}=-\frac{G\,m_{♃}\,\mathfrak{M}_\odot}{2\,r_{♃}},$$

здесь $r_{♃}^{(0)}, r_{♃}$ – начальное и конечное значения радиуса орбиты Юпитера (6 баллов).

$$r_{♃}=m_{♃}\left(\sum_{i=1}^{8}\frac{m_i}{r_i}\right)^{-1}.\tag{27}$$

2. Используя значения масс классических планет, выраженных в массах Земли, и значения больших полуосей, выраженных в а.е., в результате получаем

значение $r_{♃} = 4.253$ а.е. т.о., большая полуось (радиус) орбиты Юпитера уменьшится на 0.95 а.е. Период обращения планеты-гиганта определим с помощью третьего закона Кеплера:

$$\left(\frac{T_{♃}}{T_{♃}^{(0)}}\right)^2 = \left(\frac{r_{♃}}{r_{♃}^{(0)}}\right)^3, \;\Rightarrow\; T_{♃} = T_{♃}^{(0)}\left(\frac{r_{♃}}{r_{♃}^{(0)}}\right)^{3/2} = 8.77 \text{ лет}. \qquad (28)$$

Тогда на $\Delta T_J = 3.09$ года уменьшится период обращения Юпитера (4 балла).

3. Согласно определению, радиус-вектор центра масс системы "Солнце-Юпитер" в произвольной системе отсчета представляется в виде:

$$\vec{R}_c = \frac{\mathfrak{M}_{\odot}\,\vec{r}_{\odot} + \mathfrak{M}_{♃}\,\vec{r}_{♃}}{\mathfrak{M}_{\odot} + \mathfrak{M}_{♃}}, \qquad (29)$$

здесь $\vec{r}_{\odot}$, $\vec{r}_{♃}$ – радиусы-векторы Солнца и Юпитера в данной системе отсчета. Если данная система отсчета является гелиоцентрической, то гелиоцентрическое расстояние до центра масс будет

$$R_c = \frac{\mathfrak{M}_{♃}\,r_{♃}}{\mathfrak{M}_{\odot} + \mathfrak{M}_{♃}}. \qquad (30)$$

Следовательно, изменение гелиоцентрического расстояния до центра масс составляет

$$\Delta R_c = \frac{\mathfrak{M}_{♃}\,(r_{♃}^{(0)} - r_{♃})}{\mathfrak{M}_{\odot} + \mathfrak{M}_{♃}} = 9.06 \cdot 10^{-4} \text{ а.е.} = 135460 \text{ км}. \qquad (31)$$

Очевидно, что центр масс системы приблизится к центру материнской звезды на указанную величину (4 балла).

Ответ: к задаче представляется выражениями (27), (28); $r_{♃} = 4.253$ а.е.; переместится к центру масс материнской звезды, на величину (31). (14 баллов).

Задача № 9. «Вероятность "поимки" креста Пурбаха»

Решение. Прежде всего отметим, что данное событие ("поимка" креста Пурбаха) является комплексным событием и включает в себя два разных простых события, не связанных между собой причинной связью: 1-ое событие – это еженедельные случайные сеансы наблюдения астрономом-любителем Луны, 2-ое событие – это явление прохождение терминатора Луны через соответствующие области диска Луны. Еще раз подчеркнем, что данные простые события не связаны между собой причинно-следственной связью. Значит вероятность "поимки" креста Пурбаха астрономом-любителем может быть представлена в виде произведения вероятностей двух независимых простых событий (4 балла):

$$P_{\text{tot}} = P_1 \cdot P_2. \qquad (32)$$

Определим каждый множитель отдельно.

1. Заметим, что периодичность первого процесса – одна неделя продолжительностью $N_d = 7$ сут. Астроном совершает лишь $N_c = 2$ сеанса в неделю, следовательно вероятность "выбора нужного дня" составляет N_c/N_d. Важно отметить, что Луна на момент наблюдений находилась вблизи экватора, следовательно его продолжительность пребывания над горизонтом составляла приблизительно половину суток, т.е. $\tau_0/2$, где $\tau_0 = 24$ часа. При этом из этого окна наблюдений астроном использовал лишь произвольный интервал $\tau_{\text{obs}} = 30$ мин. В итоге вероятность первого события составляет величину (4 балла):

$$P_1 = \left(\frac{N_c}{N_d}\right) \times \left(\frac{\tau_{\text{obs}}}{\tau_0/2}\right) = 2\left(\frac{N_c}{N_d}\right) \times \left(\frac{\tau_{\text{obs}}}{\tau_0}\right) = \frac{1}{84}. \tag{33}$$

2. Вероятность попадания на интервал визуализации креста Пурбаха и "лунного V" в данный момент времени можно оценить отношением продолжительности этого интервала τ_{vis} к половине синодического месяца Луны $S_{☾}/2$ ($S_{☾} = 29.531$ сут.), поскольку в течение указанного промежутка терминатор проходит данные области рельефа дважды:

$$P_2 = \frac{\tau_{\text{vis}}}{S_{☾}/2}. \tag{34}$$

Пусть $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ – угловые протяженности (определенные с Земли и перпендикулярные терминатору) форм рельефа, которые порождают оптические феномены креста Пурбаха и "лунный V" соответственно. Очевидно, что "лунный V" расположен почти на экваторе и следовательно его протяженность можно записать так $\Delta\varphi_2 = \omega_{☾}\,\tau_{\text{vis}}$, где $\omega_{☾} = 360°/S_{☾}$ – угловая скорость перемещения терминатора по поверхности Луны вблизи экватора. В итоге (34) можно записать так

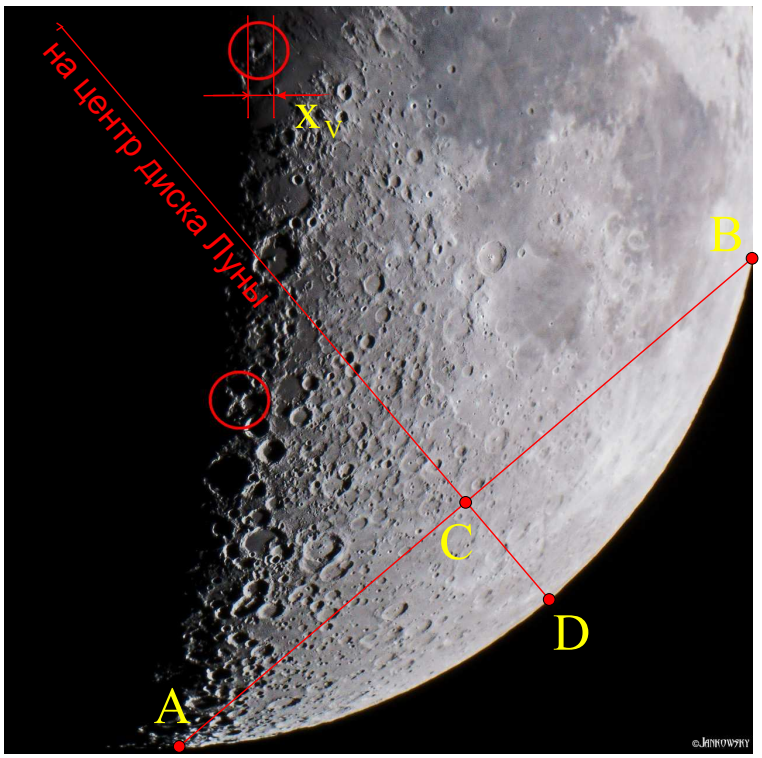


Рис. 8. К определению дополнительных построений.

$$P_2 = \frac{2\Delta\varphi_2}{360°}. \tag{35}$$

Последнюю величину можно записать так: $\Delta\varphi_2 = \mu_a\, x_V$, здесь μ_a – угловой масштаб фотографии, x_V – линейный размер данной формы рельефа, определенный по фотографии. Для определения протяженности $\Delta\varphi_2$ необходимо определить угловой масштаб фотографии. Последний может быть записан в виде:

$$\mu_a = \frac{D''_{\leftmoon}}{d_{\leftmoon}}, \tag{36}$$

здесь $D''_{\leftmoon}$, $d_{\leftmoon}$ – угловой диаметр Луны и ее линейный диаметр, определенный по фотографии, соответственно. Первую величину можно легко определить как

$$D''_{\leftmoon} = \frac{2\mathfrak{R}_{\leftmoon}}{a_{\leftmoon}} \times 3438' = 31.09'.$$

Непосредственно определить $d_{\leftmoon}$ по фотографии не представляется возможным, поскольку диск Луны не виден даже наполовину из-за малости поля зрения используемого для фото телескопа. Поэтому воспользуемся следующей методикой. Выполним дополнительное построение. Отметим точки пересечения видимого диска с границами кадра A и B. Построим хорду AB и найдем ее середину – точку C (см. рис. 8). Определим половину ее длины – $\ell = AB/2$=115 мм (здесь и далее Ваши значения могут отличаться от указанных, при использовании фотографии в ином масштабе). Далее построим перпендикуляр CD до границы видимого диска. Определим его длину – $h = 39$ мм. Воспользуемся теоремой Пифагора для треугольника $\triangle OAC$, катетами которого являются стороны AC, CO, где O – центр диска Луны (на фото не представлен), и гипотенузой $AO = R_{\leftmoon}$:

$$R^2_{\leftmoon} = (R_{\leftmoon} - h)^2 + \ell^2, \;\Rightarrow\; R_{\leftmoon} = \frac{\ell^2 + h^2}{2h} = 189.1 \text{ мм}. \tag{37}$$

Далее можно определить угловой масштаб фотографии:

$$\mu_a = 4.93\ ''/\text{мм}. \tag{38}$$

Следовательно искомая величина (при $x_V = 8$ мм) составляет $\Delta\varphi_2 = 39.5''$. В итоге $P_2 = 6.10\cdot10^{-5}$. Согласно (32) имеем $P_{\text{tot}} = 7.26\cdot10^{-7}$, что соответствует одному успешному сеансу наблюдений из 1378025 проведенных, т.е. 1 раз в 13205 лет (6 баллов).

Ответ: $P_{\text{tot}} = 7.26 \cdot 10^{-7}$. (14 баллов).

Задача № 10. «Сборка солнечной энергии»

Решение. **1.** Для определения искомой величины воспользуемся определением ***освещенности***. Последняя есть скалярная физическая величина, равная отношению количества энергии ($dW^{(\text{fal})}_{\text{em}}$), переносимой электромагнитными волнами через площадку dS, перпендикулярную направлению их

распространения, за время dt, к величине этой площадки и промежутку времени времени:

$$E = \frac{dW_{\rm em}}{dS\,dt}, \;\; \Rightarrow \;\; dW_{\rm em}^{\rm (fal)} = E\,dS\,dt. \tag{39}$$

Далее воспользуемся определением КПД: отношением энергии ($dW_{\rm em}^{\rm (col)}$), собранной КА с элементарной площадки dS за время dt, к энергии ($dW_{\rm em}^{\rm (fal)}$), упавшей на туже площадку, за тот же промежуток времени:

$$\eta = \frac{dW_{\rm em}^{\rm (col)}}{dW_{\rm em}^{\rm (fal)}}, \;\; \Rightarrow \;\; dW_{\rm em}^{\rm (col)} = \eta\,dW_{\rm em}^{\rm (fal)} = \eta\,E\,dS\,dt. \tag{40}$$

Искомая величина солнечной энергии, собранной КА за время экспедиции к астероиду, есть (3 балла)

$$W_{\rm em}^{\rm (col)} = \int dW_{\rm em}^{\rm (col)} = \int_0^{t_f}\int_S \eta\,E\,dS\,dt. \tag{41}$$

В последнем выражении проводится интегрирование по времени полета с момента запуска батарей и до момента прибытия (t_f) КА к астероиду и по площади активной поверхности солнечных батарей КА. Очевидно, что от величины элементарной площадки dS освещенность, создаваемая Солнцем, у поверхности батарей КА, не может зависеть, поэтому интеграл по площади можно легко снять и представить в виде (2 балла):

$$W_{\rm em}^{\rm (col)} = \eta\,S\int_0^{t_f} E\,dt. \tag{42}$$

Освещенность, создаваемая Солнцем, у КА, на гелиоцентрическом расстоянии r может быть представлена в виде (2 балла):

$$E_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi\,r^2}, \tag{43}$$

где $L_\odot$ – светимость Солнца. Интервал времени dt можно записать так

$$dt = \frac{d\varphi}{\omega_\odot} = \frac{d\varphi}{2\sigma}r^2,$$

здесь $d\varphi$ – элементарный угол поворота КА относительно центра Солнца в своем орбитальном движении, $\sigma, \omega_\odot$ – его секторная и угловая гелиоцентрическая скорости соответственно; при записи последнего был использован второй закон Кеплера. Секторную скорость можно записать так (2 балла)

$$\sigma = \frac{S_{\rm ell}}{T} = \frac{\pi\,a\,b}{T} = \frac{\pi\,a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T} = \frac{\pi\,a^{3/2}\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}}{T} = \frac{1}{2}\sqrt{G\,\mathfrak{M}_\odot\,p}.$$

При записи последнего использовано аналитическое выражение для площади эллипса – $S_{\rm ell} = \pi\,a\,b$, связь большой и малой оси эллипса КА – $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$,

выражение для фокального параметра орбиты – $p = a(1-\varepsilon^2)$ и третий закон Кеплера: $a^{3/2}/T = \sqrt{G\,\mathfrak{M}_\odot}/2\pi$. В итоге интеграл (42) представляется в виде:

$$W_{\rm em}^{\rm (col)} = \eta\, S \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{L_\odot}{4\pi\, r^2}\, \frac{d\varphi\, r^2}{\sqrt{G\,\mathfrak{M}_\odot\, p}} = \frac{\eta\, L_\odot\, S}{4\pi\sqrt{G\,\mathfrak{M}_\odot\, p}} \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi = \frac{\eta\, L_\odot\, S}{8\sqrt{G\,\mathfrak{M}_\odot\, p}}. \qquad (44)$$

При вычислении последнего интеграла учтено, что полярный угол φ отсчитывается от направления на перигелий, и его значения, соответствующие точке гравитационного маневра и афелию равны $\pi/2$ и π соответственно. Принимая во внимание, что гравитационный маневр был выполнен в окрестности Марса, можно полагать, что $p = a_\male = 1.524$ а.е. – большой полуоси орбиты Красной планеты. В итоге имеем (2 балла)

$$W_{\rm em}^{\rm (col)} = \frac{\eta\, L_\odot\, S}{8\sqrt{G\,\mathfrak{M}_\odot\, a_\male}} = 6.52\cdot 10^{10}\ \text{Дж}. \qquad (45)$$

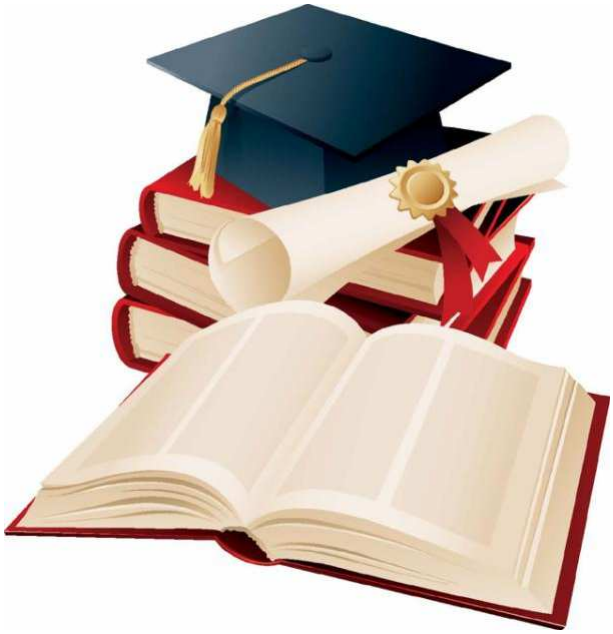
С использованием 3-го закона Кеплера вычислим большую полуось новой эллиптической орбиты КА (4 балла):

$$\left(\frac{a}{a_\oplus}\right)^3 = \left(\frac{T}{T_\oplus}\right)^2, \ \Rightarrow\ a = a_\oplus \left(\frac{T}{T_\oplus}\right)^{2/3} = 4.64\ \text{а.е.}, \ \Rightarrow$$

$$a_\male = a(1-\varepsilon^2), \ \Rightarrow\ \varepsilon = \sqrt{1-\left(\frac{a_\male}{a}\right)} = 0.820. \qquad (46)$$

Ответ: к задаче представляется выражениями (45)-(46). (15 баллов).

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ



A.1. Основные физические и астрономические постоянные

- *Гравитационная постоянная* – $G = 6.674 \cdot 10^{-11}$ м$^3\cdot$ кг$^{-1} \cdot c^{-2}$
- *Скорость света в вакууме* – $c = 2.998 \cdot 10^8$ м/с
- *Универсальная газовая постоянная* – $R = 8.31$ кг$\cdot$м$^2\cdot$ с$^{-2}\cdot$K$^{-1}\cdot$ моль$^{-1}$
- *Постоянная Стефана-Больцмана* – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ кг$\cdot$с$^{-3}\cdot$K^{-4}
- *Постоянная Авогадро* – $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
- *Масса протона* – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг
- *Масса электрона* – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ кг
- *Астрономическая единица* – 1 а.е. $= 1.496 \cdot 10^{11}$ м
- *Парсек* – 1 пк $= 206265$ а.е. $= 3.086 \cdot 10^{16}$ м
- *Постоянная Хаббла* – $H = 72$ км$\cdot$с$^{-1}\cdot$Мпк$^{-1}$

A.2. Данные о Солнце

- *Радиус* – $6.955 \cdot 10^5$ км
- *Масса* – $1.989 \cdot 10^{30}$ кг
- *Светимость* – $3.827 \cdot 10^{26}$ Вт
- *Спектральный класс* – G2
- *Видимая звездная величина* – -26.74^m
- *Абсолютная болометрическая звездная величина* – $+4.83^m$
- *Показатель цвета (B-V)* – $+0.67^m$
- *Эффективная температура* – 5778 K
- *Средний горизонтальный параллакс* – $8.794''$
- *Солнечная постоянная (во всем спектре) на расстоянии Земли* – 1361 Вт/м^2
- *Солнечная постоянная (в видимом свете) на расстоянии Земли* – 600 Вт/м^2

A.3. Данные о Земле

- *Эксцентриситет орбиты* – 0.017
- *Тропический год* – 365.24219 сут
- *Средняя орбитальная скорость* – 29.8 км/с
- *Период вращения* – 23 часа 56 минут 04 секунды
- *Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0* – $23^\circ\,26'\,21.45''$

- *Средний по объему радиус* – 6371.0 км
- *Средний экваториальный радиус* – 6378.14 км
- *Длина земного меридиана* – 20004.276 км
- *Полярный радиус* – 6356.77 км
- *Масса* – $5.974 \cdot 10^{24}$ кг
- *Средняя плотность* – 5.52 г·см$^{-3}$
- *Объемный состав атмосферы* – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim$ 1%)

A.4. Данные о Луне

- *Среднее расстояние от Земли* – 384400 км
- *Минимальное расстояние от Земли* – 356410 км
- *Максимальное расстояние от Земли* – 406700 км
- *Эксцентриситет орбиты* – 0.055
- *Наклон плоскости орбиты к эклиптике* – $5°09'$
- *Сидерический (звездный) период обращения* – 27.321662 сут
- *Синодический период обращения* – 29.530589 сут
- *Радиус* – 1738 км
- *Масса* – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или 1/81.3 массы Земли
- *Средняя плотность* – 3.34 г·см$^{-3}$
- *Визуальное геометрическое альбедо* – 0.12
- *Видимая звездная величина в полнолуние* -12.7^m

A.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin\alpha \pm x\,\cos\alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos\alpha \mp x\,\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg}\alpha \pm \frac{x}{\cos^2\alpha};$$

$$(1+x)^n \approx 1 + n\,x;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.

A.6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.		градусы		сут
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

A.7. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли	г·см$^{-3}$		градусы		
Солнце	$1.989{\cdot}10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут†	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час†	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;
† – обратное вращение.

А.8. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см$^{-3}$	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685†	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.9. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике и график для уравнения времени

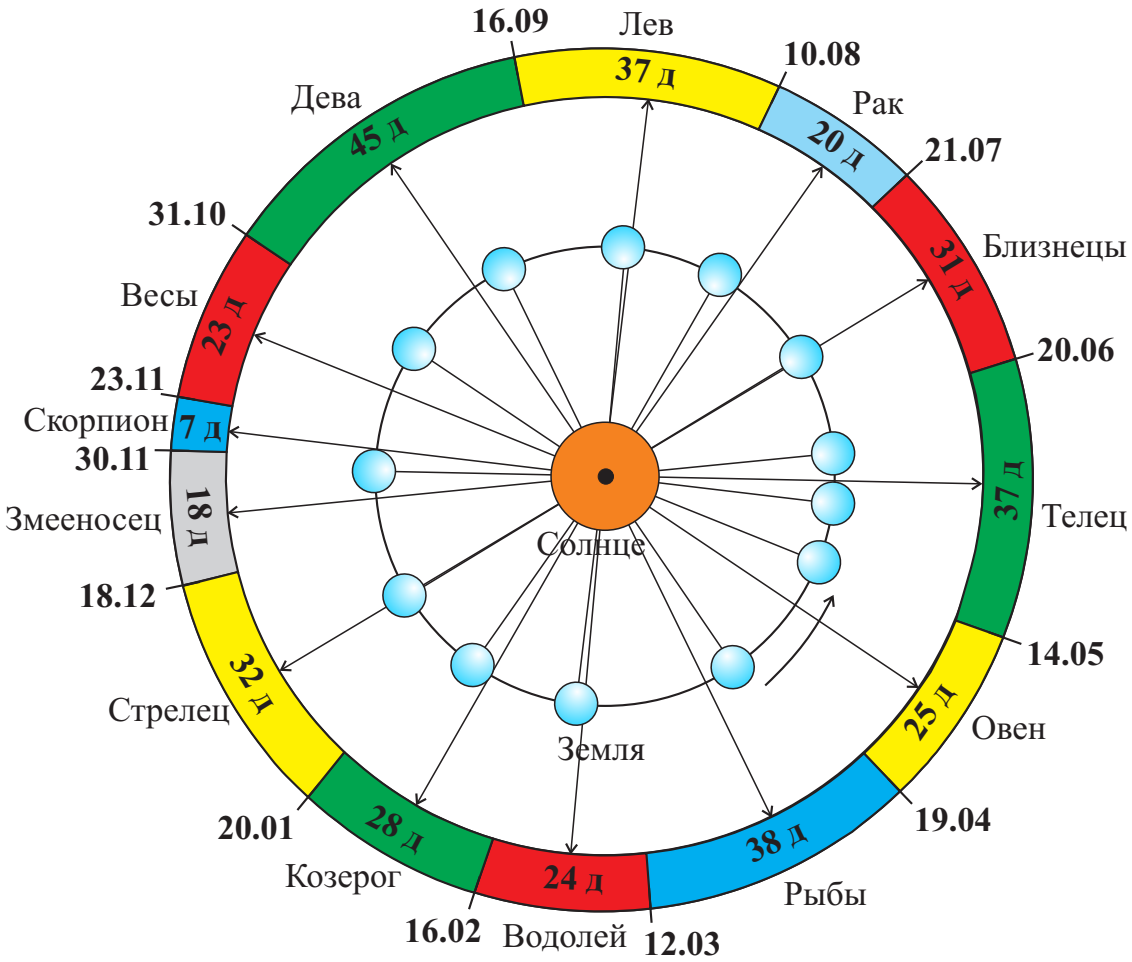


Рис. А.1. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике.

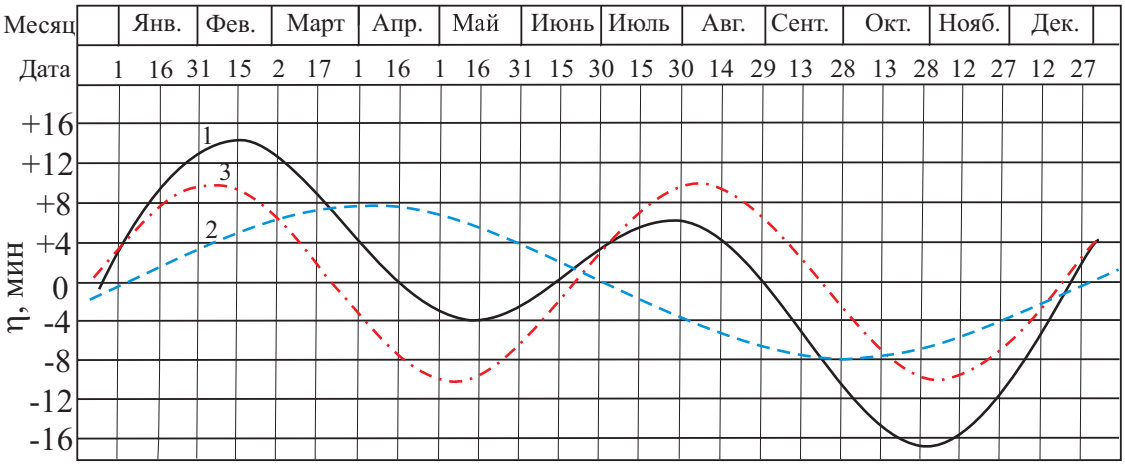


Рис. А.2. График уравнения времени: 1 – уравнение времени, 2 – уравнение центра, 3 – уравнение от наклона эклиптики.

A.10. Некоторые характеристики звезд

Болометрические поправки ΔM_b

Спектр	ΔM_b	Спектр	ΔM_b		
			Гл. последовательность	Гиганты	Сверхгиганты
B0	– 2.70	F5	– 0.04	– 0.08	– 0.12
B5	– 1.58	F8	– 0.05	– 0.17	– 0.28
A0	– 0.72	G0	– 0.06	– 0.25	– 0.42
A5	– 0.31	G2	– 0.07	– 0.31	– 0.52
F0	– 0.09	G5	– 0.10	– 0.39	– 0.65
F2	– 0.04	G8	– 0.10	– 0.47	– 0.80
		K0	– 0.11	– 0.54	– 0.93
		K2	– 0.15	– 0.72	– 1.20
		K3	– 0.31	– 0.89	– 1.35
		K4	– 0.55	– 1.11	– 1.56
		K5	– 0.85	– 1.35	– 1.86
		M0	– 1.43	– 1.55	– 2.2
		M1	– 1.70	– 1.72	– 2.6
		M2	– 2.03	– 1.95	– 3.0
		M3	– 2.35	– 2.26	– 3.6
		M4	– 2.7	– 2.72	– 3.8
		M5	– 3.1	– 3.4	– 4.0

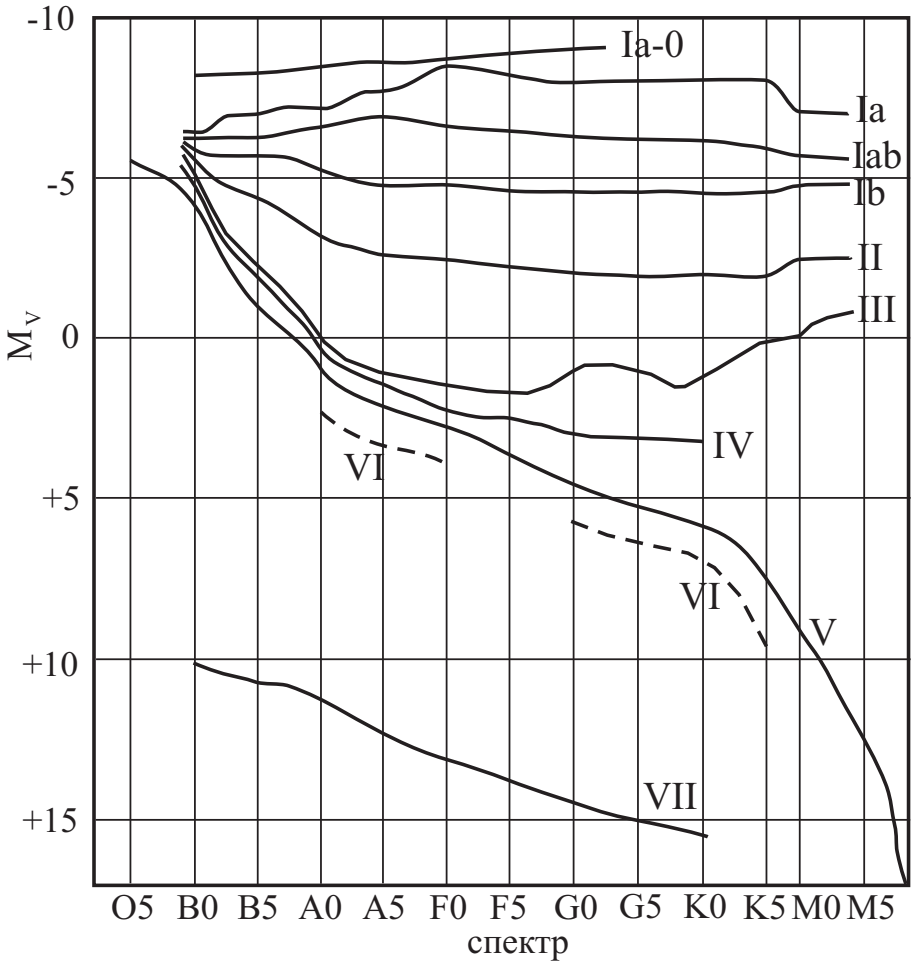


Рис. А.3. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.

Рис. А.4. Таблица Менделеева.